SÉRIES DE FOURIER

JEAN-PAUL CALVI

1. Approximation des fonctions par des séries de Fourier

1.1. Séries de Fourier d'une fonction intégrable.

1.1.1. *Définition.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique *intégrable* sur $[0,2\pi]$ ie $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty$. On note $f \in \mathbf{L}([0,2\pi])$. On appelle **série de Fourier** de f la série de fonctions trigonométriques

$$\frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \tag{1.1.1}$$

où

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt. \tag{1.1.2}$$

Ces coefficients sont appelés les **coefficients de Fourier** de f. Puisque $f \in \mathbf{L}[0,2\pi]$, ils sont bien définis et par conséquent la série aussi. Pour un x donné, la série (1.1.1) peut ou non converger et lorsqu'elle converge sa limite peut ou non être égale à $f(x)$. Le but de ce cours est de donner, puis d'appliquer, des résultats fondamentaux qui assurent la convergence de la série (1.1.1) vers $f(x)$ lorsque f n'est pas une fonction trop "singulière".

On notera $S_n(f,x)$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la fonction considérée, $S_n(x)$, la n-ième somme partielle de la série (1.1.1),

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx). \tag{1.1.3}$$

1.1.2. *Observations sur la définition.*

(1) La théorie que nous allons développer a un pendant immédiat pour les fonctions de période l quelconque (non nul) dans $\mathbb{R}$ (voir plus loin les exemples de séries de Fourier).

(2) Si f est *paire* alors

$$\begin{cases} b_n(f) &= & 0 & (n \geq 1) \\ a_n(f) &= & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt & (n \geq 0) \end{cases}$$

(3) Si f est *impaire*

$$\begin{cases} a_n(f) &= & 0 & (n \geq 0) \\ b_n(f) &= & \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt & (n \geq 1). \end{cases}$$

(4) De nombreux auteurs écrivent la série de Fourier en faisant intervenir les fonctions e^{inx} plutôt que les fonctions $\cos nx$ et $\sin nx$. La fonction $S_n(f,x)$ devient alors

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{k=n} \alpha_k(f)e^{ikx} \tag{1.1.4}$$

Date: 16 janvier 2005.

Préparation au concours interne de l'agrégation de mathématique.

où
$$\alpha_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{1.1.5}$$
On vérifie aisément que les formules (1.1.4) et (1.1.3) coïncident. La formule (1.1.4) a l'avantage d'être plus symétrique.

1.1.3. *Formule de Dirichlet.* On appelle n-ième **noyau de Dirichlet** la fonction de deux variables x et t définie par
$$K_n(x,t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(nx)\cos(nt)+\sin(nx)\sin(nt) \tag{1.1.6}$$
$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{n(x-t)\right\}. \tag{1.1.7}$$

En remplaçant les coefficients de Fourier par leur expression intégrale dans $S_n(f,x)$ puis en permutant les signes $\int_0^\pi$ et $\sum_{k=1}^n$ on obtient :

Théorème 1 (Formule intégrale pour $S_n(f)$).
$$S_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x,t)f(t)dt. \tag{1.1.8}$$

Théorème 2 (Expression du noyau de Dirichlet).
$$K_n(x,t)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left\{(n+\frac{1}{2})(x-t)\right\}}{2\sin\left\{\frac{1}{2}(x-t)\right\}}. \tag{1.1.9}$$

Corollaire 3.
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left\{(n+\frac{1}{2})t\right\}}{\sin\left\{\frac{1}{2}t\right\}}dt=1. \tag{1.1.10}$$

Q. 1. — Démontrer le théorème et son corollaire.

[Il s'agit de calculer $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos(nu)$. On pourra utiliser $\cos u=\Re(e^{iu})$.]

Théorème 4 (Formule du reste). *On a*
$$S_n(f,x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right]\frac{\sin\left\{(n+\frac{1}{2})t\right\}}{\sin\frac{t}{2}}dt \tag{1.1.11}$$

Q. 2. — Démontrer (1.1.11). On effectuera un changement de variable dans (1.1.8) dans laquelle on remplace $K_n(x,t)$ par l'expression (1.1.9).

