

ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN-PAUL CALVI

0.8.1

JEANPAULCALVI.COM/UNIV

UPS
Université de Toulouse



©2008-2011 Jean-Paul Calvi

Première mise en ligne, à la version 0.5.0, le 2 décembre 2008, sur la page
<http://www.math.univ-toulouse.fr/~calvi>

À partir de la version 0.8.0, le texte est déposé sur la page
jeanpaulcalvi.com

| | | |
|-------|-----------------|--|
| 0.5.1 | 18 mai 2009 | (corrections mineures) |
| 0.5.2 | 28 mai 2009 | (corrections mineures) |
| 0.5.3 | 30 mai 2009 | (corrections mineures) |
| 0.6.0 | 12 juin 2009 | (révision des trois premiers chapitres et insertion des corrections de certains exercices) |
| 0.6.1 | 29 juillet 2009 | (Corrections et compléments au premier chapitre) |
| 0.7.0 | 15 juillet 2010 | (Corrections et compléments au troisième chapitre) |
| 0.8.0 | 1 janvier 2011 | (Insertions de codes scilab) |
| 0.8.1 | 26 mars 2011 | (Correction mineures) |

Développements

- 1 Insertion complète des codes / prévu courant 2010-2011



*At my hut
All that I have to offer you,
Is that the mosquitoes are small.*

Bashô

Préface

Ce texte est descendant d'un cours d'introduction à l'analyse numérique qui s'adressait à l'origine à des étudiants de deuxième année de licence d'informatique de l'université Paul Sabatier. Le survol du cours et la compréhension générale des méthodes veulent être accessibles à un large public et j'ai inclus de nombreux exercices, souvent élémentaires, y compris dans le cours du texte, dans l'espoir d'aider à la compréhension des non-spécialistes. Ces exercices reprennent en particulier les sujets d'examen que j'ai proposés à mes étudiants. La lecture de l'ensemble des démonstrations, des compléments et le traitement de quelques développements proposés en exercice s'adresseront par contre à des étudiants qui possèdent une plus solide formation mathématique. À partir de la version 0.8, les codes de fonctions *scilab** qui implémentent les algorithmes fondamentaux sont inclus dans le cours du texte. J'ai essayé de présenter les codes les plus simples qui ne sont pas nécessairement les plus efficaces ni les plus élégants.

Les bases mathématiques sur lesquelles je m'appuie sont modestes : une connaissance raisonnable de l'analyse des fonctions d'une variable réelle, disons, du théorème des valeurs intermédiaires jusqu'à la formule de Taylor (qui sera rappelée) et une certaine familiarité avec les bases de l'algèbre linéaire (systèmes linéaires, applications linéaires, matrices et déterminants).

Ces connaissances permettent un traitement assez substantiel de l'interpolation polynomiale, du calcul approché des intégrales et de l'approximation des racines des équations, trois thèmes qui forment souvent l'essentiel d'une introduction à l'analyse numérique. Par contre, dans le quatrième chapitre, consacré aux méthodes de résolution directe des systèmes linéaires, j'ai dû me limiter à une esquisse, essentiellement à la méthode de Gauss, faute de quoi je serais resté hors de portée de mes étudiants. Ici, ce sont les exercices qui donneront aux lecteurs intéressés une approche plus réaliste du sujet.

La question de la complexité et de la stabilité des procédés numériques (disons, leur sensibilité aux erreurs d'arrondis) est introduite de manière concrète et informelle et abordée chaque fois que c'est possible. Je crois qu'il n'y a pas de plus mauvaise manière de commencer un cours d'analyse numérique que par un chapitre sur l'étude des erreurs.

*. Le logiciel *scilab* est un très puissant logiciel de calcul numérique, de la même famille que les logiciels Matlab ou Octave, librement téléchargeable sur scilab.org.

J'espère que ce texte ne constituera que la première partie d'un cours plus ambitieux. Les premiers développements projetés, qui devraient conduire à la version 1.0 de ce texte sont indiqués sur la page des mentions légales.

Toulouse, Novembre 2008, puis Mars 2011
Jean-Paul Calvi *

Revois. Lorsque le texte renvoie à un objet (théorème, section, exercice, etc) du même chapitre, seul le numéro de l'objet est indiqué. Par contre si le texte renvoie à un objet d'un autre chapitre, le numéro du chapitre apparaît aussi. Ainsi, si au cours chapitre 2, on renvoie au théorème 20 du chapitre 1, on écrira théorème I.20. Pour utiliser les liens, il suffit de sélectionner le second, ici 20.

