THÈMES D'ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN-PAUL CALVI

On donne une présentation très sommaire de questions fondamentales d'analyse numérique. Dans certains cas (par exemple celui de la résolution des équations différentielles), l'étudiant ne pourra se faire au mieux qu'une idée vague des principes sur lesquels se fondent le développement du sujet. Les questions d'algèbre linéaire ne sont pas abordées.

1. Calcul des Polynômes

1.1. **Algorithme de Hörner.** Il permet de calculer la valeur d'un polynôme P en $x = c$ ainsi que le quotient de sa division par $(x - c)$ à partir de ses coefficients.

Soit $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{K}$. On définit la suite b_k, $k = 0, \ldots, n$ par les relations :

$$\begin{cases} b_0 &= \quad a_0 \\ b_k &= \quad c\,b_{k-1} + a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \qquad \text{(Schéma de Hörner)}$$

Théorème 1.1.

$$P(X) = (X - c)(b_0X^{n-1} + b_1X^{n-2} + \cdots + b_{n-2}X + b_{n-1}) + b_n.$$

En particulier, $P(c) = b_n$.

Q. 1 — Démontrer le théorème et calculer le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir le calcul d'une valeur d'un polynôme de degré n.

1.2. **Formule de Taylor.** On rappelle la formule de Taylor pour les polynômes.

Théorème 1.2. *Soit P un polynôme de degré n et $c \in \mathbb{K}$, on a*

$$P(x) = P(c) + P'(c)(x - c) + \frac{P''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Pour obtenir cette formule on dispose d'un algorithme beaucoup plus économique que le passage par le calcul direct des dérivées $f^{(k)}$. L'algorithme est connu sous le nom *d'algorithme de Hörner généralisé*.

Théorème 1.3. *Soit* $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{K}[X]$ *et $c \in \mathbb{K}$. On définit*

$$\begin{cases} P_0(x) &= \quad P(x) \\ P_k(x) &= \quad (x - c)P_{k+1}(x) + P_k(c) \quad (0 \le k \le n) \end{cases} \qquad \text{(Sch. de Hörner gén.)}$$

On a

$$P_j(c) = \frac{P^{(j)}(c)}{j!} \quad (0 \le j \le n).$$

Q. 2 — Démontrer le théorème et calculer le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir les $n + 1$ coefficients de la formule de Taylor pour un polynôme de degré n.

[idée : on a $P_k(x) = \sum_{j=k}^{n} \frac{P^{(j)}(c)}{j!}(x - c)^j$.]

Date: 3 décembre 2005.

Préparation au concours interne de l'agrégation de mathématique.

2. Zéros des polynômes

On rappelle que tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet, tenant compte de la multiplicité, n racines complexes (théorème de d'Alembert-Gauss).

2.1. **L'impasse de la recherche des formules explicites.** Les anciens mathématiciens portèrent leurs efforts sur la recherche de formules "explicites" donnant les racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients[1]. Le premier résultat, exprimant les racines d'un trinôme du second degré, était déjà connu des mathématiciens grecs, et dans certains cas, des babyloniens. C'est le résultat le plus important — le seul vraiment utile. Les mathématiciens cherchèrent longtemps des formules analogues pour les racines des équations de degré supérieur. À la Renaissance (16-ième siècle), l'école des algébristes italiens (*Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli*) résolut le problème pour les équations de degré 3 et, peu après, pour celles de degré 4. Il semble que Tartaglia trouva la solution en 1535, la montra à son collègue Cardan qui la publia, contre sa volonté, dans son ouvrage *Ars Magna* en 1545, sans toutefois s'en attribuer la paternité. L'histoire a retenu le nom de Cardan plutôt que celui de Tartaglia.

Les deux exercices qui suivent étudient ces méthodes en les présentant sous une forme moderne. Ils sont une bonne illustration de la virtuosité calculatoire des algébristes italiens de la Renaissance.

2.1.1. *La méthode de Cardan.* On cherche les racines du polynôme

$$P(y) = y^3 + by^2 + cy + d$$

où b, c et d sont des réels, d étant non nul.

Q. 3 — Montrer, en posant $y = x - \frac{b}{3}$, qu'il suffit d'étudier les polynômes de la forme

$$Q(x) = x^3 + px + q. \tag{2.1}$$

Q. 4 — Nous allons chercher une expression pour les racines (complexes) de Q. Appelons x_0 une quelconque des racines de Q et appelons α et β les deux racines du trinôme $u^2 - x_0 u - \frac{p}{3}$. Montrer que

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 & = & -q \\ \alpha^3\beta^3 & = & -\frac{p^3}{27} \end{cases} \tag{2.2}$$

Q. 5 — En déduire que α^3 et β^3 sont racines d'un trinôme et conclure (en précisant le sens des notations) que

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{2.3}$$

Q. 6 — Obtient-on ainsi toutes les racines de Q ?

2.1.2. *La méthode de Ferrari.* On recherche ici les racines de

$$P(y) = y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d.$$

Q. 7 — Montrer, en faisant un changements de variable approprié, que l'on peut se ramener à rechercher les racines d'un polynôme de la forme

$$Q(x) = x^4 + px^2 + qx + r.$$

---

[1] Les formules recherchées ne devaient faire intervenir que les quatre opérations de base et des fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Q. 8 — Démontrer qu'il existe un nombre α racine d'une équation de degré 3 tel que