1.1.4. *Fonction de Dini.* Le théorème précédent laisse deviner l'importance que la fonction $\Phi=\Phi_{f,x}$ définie par
$$\Phi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$
aura dans l'étude de la convergence de $S_n(f,x)$. Nous appellerons cette fonction Φ la **fonction de Dini** de f pour x. Avec cette notation la formule de reste ci-dessus devient
$$S_n(f,x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\Phi(t)\frac{\sin\left\{(n+\frac{1}{2})t\right\}}{\sin\frac{t}{2}}dt \tag{1.1.12}$$

Plus généralement, s'il s'agit de démontrer la convergence de $S_n(f,x)$ vers S, on considèrera Φ^S définie par
$$\Phi^S(t)=f(x+t)+f(x-t)-2S$$
qui donne la formule de reste
$$S_n(f,x)-S=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\Phi^S(t)\frac{\sin\left\{(n+\frac{1}{2})t\right\}}{\sin\frac{t}{2}}dt \tag{1.1.13}$$

1.2. **Convergence.**

1.2.1. *Lemme de Riemann-Lebesgue.*

Théorème 5. *Soit $f \in \mathbf{L}([a,b])$. On a*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt = 0.$$

En particulier les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ d'une fonction f 2π-périodique intégrable tendent vers 0 lorsque n tend vers ∞.

Q. 3. — Démontrer le théorème. On commencera par le cas où f est une fonction constante par morceaux puis on utilisera (en l'admettant) la densité [1] de ces fonctions dans $\mathbf{L}([a,b])$

1.2.2. *Théorème de Dini.* Sous les hypothèses (sur f) et avec les notations précédentes, on a :

Théorème 6 (Dini). *S'il existe $\delta > 0$ tel que $\frac{\Phi(t)}{t}$ soit intégrable sur $[0,\delta]$ alors $S_n(f,x)$ converge vers $f(x)$.*

Plus généralement, posant

$$\Phi^S(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S,$$

la suite $S_n(f,x)$ converge vers S dès lors que $\frac{\Phi^S(t)}{t}$ est intégrable sur un intervalle $[0,\delta]$ avec $\delta \in]0,\pi[$.

Q. 4. — Démontrer le théorème de Dini. On partira de la formule d'erreur dans laquelle on découpera l'intervalle en deux sous intervalles $[0,\delta]$ et $[\delta,\pi]$ et sur chacun de ces deux sous-intervalles on appliquera convenablement le lemme de Riemann-Lebesgue.

Corollaire 7. *Si f vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ au voisinage de x alors $S_n(f,x)$ converge vers $f(x)$.*

Q. 5. — Démontrer le corollaire.

Rappel. Dire que f vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ au voisinage de x signifie qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(t,t') \in [x-\eta, x+\eta]$ on a $|f(t)-f(t')| \leq K.|t-t'|^\alpha$.

Corollaire 8. *Si $\frac{\Phi^S(t)}{t}$ est bornée au voisinage de 0 alors $S_n(f,x)$ converge vers S.*

1.2.3. *Le critère de Dirichlet.* On note, lorsque les limites existent,

$$f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x).$$

Lorsque ces limites existent mais sont différentes on dit que f a une **discontinuité de première espèce** en x_0. On dit ensuite que f admet des **dérivées généralisées** à gauche ($f_g(x_0^-)$) et à droite ($f_d(x_0^+)$) en x_0 lorsque les limites suivantes existent

$$f_g(x_0^-) = \lim_{h\to 0, h<0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0^-)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0}\frac{f(x_0^-)-f(x_0-h)}{h}$$

et

$$f_d(x_0^+) = \lim_{h\to 0, h>0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0^+)}{h}.$$

Corollaire 9 (Critère de Dirichlet). *Si f admet des dérivées généralisées à droite et à gauche en x_0 alors $S_n(f,x_0)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x_0^+)+f(x_0^-))$.*

---

1. Cela signifie que quels que soient $f \in \mathbf{L}[a,b]$ et $\epsilon > 0$, il existe une fonction constante par morceaux g telle que $\int_a^b |f(t)-g(t)|dt \leq \epsilon$.

Q. 6. — (Exemples)

Etablir les formules suivantes en appliquant le théorème de Dirichlet à des fonctions correctement choisies.

(1) Pour $x \in [-\pi,\pi]$,
$$(\pi - |x|)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(nx).$$
En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(2) Pour $x \in]0,2\pi[$ et $a \in \mathbb{R}^\star$ on a
$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left\{\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\cos nx - n\sin nx}{a^2+n^2}\right\}.$$
Que dire pour $x = 0$?