*. Université de Toulouse, UPS, Institut de Mathématiques de Toulouse (CNRS UMR 5219), F-31062 Toulouse, France. Courriel : jpcmath@netscape.net



Table des matières

| | | |
|------------------------------------|---|------------|
| Préface | | v |
| Table des matières | | vii |
| Table des codes SCILAB | | xi |
| I Interpolation de Lagrange | | 1 |
| 1 | Introduction à l'interpolation polynomiale | 1 |
| 1.1 | Espaces de polynômes | 1 |
| 1.2 | Le problème général de l'interpolation polynomiale | 2 |
| 1.3 | Détermination du polynôme d'interpolation | 3 |
| 1.4 | Terminologie et notations | 5 |
| 1.5 | Propriétés algébriques et linéarité | 6 |
| 2 | Algorithme de calcul et exemples graphiques | 7 |
| 2.1 | Algorithme basé sur la formule de Lagrange | 7 |
| 2.2 | Exemples | 7 |
| 2.3 | Le coût de l'algorithme | 9 |
| 2.4 | La stabilité de l'algorithme | 10 |
| 2.5 | La formule de récurrence de Neville-Aitken | 11 |
| 2.6 | L'algorithme de Neville-Aitken | 12 |
| 3 | Etude de l'erreur | 14 |
| 3.1 | L'énoncé du théorème | 14 |
| 3.2 | Le théorème de Rolle généralisé | 15 |
| 3.3 | Démonstration du théorème I.9 | 16 |
| 3.4 | Choix des points d'interpolation | 17 |
| 3.5 | Précision et nombre de points | 17 |
| 4 | Polylignes | 18 |
| 4.1 | Subdivisions | 18 |
| 4.2 | Fonctions polylignes | 20 |
| 4.3 | Approximation des fonctions continûment dérivables par les fonctions polylignes | 22 |

| | | |
|---|--|-----------|
| 4.4 | Représentation | 24 |
| 4.5 | * Approximation des fonctions continues par des fonctions polylignes | 26 |
| 4.6 | Extension | 27 |
| 5 | Exercices et problèmes | 27 |
| II Calcul approché des intégrales | | 36 |
| 1 | Formules de quadratures élémentaires | 36 |
| 1.1 | Problème | 36 |
| 1.2 | Présentation générale | 36 |
| 2 | Exemples fondamentaux | 38 |
| 2.1 | La formule du point milieu | 38 |
| 2.2 | La formule du trapèze | 38 |
| 2.3 | La formule de Simpson | 39 |
| 3 | Etude de L'erreur | 40 |
| 3.1 | Estimation de l'erreur dans la formule du point milieu | 40 |
| 3.2 | Estimation de l'erreur dans la formule du trapèze | 41 |
| 3.3 | Estimation de l'erreur dans la formule de Simpson | 42 |
| 4 | Composition | 42 |
| 4.1 | Idée générale | 42 |
| 4.2 | Exemples fondamentaux de formules composées | 44 |
| 4.3 | Codes Scilab | 44 |
| 5 | Exercices et problèmes | 47 |
| III Solutions approchées des équations | | 52 |
| 1 | Introduction | 52 |
| 2 | Méthode de dichotomie (ou de bisection) | 53 |
| 2.1 | Définition | 53 |
| 2.2 | Etude de la convergence | 54 |
| 3 | Méthode de Newton | 56 |
| 3.1 | Construction | 56 |
| 3.2 | Etude de la convergence | 57 |
| 3.3 | Autres versions | 61 |
| 4 | Méthode de la sécante | 61 |
| 4.1 | Construction | 61 |
| 4.2 | Etude de la convergence | 62 |
| 5 | Le théorème du point fixe | 64 |
| 5.1 | Introduction | 64 |
| 5.2 | Enoncé du théorème du point fixe | 65 |
| 5.3 | Illustration graphique | 66 |
| 5.4 | Démonstration du théorème du point fixe | 67 |
| 5.5 | Démonstration de la convergence de la suite x_n | 69 |

| | | |
|---|---|------------|
| 6 | * Davantage sur le théorème du point fixe et ses applications | 69 |
| 6.1 | Sur la rapidité de convergence | 69 |
| 6.2 | Sur l'hypothèse de stabilité de l'intervalle | 71 |
| 6.3 | Application à l'étude de la méthode de la sécante | 72 |
| 6.4 | Application à la méthode de Newton | 73 |
| 7 | * Interpolation de Lagrange et seconde méthode de la sécante | 73 |
| 8 | Exercices et problèmes | 76 |
| IV Résolution des systèmes linéaires. Méthodes directes. | | 80 |
| 1 | Rappel sur les systèmes linéaires | 80 |
| 1.1 | Introduction | 80 |
| 1.2 | Le formalisme | 81 |
| 1.3 | Rappels des résultats fondamentaux | 82 |
| 2 | Le cas des systèmes triangulaires | 83 |
| 2.1 | L'analyse du cas $n = 3$ | 83 |
| 2.2 | Les algorithmes de substitution successives | 84 |
| 3 | L'algorithme de Gauss | 85 |
| 3.1 | Cas d'un système 3×3 | 85 |
| 3.2 | Algorithme de Gauss (sans optimisation de pivot) | 87 |
| 3.3 | Coût de l'algorithme de Gauss | 88 |
| 4 | Exercices et problèmes | 89 |
| V Solution des exercices | | 96 |
| 1 | Sur l'interpolation de Lagrange | 96 |
| 2 | Calcul approché des intégrales | 99 |
| 3 | Solutions approchées des équations | 102 |
| 4 | Résolution des systèmes linéaires. Méthodes directes | 104 |
| Index | | 108 |
| Bibliographie | | 111 |