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - 2\alpha\left(x - \frac{q}{4\alpha}\right)^2$$

Q. 9 — Expliquer comment on peut en déduire des formules explicites pour les racines de f.

Commentaire. Ces résultats furent considérés au moment de leur découverte comme un sommet de la connaissance scientifique. On réalisa cependant très vite leur inutilité (mais il fallut quelques siècles pour qu'on cesse de les enseigner). Pour appliquer les formules de Cardan, il faut extraire deux racines triples de nombres définis par des racines carrées. On ne peut rien faire d'autre que d'en donner des valeurs approchées. Et s'il s'agit d'avoir des valeurs approchées, des algorithmes "directs" donnent des résultats bien meilleurs. Il restait toutefois le problème de mathématiques pures de savoir s'il existait des formules, fussent-elles "incalculables", pour les racines d'un polynôme quelconque de degré plus grand que 4. La réponse — négative — ne fut pas établie avant le dix-neuvième siècle. Elle est due à Abel (1802-1829) et Galois (1811-1832). Ces résultats font appel à des résultats profonds de théorie des corps et de théorie des groupes et sont difficiles à établir.

2.2. **Localisation des zéros.**

Théorème 2.1. *Toutes les racines du polynôme* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *ont un module moindre que*

$$1 + \frac{\max\{|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|\}}{|a_n|}.$$

Q. 10 — Démontrer le thèoréme.

[Ind. On montrera d'abord que $|p(z)| \geq |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0|$ et on majorera le terme derrière le "$-$".]

Q. 11 — Dans le cas où $a_n \neq 0$, trouver une borne inférieure pour les modules des zéros en considérant le polynôme $\widetilde{p}(z) = z^n p\left(\frac{1}{z}\right)$.

2.3. **Le théorème de Budan-Fourier.**

2.3.1. *Changements de signes.* Etant donnée une suite de nombres réels *non nuls*

$$t = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

on dit que t admet k *changements de signe* s'il existe k couples de la forme $(j, j+1)$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ tels que le signe de t_j soit diffèrent du signe de t_{j+1}. Par exemple la suite

$$1, -3, 2, 2, -5, -1, 1, -4, -8$$

admet 5 changements de signes. (Il est commode de faire correspondre la suite de signes (ici on a numéroté les 5 changements)

$$+^1 \ -^2 \ + \ +^3 \ - \ -^4 \ +^5 \ - \ -$$

Si $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[X]$ alors $L(f)$ désignera le nombre de changements de signes dans la liste des coefficients une fois que l'on a supprimé les coefficients nuls. Par exemple, si $f(X) = 2X^4 - X^3 + 5X + 1$ alors $L(f) = 2$.

2.3.2. *Le théorème de Budan-Fourier.*

Théorème 2.2. *Soit f un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles. Le nombre $m(f)$ des racines strictement positives de f est, en tenant compte de la multiplicité, égal à $L(f)$.*

Q. 12 — Admettant pour le moment le théorème, vérifier le corollaire suivant.

Théorème 2.3. *Sous les mêmes hypothèses sur f, le nombre des racines de f comprises (strictement) entre a et b ($a < b$) est égal à $L(f_a) - L(f_b)$ ou $f_a(X) = f(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} X^k$ et $f_b(X) = f(X+b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} X^k$.*

2.3.3. *Démonstration du théorème de Budan-Fourier.* Nous supposerons sans perte de généralité que *le coefficient a_0 de f est strictement positif.* La démonstration s'effectuera par récurrence sur le degré du polynôme.

Q. 13 — Démontrer qu'on a toujours $m(f') = m(f)$ ou bien $m(f') = m(f) - 1$. On notera $\delta(f) \in \{0, 1\}$ le nombre tel que $m(f) = m(f') + \delta(f)$.

Q. 14 — Soit un polynôme dont toutes les racines sont réelles. Montrer que si 0 est une racine d'ordre $\gamma \geq 0$ de g alors

$$(-1)^{m(f)} a_{n-\gamma} > 0. \tag{2.4}$$

[Ind. On écrit $f(X) = X^{\gamma}(X - c_1)(X - c_2) \dots (X - c_m)(a_0 X^j + \cdots + b)$ où les c_i sont les racines strictement positives. Montrer que $b > 0$ puis utiliser une expression de $a_{n-\gamma}$ faisant intervenir b.]

Q. 15 — Vérifier le théorème lorsque $n = 1$.

On suppose le théorème vrai pour tous les polynômes de degré $< n$ et on le montre pour f de degré n. On appelle γ la multiplicité de 0 comme racine de f (de sorte que si $f(0) \neq 0$ alors $\gamma = 0$).

Q. 16 — On suppose que $\gamma > 0$. Montrer directement que $m(f) = L(f)$.
[Ind. On écrit $f(X) = X f_1(X)$ et on applique l'hypothèse de récurrence à f_1.]

A partir de maintenant, on suppose $\gamma = 0$.

Q. 17 — Posons $f'(X) = n a_0 X^{n-1} + \cdots + \mu a_{n-\mu} X^{\mu-1}$ avec $a_{n-\mu} \neq 0$. Montrer que $L(f) = L(f') + \epsilon(f)$ avec $\epsilon(f) \in \{0, 1\}$. A quelle(s) condition(s) a-t-on $\epsilon(f) = 0$, $\epsilon(f) = 1$?