(3) Pour $x \in]0,\pi[$ et $a \in \mathbb{R}^\star$ on a
$$e^{ax} = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n e^{a\pi} - 1\}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}.$$
Que dire pour $x = 0$?

(4) Pour $x \in]0,\pi[$ et $a \in \mathbb{R}^\star$ on a
$$e^{ax} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{1-(-1)^n e^{a\pi}\}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}.$$
Que dire pour $x = 0$?

(5) On utilise la notation $[x]$ pour désigner la partie entière du réel x. Montrer que pour tout x non entier on a
$$[x] - x + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

2. Application au problème de Dirichlet

2.1. **Enoncé du problème.** On rappelle que $C(0,1)$ (respectivement, $D(0,1)$) désigne le cercle unité (respectivement, le disque unité) dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ i.e.
$$C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 = 1\} \tag{2.1.1}$$
$$\text{et}\quad D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 < 1\}. \tag{2.1.2}$$
Etant donnée une fonction continue f_0 sur $C(0,1)$, le problème consiste à trouver une fonction f continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,1)$ telle que
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{sur}\quad D(0,1) \\ \qquad f &= f_0 \quad \text{sur}\quad C(0,1) \end{cases} \qquad \text{(Problème de Dirichlet)}$$
La première équation dit que la fonction f doit être *harmonique* sur le disque ouvert. Nous admettrons que le problème de Dirichlet admet toujours une solution unique.

2.2. **Solution du problème de Dirichlet.** On définit $F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique continue telle que $F_0(\theta) = f_0(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème 10. *Si F_0 est développable en série de Fourier i.e.*
$$F_0(\theta) = \frac{1}{2}a_0(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F_0)\cos(n\theta) + b_n(F_0)\sin(n\theta) \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$
avec
$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(F_0)| + |b_n(F_0)|) < \infty \tag{2.2.1}$$

alors l'unique solution du problème de Dirichlet est la fonction f définie sur $\overline{D}(0,1)$ *par*

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta) = \frac{1}{2}a_0(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n(F_0)\cos(n\theta) + b_n(F_0)\sin(n\theta)\right\} r^n. \qquad (2.2.2)$$

L'hypothèse (2.2.1) est forte puisqu'elle implique que la série de Fourier de F_0 est normalement convergente. On trouvera dans la partie 4.2 des conditions raisonnables pour qu'une fonction f la satisfasse.

Q. 7. — Soit $f \in \mathbf{C}^2(D(0,1))$. On définit g sur $\Omega :=]-1,1[\times\mathbb{R}$ par

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Montrer que $g \in \mathbf{C}^2(\Omega)$ et que pour $D(0,1) \ni (x_0,y_0) = (r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)$ et on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = 0 \qquad (2.2.3)$$

$$\iff \quad r_0^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r_0,\theta_0) + r_0\frac{\partial g}{\partial r}(r_0,\theta_0) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r_0,\theta_0) = 0 \qquad (2.2.4)$$

Q. 8. — Vérifier que la série définie par le terme de droite dans (2.2.2) converge vers une fonction continue sur $\overline{D}(0,1)$ et que sa limite est solution du problème de Dirichlet.

3. La théorie de Fejer

3.1. **Moyenne de Cesaro.** Etant donnée une suite $u = (u_n)$ de nombres complexes, on appelle **moyenne de Cesaro** de u, la suite $v = (v_n)$ définie par

$$v_n = \frac{v_0 + \cdots + v_{n-1}}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

L'élément v_n est donc la moyenne arithmétique standard des n premiers termes (quand on commence à $n = 0$) de la suite u. On démontre facilement que *lorsque u converge vers l alors v converge aussi vers l* mais il peut arriver que v ait une limite t sans que u soit convergente (trouver un exemple). On dit alors que u converge *au sens de Cesaro* — on dit aussi que u converge C1 — vers t. On doit au mathématicien hongrois Fejer le résultat remarquable que pour toute fonction f continue 2π périodique, la suite $S_n(f,x)$ converge C1 vers $f(x)$.