Table des codes SCILAB

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Code SCILAB (Formule d'interpolation de Lagrange) | 7 |
| 2 | Code SCILAB (Méthode du point milieu) | 44 |
| 3 | Code SCILAB (Méthode du trapèze) | 44 |
| 4 | Code SCILAB (Méthode de Simpson) | 46 |
| 5 | Code SCILAB (Un test d'arrêt sur la méthode du point milieu) | 47 |
| 6 | Code SCILAB (Algorithme de dichotomie) | 54 |
| 7 | Code SCILAB (Algorithme de dichotomie à précision fixée) | 55 |
| 8 | Code SCILAB (Méthode de Newton) | 59 |
| 9 | Code SCILAB (Méthode de la sécante) | 63 |
| 10 | Code SCILAB (Approximations successives) | 66 |

I

Interpolation de Lagrange

§ 1. INTRODUCTION À L'INTERPOLATION POLYNOMIALE

1.1 Espaces de polynômes

Nous rappelons quelques résultats sur les polynômes (ou fonctions polynomiales). Un **monôme** de degré k est une fonction de la forme $x \in \mathbb{R} \rightarrow cx^k$ où $c \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Un **polynôme** est une somme (finie) de monômes. La fonction nulle est aussi considérée comme un polynôme. L'ensemble \mathcal{P} des polynômes forme alors un espace vectoriel quand on utilise l'addition habituelle des fonctions ($p + q$) ainsi que la multiplication par une constante (λp). Le produit de deux polynômes (pq) est encore un polynôme. Les fonctions polynômes sont indéfiniment dérivables. Tout polynôme p non nul s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m = \sum_{i=0}^m c_ix^i, \quad (1.1)$$

avec $c_m \neq 0$. L'unicité provient de ce que $c_k = p^{(k)}(0)/k!$. Les nombres c_i s'appellent les **coefficients** de p . L'entier non nul m dans (1.1) est le **degré** de p et le coefficient c_m est le **coefficient dominant** de p . On convient que $\deg 0 = -\infty$. Avec cette convention, quels que soient les polynômes p et q , nous avons

$$\deg(pq) = \deg p + \deg q, \quad (1.2)$$

$$\deg(p + q) \leq \max(\deg p, \deg q). \quad (1.3)$$

E 1 Ecrire une formule donnant les coefficients d'un produit de polynômes pq en fonction des coefficients des facteurs p et q .

Lorsque $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\deg \lambda p = \deg p, \quad (1.4)$$

c'est un cas particulier de (1.2). En réalité le degré de $p + q$ coïncide toujours avec $\max(\deg p, \deg q)$ sauf lorsque les deux polynômes ont même degré et leurs coefficients dominants sont opposés l'un de l'autre. Nous noterons \mathcal{P}_m l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à m . Les propriétés (1.3) et (1.4) montrent que \mathcal{P}_m est un sous-espace vectoriel de \mathcal{P} dont la base canonique est $\mathcal{B} = (x \rightarrow 1 = x^0, x \rightarrow x^1, \dots, x \rightarrow x^m)$. En particulier, sa dimension est $m + 1$.

Si r est une racine de p (c'est-à-dire $p(r) = 0$) alors p est divisible par $(\cdot - r)$. Cela signifie qu'il existe un polynôme q tel que $p(x) = (x - r)q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous disons que r est une racine de **multiplicité** m lorsque $(\cdot - r)^m$ divise p mais $(\cdot - r)^{m+1}$ ne divise pas p . On montre en algèbre que cela est équivalent à

$$0 = p(r) = p'(r) = \dots = p^{(m-1)}(r) \quad \text{et} \quad p^{(m)}(r) \neq 0.$$

Un polynôme $p \in \mathcal{P}_m$ non nul admet au plus m racines en tenant compte de la multiplicité. Cela signifie que si r_i est racine de multiplicité m_i de $p \neq 0$ pour $i = 1, \dots, l$ alors $m_1 + \dots + m_l \leq m$. On dit alors que le nombre de racine de p est en tenant compte de la multiplicité plus petite ou égale au degré du polynôme p^* . Nous utiliserons plusieurs fois que si p est un polynôme de degré au plus m qui admet au moins $m + 1$ racines en tenant compte de la multiplicité alors p est nécessairement le polynôme nul ; autrement dit,

$$\left. \begin{array}{l} z_i \text{ racine de } p \text{ de multiplicité } \geq m_i, i = 1, \dots, l, \\ \sum_{i=1}^l m_i > m, \\ p \in \mathcal{P}_m \end{array} \right\} \implies p = 0. \quad (1.5)$$

E 2 Peut-on retrouver un polynôme de degré m quand on sait que x_1, \dots, x_m sont ses racines ?