Q. 18 — Montrer, en utilisant (2.4) pour $g = f$ puis $g = f'$ que $\delta(f) = \epsilon(f)$. En déduire $m(f) = L(f)$.

2.4. **La théorie de Sturm.**

2.4.1. *Son objet.* Le théorème de Sturm fournit un *algorithme* remarquable pour compter le nombre de zéros réels d'un polynôme sans racine multiple dans un intervalle $[a, b]$ donné.

Q. 19 — Soit p un polynôme non nul à coefficients réels. Déterminer, par un raisonnement algébrique un polynôme q à coefficients réels tels que

(1) q n'ait que des racines simples.
(2) p et q ont les mêmes racines.

À PARTIR DE MAINTENANT, ET DANS TOUTE LA SUITE, TOUS LES POLYNÔMES CONSIDÉRÉS SONT À COEFFICIENTS RÉELS ET N'ONT QUE DES RACINES SIMPLES.

Q. 20 — Soit f un tel polynôme. Montrer que si α est un zéro réel de f alors il existe un intervalle I de centre α tel que le polynôme $f(x)f'(x)$ soit négatif pour $x \in I, x < \alpha$ et positif pour $x \in I, x > \alpha$.

2.4.2. *Suites de Sturm.* On pose

$$\begin{cases} f_0(x) &= f(x) \\ f_1(x) &= f'(x) \\ f_{k+1} &= -R(f_{k-1}/f_k) \quad (k \geq 1) \end{cases} \qquad \text{(Schéma de Sturm).}$$

Par $R(f/g)$ on désigne le reste de la division euclidienne de f par g.

2.4.3. *Etude de la suite* (f_k). **Q. 21** — Déterminer la suite f_k lorsque $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

Q. 22 — Montrer qu'il existe $s \geq 1$ tel que f_s soit une constante non nulle.

[Ind. On montrera que les f_j sont dans l'idéal engendré par f_0 et f_1 et on utilisera le fait que f_0 et f_1 sont premiers entre eux.]

Q. 23 — Montrer que deux polynômes consécutifs dans la suite de Sturm de f ne peuvent pas avoir un zéro commun.

Q. 24 — Montrer que si pour un indice k compris entre 1 et s, α est un zéro de f_k alors $f_{k-1}(\alpha)$ et $f_{k+1}(\alpha)$ sont de signes opposés.

Définition 2.1. *La suite $f, f_1, \dots f_s$ s'appelle la suite de Sturm de f.*

2.4.4. *Changements de signes.* Si a n'est pas un zéro de f alors on appelle $W(a)$ le nombre de changements de signes de la suite $(f_0(a), f_1(a), \dots, f_s(a))$ une fois qu'on a enlevé tous les termes nuls. Par exemple, si

$$(f_j(\alpha))_{0 \leq j \leq s} = (1, 2, 0, -5, 4, 0, 1)$$

alors on considère la suite

$$1, 2, -5, 4, 1$$

et on obtient $W(\alpha) = 2$.

2.4.5. *Le théorème de Sturm.*

Théorème 2.4. *Soit f est un polynôme à coefficients réels n'ayant ques des racines simples. Si $a < b$ ne sont pas des zéros de f alors f possède exactement $W(a) - W(b)$ zéros dans l'intervalle $]a, b[$.*

Nous allons étudier la fonction $x \to W(x)$. On devra utiliser les propriétés de la suite de Sturm de f établies précédemment

Q. 25 — Montrer que si $I = [x, x+h]$ est un intervalle qui ne contient pas de zéros d'un f_k alors W est constante égale à $W(x)$ sur I. (Que dire du signe des f_k ?)

Q. 26 — Maintenant nous considérons le cas où $I = [x, x+h]$ contient un zéro α et un seul d'un (au moins) des polynômes de la suite de Sturm.

a) Supposons que α ne soit pas racine de $f = f_0$. Montrer que W reste constante égale à $W(x)$ sur I.

[Ind. Notez d'abord que α peut être un zéro de deux (ou davantage) polynômes différents. Mais nous sommes sûrs que si α est racine de f_k alors il ne sera racine ni de f_{k-1} ni de f_{k+1}. Supposons pour fixer les idées que α soit racine de f_{k_1} et f_{k_2} avec $0 < k_1 < k_2 - 1$. Voyons un cas de figure, on devra étudier les autres. Si, pour $x < y < \alpha$, la suite de signe de $f_k(y)$ est de la forme

$$\epsilon_0 \dots \epsilon_{k_1-2} - - + \epsilon_{k_1+2} \dots \epsilon_{k_2-2} - + + \epsilon_{k_2+2} \dots \epsilon_s$$

où les ϵ_j sont des symboles + ou − alors elle devient lorsque $\alpha < y < x + h$ de la forme

$$\epsilon_0 \dots \epsilon_{k_1-2} - + + \epsilon_{k_1+2} \dots \epsilon_{k_2-2} - - + \epsilon_{k_2+2} \dots \epsilon_s$$

de sorte que le changement de signe ne fait que se déplacer.]

b) Montrer que si $I =]x, x+h[$ contient un zéro α de f et aucun zéro des autres f_k alors $W(y) = W(x)$ pour $x < y < \alpha$ et $W(y) = W(x) - 1$ si $\alpha < y < x + h$.

[Ind. S'inspirer de l'indication précédente.]