On notera

$$\sigma_n(f,x) = \frac{S_0(f,x) + \cdots + S_{n-1}(f,x)}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}) \qquad (3.1.1)$$

3.1.1. *Formule de FeFjer.* On appelle n-ième **noyau de Fejer** la fonction de deux variables x et t définie par

$$F_n(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} K_j(x,t). \qquad (3.1.2)$$

Il découle alors de (3.1.1) et de la formule intégrale pour $S_j(f)$, voir (1.1.8), que

$$\sigma_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x,t)f(t)dt. \qquad (3.1.3)$$

Théorème 11 (Expression du noyau de Fejer).

$$F_n(x,t) = \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2\left\{\frac{n}{2}(x-t)\right\}}{\sin^2\left\{\frac{x-t}{2}\right\}} \qquad (3.1.4)$$

Q. 9. — Démontrer le théorème.

[Il s'agit de calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\{(k+\frac{1}{2})u\}$. On pourra utiliser $\sin u = \Im(e^{iu})$.]

Théorème 12 (Intégrale du noyau de Fejer).

$$\frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin^2(\frac{t}{2})}dt = 1. \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.1.5}$$

Q. 10. — Démontrer le théorème. [Se déduit immédiatement de (1.1.10).]

Théorème 13 (Formule du reste). *On a*

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin^2\left\{\frac{nt}{2}\right\}}{\sin^2\left\{\frac{t}{2}\right\}}dt \tag{3.1.6}$$

En employant la fonction $\Phi_{f,x}$ de Dini, la formule de reste est

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} \Phi_{f,x}(t)\frac{\sin^2\left\{\frac{nt}{2}\right\}}{\sin^2\left\{\frac{t}{2}\right\}}dt \tag{3.1.7}$$

Q. 11. — Démontrer (3.1.6).

3.2. **Le théorème de Fejer.** Il affirme que $S_n(f,x)$ converge C1 vers $f(x)$ pour toute fonction continue et que la convergence est uniforme. En d'autres mots

Théorème 14 (Fejer, 1904). *Soit $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R})$, 2π périodique. La suite de fonctions $\sigma_n(f,.)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Q. 12. — (Démonstration)
Fixons $\epsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ on a

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| \leq \epsilon \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ce qui montrera la convergence uniforme annoncée.

(1) Montrer qu'il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que

$$t \in [0,\delta] \Rightarrow |\Phi_{f,x}(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

[On utilisera l'uniforme continuité de f.]

(2) Nous travaillons maintenant avec le δ trouvé dans la question précédente. Montrer que

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_{f,x}(t)\frac{\sin^2\left\{\frac{nt}{2}\right\}}{\sin^2\left\{\frac{t}{2}\right\}}dt\right| \leq 4\sup_{[0,2\pi]}|f|.\frac{1}{2n\sin^2(\delta/2)} \qquad (x \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}).$$

(3) Conclure la démonstration : prouver l'existence du $n_0(\epsilon)$.

Q. 13. — En adaptant la démonstration précédente démontrer le

Théorème 15. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$, 2π périodique, intégrable sur $[0,2\pi]$). Si f est continue en x_0 (respectivement, admet une discontinuité de première espèce en x_0) alors $\sigma_n(f,x_0)$ converge vers $f(x_0)$ (respectivement, vers $\frac{1}{2}\{f(x_0^+)+f(x_0^-)\}$).*

4. Application du théorème de Fejer

4.1. **Densité des polynômes trigonométriques.** Notons $\mathbf{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. C'est un espace vectoriel, et lorsque on le munit de sa norme naturelle $||f|| := \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|$ il devient un espace de Banach [2] On appelle **polynôme trigonométrique** de degré n toute fonction de la forme

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \cos(jx) + \beta_j \sin(jx)$$

où les coefficients α_j et β_j sont des nombres réels. L'ensemble Π des polynômes trigonométriques est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Théorème 16. *L'espace Π est dense dans $\mathbf{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Autrement dit, toute fonction continue 2π-périodique f est la limite d'une suite uniformément convergente (sur $\mathbb{R}$) de polynômes trigonométriques.*

Q. 14. — Démontrer le théorème.

Q. 15. — Soit $f \in \mathbf{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p tel que $f \leq p \leq f + \epsilon$ sur $\mathbb{R}$. En d'autres mots, toute fonction continue peut être uniformément approchée "par valeurs supérieures" par un polynôme trigonométrique.