E 3 En combien de points une droite peut-elle couper le graphe d'un polynôme ?

E 4 Combien d'axe de symétrie le graphe d'un polynôme peut-il admettre ? ($y = a$ est un axe de symétrie du graphe de p si $p(a - x) = p(a + x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

1.2 Le problème général de l'interpolation polynomiale

En analyse numérique, une fonction f n'est souvent connue que par ses valeurs f_i en un nombre fini de points a_i , $f_i = f(a_i)$, (en réalité, en pratique f_i est seulement une approximation de $f(a_i)$). Cependant, dans la plupart des cas, il est nécessaire d'effectuer des opérations sur des fonctions *globales* (dérivation, intégration, ...) et nous sommes conduits à *reconstruire* une fonction globale f_r à partir d'un nombre fini de données (a_i, f_i) .

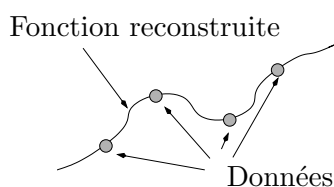
Sauf cas très simple, la fonction f_r ne coïncidera pas avec la fonction idéale f mais il faut faire en sorte qu'elle n'en soit pas trop éloignée.

Le problème de l'interpolation polynomiale consiste à choisir comme fonction reconstruite une fonction polynomiale. C'est la méthode la plus ancienne, la plus élémentaire et encore la plus utile. Mais il y en a d'autres. Nous verrons plus loin, à la section 4, une seconde méthode employant les polygones. Dans la figure ci-dessus la fonction

*. Dans le cas complexe, c'est-à-dire, lorsque'on accepte de considérer les racines complexes (et mêmes les polynômes à coefficients complexes), le théorème fondamental de l'algèbre dit que le nombre de racines d'un polynôme non nul est, en tenant compte de la multiplicité, exactement égal au degré du polynôme.



reconstruite f_r est obtenue à partir de quatre données par un procédé voisin (spline d'interpolation) mais différent.



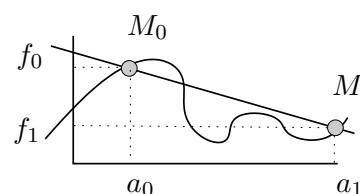
D'une manière précise, étant donnés $d + 1$ points d'abscisses distinctes $M_j = (a_j, f_j)$, $j = 0, \dots, d$, dans le plan — pour des raisons de commodité d'écriture les points seront toujours indicés à partir de 0^* —, le problème consiste à trouver un polynôme $p \in \mathcal{P}_m$ dont le graphe passe par les $d + 1$ points M_j . En formule, nous devons avoir

$$p \in \mathcal{P}_m \quad \text{et} \quad p(a_j) = f_j \quad j = 0, \dots, d. \quad (1.6)$$

Ce problème est bien facile à résoudre lorsque nous disposons de deux points M_0 et M_1 et cherchons un polynôme de degré 1 car il suffit alors de prendre l'unique polynôme dont le graphe est la droite (M_0M_1) comme indiqué sur la figure.

En effet, posant $p(x) = \alpha x + \beta$, nous déterminons α et β grâce aux équations $p(a_0) = f_0$ et $p(a_1) = f_1$. Il vient

$$p(x) = \frac{f_1 - f_0}{a_1 - a_0}(x - a_0) + f_0 \quad (1.7)$$



que nous pouvons aussi écrire

$$p(x) = f_0 \frac{x - a_1}{a_0 - a_1} + f_1 \frac{x - a_0}{a_1 - a_0}. \quad (1.8)$$

Le problème est à peine plus compliqué lorsque nous disposons de trois points $M_i(a_i, f_i)$, $i = 0, 1, 2$ avec $a_0 < a_1 < a_2$ et cherchons un polynôme du second degré. Le graphe cherché est en général une parabole (correspondant à un polynôme de degré 2). Cependant, dans le cas particulier où les trois points sont alignés, le graphe est à nouveau une droite (correspondant à un polynôme de degré 1).

Ceci dit, s'il n'est pas davantage précisé, le problème (1.6) peut n'avoir aucune solution ou bien en avoir une infinité.

E 5 (a) Montrer qu'il existe une infinité de polynômes $p \in \mathcal{P}_2$ dont le graphe passe par les points $M_0(0, 0)$ et $M_1(1, 1)$. (b) Trouver quatre points M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) d'abscisses respectives $-1, 0, 1, 2$ qui ne se trouvent sur le graphe d'aucun polynôme de \mathcal{P}_2 .