Q. 27 — Conclure la démonstration du théorème de Sturm et appliquer la méthode pour déterminer le nombre de zéros réels de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Montrer que ces zéros sont dans les intervalles $]-3, -2[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$.

3. Interpolation de Lagrange

3.1. **Formule de Lagrange.** La formule d'interpolation de Lagrange est un outil fondamental de l'analyse numérique. Elle permet de construire un polynôme connaissant ses valeurs en un nombre de points supérieur d'une unité de son degré.

Théorème 3.1. *Soit $X = \{x_0, \dots, x_d\} \subset \mathbb{K}$ un ensemble $d+1$ points distincts et f une fonction definie sur X. Il existe un unique polynôme p de degré d tel que*

$$p(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \dots, d). \tag{3.1}$$

Ce polynôme est donné par :

$$p(x) = f(x_0) \,.\, l_0(x) + f(x_1) \,.\, l_1(x) + \dots + f(x_d) \,.\, l_d(x)$$

avec

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{d} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (i = 0, 1, \dots, d)$$

Définition 3.1. *Le polynôme p ci-dessus s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange. On note L ou $L_X(f)$ ou encore $L[x_0, \dots, x_d; f]$.*

3.2. **Approximation par les polynômes d'interpolation.** Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle fermé borné I et $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $n+1$ points dans I.

Q. 28 — Montrer que pour tout $x \in I$, il existe $\xi = \xi_x$ tel que

$$f(x) - L[x_0, \dots, x_n; f](x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n). \tag{3.2}$$

[Ind. Fixons $x \in I$, $x \neq x_i$ $(i = 0, \dots, n)$ et écrivons L_n pour $L[x_0, \dots, x_n; f]$ et $\pi_n(x)$ pour $(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$. Montrer qu'il existe une constante $k = k_x$ telle que $f(x) - L_n(x) - k\pi_n(x) = 0$. Montrer ensuite que cette constante est de la forme cherchée en appliquant convenablement le théorème de Rolle à la fonction $u(t) = f(t) - L_n(t) - k\pi_n(t)$.]

Q. 29 — En déduire que

$$||f - L[x_0, \dots, x_n; f]|| \leq \frac{1}{n+1!}||f^{n+1}||.||\pi_n|| \tag{3.3}$$

où $||.||$ désigne la norme sup ordinaire sur I. En déduire une majoration pour $f(x)$ lorsqu'on sait que $f(x_i) = 0$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

La formule d'erreur ci-dessus montre que si on ne connaît pas d'information particulière sur f, à part d'être de classe C^{n+1}, on aura tout intérêt à choisir comme points d'interpolations les points x_i pour lesquels la norme $||\pi_n||$ sera la plus petite possible. Ces points sont connus.

Rappelons que le $n+1$-ième polynôme de Chebyshev est défini par

$$T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta \qquad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Théorème 3.2. *Lorsque $I = [-1, 1]$, la norme $||\pi_n||$ est minimale si et seulement si X est l'ensemble des racines de T_{n+1} c'est-à-dire*

$$X = \left\{\cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right), i = 0, 1, \dots, n\right\} \tag{3.4}$$

Q. 30 — Calculer $||T_{n+1}||$ et montrer que le supremum est atteint en $n+2$ points que l'on précisera. On appelle (x_k) la suite de ces points rangés par ordre décroissant.

Q. 31 — Déterminer c_{n+1}, le coefficient dominant de T_{n+1}. On notera $t_{n+1} = c_{n+1}^{-1} T_{n+1}$.

Posons

$$b_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

et, pour simplifier, $t = t_{n+1}$, de sorte que

$$t(x) = (x - b_0)(x - b_1)\ldots(x - b_n).$$

Supposons que $A = \{a_0, \ldots, a_n\} \subset [-1, 1]$ satisfasse

$$||p|| \leq ||t||, \tag{3.5}$$

où $p(x) = (x - a_0)\ldots(x - a_n)$, nous voulons établir que p doit être égal à t.

Q. 32 — Montrer que $|p(x_k)| \leq |t(x_k)|$ puis $(-1)^k(p - t)(x_k) \leq 0$ et $(-1)^k(p - t)(x_{k+1}) \geq 0$.

Q. 33 — En déduire qu'une des deux alternatives suivantes doit se produire. Ou bien il existe k_0 tel que $p - t$ soit constant sur $[m_{k_0}, m_{k_0+1}]$ ou bien pour tout $k \in \{0, \ldots, d\}$ il existe $\xi_k \in]m_k, m_{k+1}[$ tel que $(-1)^k(p-t)'(\xi_k) > 0$. Conclure dans les deux cas que $p = t$.

On pourra retenir que les points de Chebyshev sont (quasiment) les meilleurs points pour l'interpolation de Lagrange dans $[-1, 1]$.

4. Calcul approché des solutions d'équations $f(x) = 0$

4.1. **Idée générale.** On remplace l'équation $f(x) = 0$ — dont on suppose qu'elle a toujours, dans l'intervalle considéré $[a, b]$, une seule racine — par une équation $L(x) = 0$ qui se résoud facilement et dont la racine peut être espérée assez proche de celle de f. Il y a très peu de choix : nous prendrons pour L une fonction polynôme de degré 1, autrement dit une fonction affine. Pour que la racine de L soit proche de la racine de f, il est naturel de prendre un polynôme proche de f. Il y a essentiellement deux possibilités :

- L est un polynôme de Taylor
- L est un polynôme d'interpolation de Lagrange.