4.2. **Applications.**

Théorème 17. *Soient f et g deux fonctions dans $\mathbf{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Si tous les coefficients de Fourier de f et de g coincident alors $f = g$.*

Corollaire 18. *Si la série de Fourier de $f \in \mathbf{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors sa limite est forcément égale à f.*

Corollaire 19. *Si $f \in \mathbf{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si sa dérivée f' vérifie une condition de Lipschitz d'ordre α avec $\alpha > 0$ alors $S_n(f,x)$ converge uniformément (et même normalement) vers f sur $\mathbb{R}$.*

Q. 16. — Démontrer le théorème et ses corollaires. Pour le second corollaire, on montrera, en effectuant une intégration par partie dans les formules donnant $a_n(f)$ et $b_n(f)$, que l'hypothèse sur f implique que le terme général de la série de Fourier de f est dominé, en valeur absolue, par le terme général d'une série de Riemann convergente. Précisément, on commencera par établir que

$$a_n(f) = -\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx$$

puis que

$$a_n(f) = +\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x + \pi/n) \sin(nx) dx.$$

Q. 17. — Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $0 \leq r < 1$ on a le développement de Fourier

$$\frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\theta).$$

---

2. On le démontre directement ou bien en remarquant que c'est un sous-espace fermé de l'espace de Banach des fonctions continues bornée sur $\mathbb{R}$.

4.3. **Application à la démonstration du théorème de Weirstrass.**

Théorème 20. *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est la limite d'une suite uniformément convergente de polynômes.*

Q. 18. — (Démonstration)

(1) Montrer qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $[a,b] = [-1,1]$.
(2) Soit $f \in \mathbf{C}[-1,1]$. Construire une suite de polynômes qui converge uniformément vers f à partir d'une suite de polynômes trigonométriques qui converge vers $f \circ \cos \in \mathbf{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

5. Théorie $\mathbf{L}^2$ des séries de Fourier

5.1. **L'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2$.** L'espace des fonctions (réelles ou complexes) de carré intégrable sur $[0,2\pi]$ i.e. $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f,g) := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$. En réalité, les éléments de cet ensemble ne sont pas des fonctions mais des classes d'équivalence de fonctions produites par la relation d'équivalence $\Re$ définie par $f \Re g$ si $f - g = 0$ sur $[0,2\pi]$ excepté sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Toute fonction f de carré intégrable est intégrable sur $[0,2\pi]$, on peut donc considérer sa série de Fourier.

5.2. **Séries de Fourier comme projections orthogonales.** Une famille $\mathcal{F}$ (de vecteurs non nuls) d'un espace de Hilbert H est *orthogonale* lorsque on a $(f,g) = 0$ quels que soient $f \neq g$ dans $\mathcal{F}$. On dit qu'un famille orthogonale est *complète* lorsque l'espace vectoriel $V(\mathcal{F})$ engendré par la famille $\mathcal{F}$ est dense dans H.

Q. 19. — Montrer que la famille $\mathcal{T} := \{x \to \cos(nx), n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \to \sin(nx), n \in \mathbb{N}^\star\}$ est un famille orthogonale complète de $\mathbf{L}^2[0,2\pi]$.

(Pour la complétude, on pourra utiliser (en l'admettant) que l'espace des fonctions continues est dense dans $\mathbf{L}^2[0,2\pi]$.)

Q. 20. — Soit $f \in \mathbf{L}^2[0,2\pi]$.

(1) Montrer que $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur l'espace Π_n formé des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n (de sorte que
$$\|f - S_n(f)\| = \inf_{s\in\Pi_n} \|f - s\| \,.$$
(2) En déduire que $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = f$ dans $\mathbf{L}^2[0,2\pi]$. On prendra garde que cette convergence est bien différente d'une convergence uniforme (ou même simple) d'une suite de fonctions.
(3) En déduire *l'égalité de Parseval* qui affirme que pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^2[0,2\pi]$ on a
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Q. 21. — Soit $\delta \in]0,\pi[$.

(1) Montrer en considérant la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = 1$ si $|x| \le \delta$ et $f(x) = 0$ si $\delta < |x| \le \pi$ l'identité suivante
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}.$$
(2) Déduire ensuite de l'inégalité de Parseval
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi - \delta}{2}.$$

(3) Déduire enfin en faisant $\delta \to \infty$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Laboratoire de Mathématiques E. Picard, Université Paul Sabatier 31062 Toulouse Cedex FRANCE.

E-mail address: calvi@picard.ups-tlse.fr