1.3 Détermination du polynôme d'interpolation

Nous devinons aisément que pour qu'un seul polynôme satisfasse aux conditions (1.6), une relation doit exister entre le nombre de points $d + 1$ et le degré m du polynôme cherché. Cette relation est facile à mettre en évidence. Pour déterminer $p \in \mathcal{P}_m$, nous devons connaître l'ensemble de ses coefficients et ceux-ci sont au nombre de $m + 1$. Or, pour les obtenir, nous disposons des $d + 1$ informations $p(a_i) = f_i$, $i = 0, \dots, d$. De

*. La seule exception à cette convention se trouve au paragraphe 2.6 consacré à l'algorithme de Neville-Aitken.

manière précise, posant $p(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i$, nous devons déterminer les $m + 1$ coefficients c_i à l'aide des $d + 1$ équations

$$\sum_{i=0}^m c_i a_j^i = f_j, \quad 0 \leq j \leq d. \quad (1.9)$$

Le cours d'algèbre linéaire nous dit alors que pour espérer une solution unique, il nous faut supposer que $m = d$ — ce que nous ferons à partir de maintenant — et, dans ce cas, le système admettra une solution et une seule si et seulement si son déterminant sera différent de 0. Nous pourrions alors obtenir une expression plus ou moins explicite pour chaque c_i en utilisant les formules de Cramer (voir IV.1.3). S'il n'est pas trop difficile, le calcul du déterminant de ce système est cependant assez long (il est proposé à l'exercice 43) et nous suivrons ici une autre démarche, assez courante en mathématiques. Elle consiste à décomposer le problème en un grand nombre de micro-problèmes puis de superposer les solutions de ces micro-problèmes pour obtenir une solution du problème de départ. L'idée est la suivante. Nous supposons dans un premier temps que nous connaissons pour chaque $i \in \{0, \dots, d\}$ un polynôme $\ell_i \in \mathcal{P}_d$ qui satisfasse $\ell_i(a_i) = 1$ et $\ell_i(a_j) = 0$ pour $j \neq i$. Il est commode de présenter cette propriété en utilisant le symbole de Kronecker δ_{ij} qui vaut 1 lorsque $i = j$ et 0 lorsque $i \neq j$. Ainsi, nos polynômes ℓ_i vérifient $\ell_i(a_j) = \delta_{ij}$. Nous formons ensuite le polynôme $p := \sum_{i=0}^d f_i \ell_i$. Puisque chaque $\ell_i \in \mathcal{P}_d$ et que \mathcal{P}_d est un espace vectoriel, nous avons $p \in \mathcal{P}_d$. De plus $p(a_j) = \sum_{i=0}^d f_i \ell_i(a_j) = \sum_{i=0}^d f_i \delta_{ij} = f_j$ de sorte que le polynôme p satisfait les conditions demandées. Le problème sera donc résolu si nous établissons l'existence des polynômes ℓ_i . Cherchons donc à déterminer ℓ_i en exploitant les conditions que nous lui avons imposées. Puisque $\ell_i(a_j) = 0$ pour $j \neq i$, ℓ_i est factorisable par $(x - a_j)$ pour $j \neq i$ et comme les a_j sont supposés deux à deux distincts, il vient

$$\ell_i(x) = (x - a_0) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_d) R(x), \quad (1.10)$$

où R est un polynôme qu'il nous reste à déterminer. Puisqu'il y a dans (1.10) $d + 1 - 1 = d$ facteurs $(x - a_j)$ qui donnent un polynôme de degré d et que ℓ_i lui-même appartient à \mathcal{P}_d , le polynôme R est nécessairement constant de sorte que pour un certain $K \in \mathbb{R}$,

$$\ell_i(x) = K(x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_d). \quad (1.11)$$

Mais il est aussi demandé que $\ell_i(a_i)$ soit égal à 1 et cette condition permet immédiatement d'obtenir la constante K ,

$$K = \{(a_i - a_0) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_d)\}^{-1}. \quad (1.12)$$

Nous avons donc établi l'existence des polynômes ℓ_i et presque entièrement démontré le théorème suivant.

Théorème I.1. *Soit $A = \{a_0, \dots, a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ nombres réels (deux à deux) distincts. Quelles que soient les valeurs f_0, f_1, \dots, f_d , il existe un et un seul polynôme*



$p \in \mathcal{P}_d$ tel que $p(a_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, d$. Ce polynôme, est donné par la formule

$$p = \sum_{i=0}^d f_i \ell_i, \quad (1.13)$$

avec

$$\ell_i(x) = \frac{(x - a_0) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_d)}{(a_i - a_0) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_d)}. \quad (1.14)$$

Démonstration. La seule affirmation que nous n'avons pas encore établie est l'unicité. Nous avons trouvé un polynôme p satisfaisant les conditions demandées mais nous n'avons pas montré qu'il n'y a pas d'autre solution que celle que nous avons trouvée. Supposons que q_1 et q_2 soient deux solutions et posons $q = p_1 - p_2$. En utilisant à nouveau le fait que \mathcal{P}_d est un espace vectoriel, nous avons $q \in \mathcal{P}_d$. De plus, pour $i = 0, \dots, d$, $q(a_i) = f_i - f_i = 0$. Nous avons donc un polynôme q de degré au plus d qui admet au moins $d + 1$ racines. En vertu de la relation (1.5) sur les racines d'un polynôme, la seule possibilité est $q = 0$ qui entraîne $p_1 = p_2$ et l'unicité s'ensuit. ■