L'élaboration de cette idée conduit, dans le premier cas, à la méthode de Newton et dans le second à celle de la sécante.

4.2. **La méthode de Newton.** On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ telle que f' et f'' sont (strictement) positives sur $[a, b]$. On suppose que $f(b) > 0$, $f(a) < 0$ et on appelle r l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a, b]$. On définit par récurrence la suite*

$$\begin{cases} x_0 & = & b \\ x_{n+1} & = & x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geq 0) \end{cases} \qquad \text{(Schéma de Newton).}$$

La suite (x_n) est bien définie. Elle décroît vers r et on a l'estimation

$$|x_n - r| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - r)^2$$

où $M_2 = \sup_{[a,b]} f''$ et $m_1 = \inf_{[a,b]} f'$.

Q. 34 — Démontrer le théorème. On établira, par récurrence sur n, que $a \le r < x_{n+1} < x_n \le b$ ($n \in N^\star$). On remarquera que

$$x_{n+1} - r = x_n - r - \frac{f(x_n) - f(r)}{f'(x_n)}.$$

4.2.1. *La méthode de Newton modifiée.* Lorsque, sous les mêmes hypothèses, il est difficile de calculer les dérivées de f' (ou lorsque leurs valeurs absolues sont trop petites) on remplace parfois le schéma de Newton par :

$$\begin{cases} x_0 &= & b \\ x_{n+1} &= & x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad (n \ge 1) \end{cases} \qquad \text{(SCH. DE NEWTON MODIFIÉ).}$$

Montrer que la suite est bien définie et qu'elle converge vers r.

Q. 35 — Donner une version du théorème 4.1 dans lequel la fonction f est croissante mais concave, décroissante convexe, décroissante et concave.

Q. 36 — Deux exemples. Montrer les deux schémas suivants sont des exemples de schéma de Newton et établir directement la convergence.

4.2.2. *Calcul de l'inverse.* Soit $w > 0$. On prend a tel que $0 < wa < 1$. On définit la suite (x_n) par

$$\begin{cases} x_0 &= & a \\ x_{n+1} &= & x_n(2 - wx_n) \quad (n \ge 1) \end{cases} \qquad \text{(APPROX. DE L'INVERSE).}$$

La suite (x_n) converge vers $1/w$.

Commentaire. L'addition (et la soustraction) et la multiplication sont les seules calculs que l'on sache (exactement) effectuer (disons dans l'anneau des décimaux). La méthode qui précède permet de calculer l'inverse d'un nombre en utilisant seulement ces deux opérations.

4.2.3. *Calcul de la racine carrée.* Soit $w > 0$ et $a > 0$. On définit la suite (x_n) (connue comme le schéma de Héron d'Alexandrie) par

$$\begin{cases} x_0 &= & a \\ x_{n+1} &= & \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{w}{x_n}\right) \quad (n \ge 1) \end{cases} \qquad \text{(APPROX. DE LA RACINE CARRÉE).}$$

La suite (x_n) converge vers $\sqrt{w}$.

4.3. **La méthode de la sécante.**

Théorème 4.2. *Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ telle que f' et f'' sont (strictement) positives sur $[a,b]$. On suppose que $f(b) > 0$, $f(a) < 0$ et on appelle r l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a,b]$. On définit par récurrence la suite*

$$\begin{cases} x_0 &= & a \\ x_{n+1} &= & \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad (n \ge 0) \end{cases} \qquad \text{(SCHÉMA DE LA SÉCANTE).}$$

La suite (x_n) est bien définie et elle croit vers r. On a en outre l'estimation

$$|x_{n+1} - r| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_{n+1} - x_n)(b - x_{n+1})$$

où $M_2 = \sup_{[a,b]} f''$ et $m_1 = \inf_{[a,b]} f'$.

Q. 37 — Démontrer le théorème. On établira par récurrence sur n que $a < x_n \leq x_{n+1} < r < b$. On pourra montrer qu'il existe $\theta_n \in [x_n, r]$ tel

$$x_n - r = \frac{f(x_n) - L[x_{n-1}, b; f](x_n)}{f'(\theta_n)}$$

puis appliquer la formule (3.2).

4.4. **Méthode combinée.** Avec les mêmes hypothèses des deux théorèmes précédents (Th. 4.1, 4.2), pour obtenir la racine r disons avec une précision de k décimales on construit la suite $(\overline{x}_n)$ fournie par la méthode de la sécante et la suite (x_n) fournie par la méthode de Newton. On sait que $\overline{x}_n$ croit vers r tandis que que (x_n) décroit vers r. Lorsque les k premières décimales de x_n et $\overline{x}_n$ coincident ce sont celles de r.

4.5. **Un test d'arrêt.** Nous nous plaçons toujours dans les mêmes hypothèses que ci-dessus. La règle suivante (fausse en général) est souvent employée comme test d'arrêt dans la méthode de Newton.
La précision ϵ est obtenue, ie $|x_n - r| < \epsilon$, dès que l'on a $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$.

Q. 38 — Démontrer que cette méthode est correcte à condition que $|x_n - x_{n-1}|$ soit assez petit. Précisément, montrer que si

$$\frac{M_2}{2m_1}|x_n - x_{n-1}| < 1$$

alors $|x_n - r| < |x_n - x_{n-1}|$.