1.4 Terminologie et notations

Les nombres a_i s'appellent les **points d'interpolation** ou encore **noeuds d'interpolation**. Lorsque $f_i = f(a_i)$, la fonction f est la **fonction interpolée**. Nous disons aussi que les valeurs $f(a_i)$ sont les **valeurs d'interpolation** ou **valeurs interpolées**. L'unique polynôme $p \in \mathcal{P}_d$ vérifiant $p(a_i) = f(a_i) (i = 0, 1, \dots, d)$ s'appelle alors le polynôme d'**interpolation de Lagrange** de f aux points a_i . Il est noté $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f]$ ou bien $\mathbf{L}[A; f]$.

Cette dernière notation est cohérente car le polynôme d'interpolation de Lagrange dépend uniquement de l'ensemble des points $A = \{a_0, \dots, a_d\}$ et non du $(d + 1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_{d+1})^*$. Autrement dit, le polynôme d'interpolation de Lagrange ne dépend pas de la manière dont les points sont ordonnés. Une autre manière un peu sophistiquée de traduire cette propriété est la suivante : si σ est une permutation[†] quelconque des indices $0, 1, \dots, d$ alors

$$\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f] = \mathbf{L}[a_{\sigma(0)}, \dots, a_{\sigma(d)}; f].$$

Les polynômes ℓ_i s'appellent les **polynômes fondamentaux de Lagrange**. En utilisant le symbole \prod qui est l'équivalent pour le produit de ce que \sum est pour la somme, nous obtenons la formule suivante qui est une variante compacte de (1.14).

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^d \frac{x - a_j}{a_i - a_j}. \quad (1.15)$$

*. Rappelons que la différence entre un ensemble de $d + 1$ éléments deux à deux distincts et un $(d + 1)$ -uplet est que, dans ce dernier, l'ordre dans lequel les éléments sont écrits à toute son importance. Avec un ensemble de $d + 1$ éléments deux à deux distincts, nous pouvons former $(d + 1)!$ différents $(d + 1)$ -uplet.

†. Une permutation des indices $0, 1, \dots, d$ est une bijection de l'ensemble $\{0, 1, \dots, d\}$ dans lui-même.

Avec ces nouvelles notations, l'expression (1.13) devient

$$\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f](x) = \sum_{i=0}^d f(a_i) \prod_{j=0, j \neq i}^d \frac{x - a_j}{a_i - a_j}. \quad (1.16)$$

Cette expression de $\mathbf{L}[A; f] = \mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f]$ est connue sous le nom de **formule d'interpolation de Lagrange**.

1.5 Propriétés algébriques et linéarité

Il est essentiel de retenir l'équivalence suivante

$$\left. \begin{array}{l} p \in \mathcal{P}_d \\ p(a_i) = f(a_i) \quad i = 0, \dots, d \end{array} \right\} \Leftrightarrow p = \mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f]. \quad (1.17)$$

En particulier,

$$\text{si } p \in \mathcal{P}_d \text{ alors } \mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; p] = p. \quad (1.18)$$

Il faut prendre garde que cette propriété n'est valable que lorsque le degré de p est inférieur ou égal à d^* . La relation (1.17) signifie que pour établir qu'un polynôme donné p est égal au polynôme d'interpolation de Lagrange d'une fonction f aux points a_0, \dots, a_d , il suffit de vérifier que le degré de q est inférieur ou égal à d et que $q(a_i) = f(a_i)$ pour $i = 0, \dots, d$.

La relation (1.18) entraîne des propriétés algébriques intéressantes sur les polynômes ℓ_i . Par exemple, en utilisant que, quel que soit le nombre de points, le polynôme constant égal à 1 est son propre polynôme d'interpolation, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^d \ell_i = 1. \quad (1.19)$$

E 6 Vérifiez la propriété ci-dessus par le calcul dans le cas où $d = 1$ (deux points d'interpolation) et $d = 2$ (trois points d'interpolation).

Théorème I.2. *L'application $\mathbf{L}[A, \cdot]$ qui à toute fonction f définie (au moins) sur $A = \{a_0, \dots, a_d\}$ fait correspondre son polynôme d'interpolation $\mathbf{L}[A; f] \in \mathcal{P}_d$,*

$$\mathbf{L}[A; \cdot] : f \in \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathbf{L}[A; f] \in \mathcal{P}_d,$$

est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(A)$ des fonctions réelles définies sur A à valeurs dans l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d . Cela signifie qu'elle satisfait les deux propriétés suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{L}[A; f + g] = \mathbf{L}[A; f] + \mathbf{L}[A; g], & f, g \in \mathcal{F}(A) \\ \mathbf{L}[A; \lambda f] = \lambda \mathbf{L}[A; f], & f \in \mathcal{F}(A), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.20)$$

E 7 Montrer les propriétés (1.20).

E 8 Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n(x) = x^n$. Déterminer $\mathbf{L}[-1, 0, 1; M_n]$ et en déduire, pour tout polynôme p , une formule pour $\mathbf{L}[-1, 0, 1; p]$ en fonction des coefficients de p .

*. Pour la calcul de $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; p]$ lorsque le degré de p est strictement supérieur à d , voir l'exercice 26.



§ 2. ALGORITHME DE CALCUL ET EXEMPLES GRAPHIQUES

2.1 Algorithme basé sur la formule d'interpolation de Lagrange

L'algorithme suivant est une traduction directe de la formule d'interpolation de Lagrange (1.16). S'il est le plus simple, il n'est pas, loin s'en faut, le meilleur et il nous servira surtout à mettre en évidence les problèmes numériques liées à l'utilisation d'un algorithme. Un meilleur algorithme (de Neville-Aitken) est donné plus loin et une troisième méthode est esquissée dans l'exercice 30.

Algorithme I.3. Les données de l'algorithme sont (i) le vecteur $a = (a_0, \dots, a_d)$ formé des points d'interpolation, (ii) le vecteur $f = (f_0, \dots, f_d)$ formé des valeurs d'interpolations (iii) le point t en lequel nous voulons calculer $L[a; f]$. Le résultat est dans P .

- (a) $P := 0$
- (b) Pour $i \in [0 : d]$ faire
 - (a) $L := 1$
 - (b) Pour $j \in [0 : i - 1; i + 1 : d]$, $L := L \times (t - a_j) / (a_i - a_j)$
 - (c) $P := P + L \times f_i$.

Voici la traduction en code scilab de l'algorithme ci-dessus

Code SCILAB 1 (Formule d'interpolation de Lagrange). Dans le code suivant

- (a) N est un vecteur formé des points d'interpolation, La longueur de N est n .
- (b) Y est un vecteur de même dimension que N contenant les valeurs d'interpolation,
- (c) X est un vecteur contenant les points en lesquels le polynôme doit être calculé.

```

1  fonction [P]=lagrange(N, V, X)
   n=length(N);
3  P=0;
   for i=1:n,
5     L=1;
       for j=[1:i-1, i+1:n]
7         L=L.*(X-N(j))./(N(i)-N(j));
           end
9     P=P+L*V(i);
       end
11  endfunction

```

2.2 Exemples

Sur les graphiques de la table 1, nous pouvons comparer la fonction $f(x) = x \sin(\pi x)$ (tracée en bleu) et ses polynômes d'interpolation (tracés en rouge) de degré d par rapport aux $d + 1$ **points équidistants** $a_i = -1 + 2i/d$, $i = 0, 1, \dots, d$ lorsque $d = 3, 4, 5$

et 6. Par exemple lorsque $d = 4$, les 5 noeuds d'interpolation sont $-1, -0.6, -0.2, 0.2, 0.6, 1$. Remarquons que les polynômes approchent si bien la fonction que les graphes sont confondus sur $[-1, 1]$ dès que $d = 6$. Par contre, le résultat est mauvais en dehors de l'intervalle $[-1, 1]$. En réalité, avec la fonction choisie, qui est très régulière* en augmentant d , nous obtiendrions aussi une excellente approximation en dehors de l'intervalle. Nous verrons plus loin des exemples de fonctions pour lesquelles les polynômes d'interpolation construits aux points équidistants ne fournissent pas une bonne approximation.

E 9 Remarquons que, dans le cas $d = 3$, le graphe du polynôme d'interpolation est une parabole, c'est à dire le graphe d'un polynôme du second degré (et non pas d'un polynôme de degré 3). Expliquer cela.