5. Calcul approché des intégrales

5.1. **Idée générale.** Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, l'emploi d'un primitive est généralement impossible et lorsque une primitive est disponible, elle est souvent numériquement inexploitable. Là encore, la démarche la plus naturelle est de remplacer f par une fonction facilement intégrable. Les cas les plus classiques consistent à prendre un polynôme d'interpolation de degré 0, 1 ou 2. La méthode peut paraître grossière mais une excellente précision est obtenue si on découpe préalablement l'intervalle $[a, b]$ en un grand nombre de petits intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ sur lesquels on applique les méthodes à peine décrites.

5.2. **Méthode des rectangles (point milieu).**

Théorème 5.1. *Soit $f \in C^2([a, b])$. On a*

$$\left| \int_a^b f(t)dt - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} . \sup_{[a,b]} |f^{(2)}|.$$

5.3. **Méthode des trapèzes.**

Théorème 5.2. *Soit $f \in C^2([a, b])$. On a*

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} . \sup_{[a,b]} |f^{(2)}|.$$

5.4. **Méthode de Simpson.**

Théorème 5.3. *Soit $f \in C^4([a, b])$. On a*

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} . \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|.$$

5.5. **Démonstrations.**

Q. 39 — On pose $c := \frac{a+b}{2}$, $a = c - h$ et $b = c + h$ (de sorte que $h = \frac{b-a}{2}$) et on considère

$$\Psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)dx - \frac{t}{3}\{f(c+t) + 4f(c) + f(c-t)\}$$

puis

$$\Phi(t) = \Psi(t) - \left(\frac{t}{h}\right)^5 \Psi(h)$$

Calculer les trois premières dérivées de Φ et montrer qu'il existe $\xi(t) \in [a,b]$ tel que

$$\Phi^{(3)}(t) = \frac{-2t^2}{3}\left\{f^{(4)}(\xi(t)) + \frac{90}{h^5}\Psi(h)\right\}.$$

Q. 40 — Montrer en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle qu'il existe $\bar{t} \in [a,b]$ tel que $\Phi^{(3)}(\bar{t}) = 0$.

Q. 41 — Conclure la démonstration du théorème.

Q. 42 — Démontrer le Théorème 5.2 en s'inspirant de la démonstration précédente. On considèrera

$$\Psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)dx - t\{f(c+t) + f(c-t)\}$$

puis

$$\Phi(t) = \Psi(t) - \left(\frac{t}{h}\right)^3 \Psi(h)$$

Q. 43 — Démontrer le Théorème 5.1.

Commentaire. Les techniques de démonstrations présentées ici sont très artificielles mais elles ont le (seul) mérite de faire revoir et utiliser des techniques fondamentales d'analyse d'une variable réelle (et dans le cas du théorème sur la méthode de Simpson, d'être élémentaire). D'autres preuves seront présentées durant la séance.

5.6. **Combinaisons.**

Q. 44 — Donner les théorèmes d'erreurs obtenus si on découpe l'intervalle $[a,b]$ en $[a,b] = \cup_{i=0}^{n-1}[a_i, a_{i+1}]$ avec $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

6. Introduction aux méthodes d'accélération de la convergence

Etant donnée une suite s_n qui converge vers une limite s, on peut en faisant des hypothèses raisonnables sur s_n, construire, à partir de s_n, une nouvelle suite S_n qui converge plus rapidement (vers la même limite). Il faut noter que ces hypothèses, si elles sont raisonnables sont rarement démontrées dans la pratique et les énoncés qui suivent ne sont que des justifications à posteriori de méthodes empiriques dont la pratique des analystes montre qu'elles sont (souvent) efficaces.

6.1. **Méthode d'Aitken.** On suppose que la suite s_n converge géométriquement vers s, plus précisément, $s_n = s + cq^n + o(q^n) = s + (c + \epsilon_n)q^n$ avec $\epsilon_n \to 0$, $c \neq 0$ et $|q| < 1$.

Q. 45 — On pose

$$A(s_n) = \frac{s_n s_{n+2} - s_{n+1}^2}{s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n}.$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} A(s_n) = s$. (La formule pour $A(s_n)$ provient de la relation

$$\frac{s - s_{n+1}}{s - s_n} \approx q \approx \frac{s - s_{n+2}}{s - s_{n+1}}.)$$

Q. 46 — Montrer que $A(s_n)$ converge vers s plus rapidement que s_n i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(s_n)-s}{s_n-s} = 0.$$

Q. 47 — On suppose maintenant que $\epsilon_n = c_1 q_1^n + o(q_1^n)$, $c_1 \neq 0$, $|q_1| < 1$. Déterminer c' et r tels que $A(s_n) = s + c'r^n + o(r^n)$. Expliquer comment on peut alors itérer le procédé.

6.2. **Méthode de Richardson.** On suppose maintenant que la suite s_n converge vers s comme suit

$$s = s_n + \frac{c_1}{n^{\alpha_1}} + \frac{c_2}{n^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{c_k}{n^{\alpha_k}} + o(\frac{1}{n^{\alpha_k}})$$

où les $0 < \alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i = 0, \ldots, k-1$.

Q. 48 — Soit σ un entier (le plus souvent on prend $\sigma = 2$). On définit

$$R_n^s := \frac{\sigma^{\alpha_1} s_{\sigma n} - s_n}{\sigma^{\alpha_1} - 1}.$$

Montrer que $s - R_n^s = 0(n^{-\alpha_2})$. Expliquer comment on peut itérer le procédé.

Exemple. Si s_n est le nombre trouvé en appliquant la méthode des trapèzes avec n sous-intervalles, il est légitime de supposer $s = s_n + cn^{-2}$ où $s = \int_a^b f(x)dx$ (voir 5.6). En appliquant la méthode de Richardson (avec $\sigma = 2$) on obtient des approximations de meilleure qualité. Un exemple classique (d'un intérêt purement didactique) est $f = \sin(\pi\cdot)$ et $[a,b] = [0,1]$. Appliquant le procédé de Richardson avec $\sigma = 2$ et $n = 4$ on obtient R_4^s qui donne une approximation de s avec une précision aussi grande que celle fournie par s_{128}.

7. Un exemple de calcul approché des valeurs d'une solution d'une équation différentielle

7.1. **Introduction.** Nous voulons donner une idée du fonctionnement des méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles. Nous considèrerons une équation

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) & t \in [0,1] \\ y(0) = \alpha \end{cases} \tag{7.1}$$

Nous supposerons en outre que f est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ et vérifie une inégalité de Lipschitz : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq M|x-y|, \quad t \in [0,1], \quad (x,x') \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Ces conditions impliquent (c'est le théorème de Cauchy Lipschitz) que l'équation différentielle (7.1) admet une et une seule solution Y définie (et dérivable) sur $[0,1]$.

7.2. **Le schéma d'Euler.** Soient, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $0 \leq k \leq n$, $t_k^n = \frac{k}{n}$. On définit par récurrence les nombres y_k^n $(k = 0, 1, \ldots, n)$ par la relation

$$\begin{cases} y_0^n = \alpha \\ y_{k+1}^n = y_k^n + \frac{1}{n} f(t_k^n, y_k^n) \end{cases} \qquad \text{(Schéma d'Euler)}$$

On va voir que les nombres y_k^n fournissent une bonne approximation de la valeur exacte $Y(\frac{k}{n})$.

Théorème 7.1. *Sous les hypothèses ci-dessus sur f, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq k\leq n} \left| y_k^n - Y(\frac{k}{n}) \right| = 0.$$

Q. 49 — Faire un schéma illustrant la construction des nombres y_k^n.

7.2.1. *Démonstration du théorème.* On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $0 \le k \le n$,

$$\begin{cases} e_k^n = Y(t_k^n) - y_k^n \\ \epsilon_k^n = Y(t_{k+1}^n) - Y(t_k^n) - \frac{1}{n} f(t_k^n, Y(t_k^n)) \end{cases}$$

On notera que e_0^n est toujours égal à 0.

Q. 50 — Démontrer que

$$|\epsilon_k^n| \le \eta(1/n)1/n$$

ou η est une fonction vérifiant $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$.

Q. 51 — Démontrer que

$$e_{k+1}^n = e_k^n + \frac{1}{n}[f(t_k^n, Y(t_k^n)) - f(t_k^n, y_k^n)] + \epsilon_k^n, \quad 0 \le k \le n-1.$$

En déduire que

$$|e_{k+1}^n| \le (1 + \frac{M}{n})|e_k^n| + |\epsilon_k^n|\,.$$

Q. 52 — En déduire que

$$|e_k^n| \le \sum_{i=0}^{k-1} |\epsilon_i^n| \exp\left(M \frac{k-i-1}{n}\right) \quad 1 \le k \le n.$$

[Ind. On pourra utiliser l'inégalité $1 + x \le e^x$.]

Q. 53 — Conclure la démonstration du théorème.

Commentaire. Le théorème ci-dessus, tel qu'il est, n'est pas numériquement exploitable car il ne tient pas compte des erreurs de calcul propres à la machine utilisée et il ne donne aucune indication sur la précision du procédé : on ne sait pas quelle valeur de n prendre pour avoir par exemple une précision de 3 décimales.

8. Exemples de calcul approché de fonctions transcendantes

8.1. **La fonction logarithme.**

8.1.1. *Développement de* ln. On rappelle que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1).$$

On sait que le convergence a aussi lieu pour $x = -1$ (mais pas évidemment pour $x = 1$). Cependant le calcul de $\ln 2$ via la formule

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{8.1}$$

est peu efficace.

Q. 54 — Donner une estimation du reste de la série (8.1).

On peut remarquer que

$$-\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

qui est déjà (pourquoi ?) plus intéressant. Mais on montre dans l'exercice suivant qu'on peut faire beaucoup mieux.

8.1.2. *Calcul de* $\ln(k)$*,* $k \in \mathbb{N}$*.* **Q. 55** — Démontrer que

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1). \tag{8.2}$$

Q. 56 — En déduire en choisissant une valeur convenable de x que

$$\frac{1}{2}\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}2n+1}$$

et montrer que le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \ldots$ satisfait la majoration

$$|R_n| \leq \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}.$$

Q. 57 — Montrer que lorsqu'on possède une approximation de $\ln(k)$ on peut obtenir une approximation de $\ln(k+1)$ en faisant intervenir (8.2).

[Ind. Rechercher $x = x(k)$ tel que $\ln(k+1 = \ln(k) + \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$.]

8.2. **La fonction exponentielle.**

8.2.1. *Développement de la fonction exponentielle.* On rappelle que

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Q. 58 — Montrer que si $R_n(x)$ désigne le reste dans la série précédente alors

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+2}}.$$

Q. 59 — En déduire que e est irrationnel. [Euler, 1744]

Q. 60 — Pour calculer $\exp(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^+$, on procède comme suit :

- On calcule e via $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
- On pose $x = y + t$ avec $t \in [0, 1]$ et $y \in \mathbb{N}$ et on calcule $\exp x$ via

$$\exp(x) = e^y \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Quel est l'intérêt de cette méthode ?

8.3. **Fonctions trigonométriques.** Montrer que la convergence de la série usuelle pour $\sin x$ est rapide pour $x \in [0, \pi/4]$ et celle de $\cos x$ est rapide pour $x \in [\pi/2, \pi/4]$. Peut-on toujours se ramener à ces cas ?

9. Améliorations de la convergence des séries : la méthode de Kummer

9.1. **Idée générale.** Supposons que

- On cherche à approcher $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$,
- On connaisse la valeur exacte de la somme $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$,
- On ait $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \gamma \neq 0$.

Dans ces conditions,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \gamma c + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - \gamma c_n)$$

et la série sur la gauche converge, en général, plus rapidement que la précédente car $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \gamma c_n}{a_n} = 0$.

Voyons un exemple. Supposons qu'on veuille une valeur approchée de
$$\frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$
Posant $a_n := \frac{1}{n^2}$ et $c_n := \frac{1}{n(n+1)}$ on obtient en utilisant $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$,
$$\frac{\pi^2}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$$
Si on recommence avec $a_n = \frac{1}{n^2(n+1)}$ et $c_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ on arrive à
$$\frac{\pi^2}{2} = 1 + \frac{1}{4} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)}.$$
car $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1/4$. Dans la deuxième série on a gagné 2 puissances de n dans la convergence vers 0 du terme général.

9.2. **Séries de fractions rationnelles.** Nous allons voir comment on peut, d'une manière générale, appliquer cette méthode pour accélérer la convergence d'une série dont le terme général est une fraction rationnelle en n.

Q. 61 — Soit $f = \frac{p}{q}$ une fraction rationnelle à coefficients réels avec $\deg q \geq \deg p + 2$ de sorte que la série de terme général $f(n)$ est convergente. On supposera que $q(n)$ n'est jamais nul. On peut toujours se ramener à ce cas. Soit donc $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Q. 62 — Pour tout $m \geq 1$, on pose
$$S^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)}.$$
Démontrer que $S^{(m)} = 1/(mm!)$.

Q. 63 — On définit la suite (A_n) par récurrence de la manière suivante.

(1) $A_1 = \lim_{x\to\infty} x(x+1)f(x)$
(2) $A_1, \dots A_{j-1}$ sont construits alors
$$A_j := \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{A_i}{x(x+1)\dots(x+i)} \right) x(x+1)\dots(x+j).$$

Vérifier que cette suite est bien définie, c'est à dire que les limites existent.

Q. 64 — Soit $m \geq 1$.

Q. 65 — Montrer que
$$f(n) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{n(n+1)\dots(n+i)} + u_n^{(m)}$$
avec $u_n^{(m)} = O(n^{-2-m})$.

Q. 66 — En déduire que
$$S = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{i.i!} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(m)}$$
la série sur le droite convergeant beaucoup plus rapidement que la série initiale.

Q. 67 — Appliquer cette méthode pour trouver la somme de
$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2+1)$$
à 0,001 près. (On prendra $m = 2$).

Table des matières

1. Calcul des Polynômes 1
1.1. Algorithme de Hörner 1
1.2. Formule de Taylor 1
2. Zéros des polynômes 2
2.1. L'impasse de la recherche des formules explicites 2
2.2. Localisation des zéros 3
2.3. Le théorème de Budan-Fourier 3
2.4. La théorie de Sturm 4
3. Interpolation de Lagrange 6
3.1. Formule de Lagrange 6
3.2. Approximation par les polynômes d'interpolation 6
4. Calcul approché des solutions d'équations $f(x) = 0$ 7
4.1. Idée générale 7
4.2. La méthode de Newton 7
4.3. La méthode de la sécante 8
4.4. Méthode combinée 9
4.5. Un test d'arrêt 9
5. Calcul approché des intégrales 9
5.1. Idée générale 9
5.2. Méthode des rectangles (point milieu) 9
5.3. Méthode des trapèzes 9
5.4. Méthode de Simpson 9
5.5. Démonstrations 10
5.6. Combinaisons 10
6. Introduction aux méthodes d'accélération de la convergence 10
6.1. Méthode d'Aitken 10
6.2. Méthode de Richardson 11
7. Un exemple de calcul approché des valeurs d'une solution d'une équation différentielle 11
7.1. Introduction 11
7.2. Le schéma d'Euler 11
8. Exemples de calcul approché de fonctions transcendantes 12
8.1. La fonction logarithme 12
8.2. La fonction exponentielle 13
8.3. Fonctions trigonométriques 13
9. Améliorations de la convergence des séries : la méthode de Kummer 13
9.1. Idée générale 13
9.2. Séries de fractions rationnelles 14

Laboratoire de Mathématiques E. Picard, Université Paul Sabatier 31062 Toulouse Cedex FRANCE.
E-mail address: calvi@picard.ups-tlse.fr