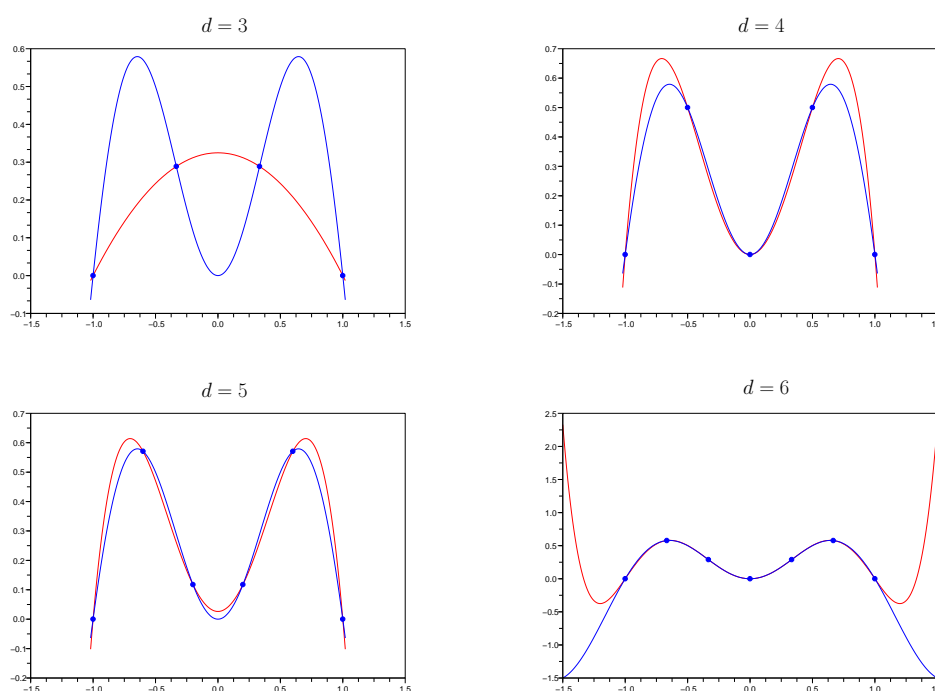


TABLE 1 – Quelques polynômes d'interpolation de la fonction $f(x) = x \sin \pi x$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

*. Le mot *régulier* est un mot passe-partout en mathématiques qui n'a de sens que dans le contexte. Ici, le sens serait celui de *fonction analytique* mais cette notion est trop délicate pour être introduite dans ce cours. Nous disons plus simplement que la fonction $f(x) = x \sin(\pi x)$ est très régulière parce qu'elle est indéfiniment dérivable et les valeurs absolues de ses dérivées $|f^{(s)}(x)|$ ne croissent pas trop vite lorsque $x \in [-1, 1]$ et s devient grand. Cette idée est développée dans l'exercice 36.

2.3 Le coût de l'algorithme

Le **coût** ou encore la **complexité** d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires (+, −, ×, ÷) employé par cet l'algorithme pour produire son résultat. Parfois, comme dans le théorème ci-dessous, on se limite à compter le nombre de multiplications et de divisions en supposant que le travail demandé par les additions et les soustractions est négligeable devant celui demandé par une multiplication ou une division. Ces nombres d'opérations ne donnent qu'une information partielle sur la rapidité (et l'utilité pratique, la faisabilité) de l'algorithme. D'autres éléments entrent en ligne de compte. Le nombre de mémoires (de registres, de variables) occupées par l'algorithme est un autre élément important. Dans le calcul de la complexité, il n'est pas tenu compte des actions de changement d'affectation de nombres dans des variables, non plus que des tris sur des listes de nombres comme par exemple la recherche du nombre le plus grand. Ces actions consomment une énergie et un temps importants qui peuvent suffire à dissuader de l'emploi d'un algorithme. Cette notion de coût (complexité) joue un rôle fondamental en analyse numérique matricielle dans laquelle sont presque uniquement utilisées les opérations élémentaires. Dans les autres parties de l'analyse numérique, il est souvent nécessaire d'utiliser les opérations élémentaires sur des valeurs de fonctions usuelles (elles-mêmes conservées en mémoire à disposition ou évaluées avec un nombre fini d'opérations élémentaires) et il est alors souvent plus naturel de compter les évaluations de ces fonctions usuelles parmi les opérations élémentaires.

Le théorème suivant donne une première idée d'un calcul de complexité.

Théorème I.4. *Le calcul de $L[a_0, \dots, a_d; f](x)$ par l'algorithme I.3 nécessite $(2d + 1)(d + 1) \approx 2d^2$ multiplications-divisions*.*

Ici, comme il est naturel, la complexité est une fonction croissante de d , c'est-à-dire essentiellement du nombre de points d'interpolation, ou encore du nombre de données à utiliser.

Le symbole \approx est mis pour indiquer l'**équivalence** de deux suites. Nous disons que deux suites u_d et v_d sont équivalentes (lorsque $d \rightarrow \infty$) lorsqu'il existe une troisième suite ε_d qui tend vers 0 et telle que $u_d = v_d(1 + \varepsilon_d)$. Lorsque l'une des deux suites ne s'annule plus à partir d'un certain rang, disons v_d , nous pouvons diviser par v_d lorsque d est assez grand, et la définition se traduit alors par $\lim_{d \rightarrow \infty} u_d/v_d = 1$. Dans l'énoncé du théorème, prenant $u_d = (2d + 1)(d + 1) = 2d^2 + 3d + 1$ et $v_d = 2d^2$, nous avons bien $u_d/v_d = 1 + 3/(2d) + 2/(2d^2) \rightarrow 1$ lorsque $d \rightarrow \infty$.

Démonstration. Le nombre N_d de multiplications-divisions est donné par

$$\sum_{i=0}^d \left(\left\{ \sum_{j=0, j \neq i}^d 2 \right\} + 1 \right) = \sum_{i=0}^d (2d + 1) = (2d + 1)(d + 1). \quad (2.1)$$

Le premier $\sum_{i=0}^d$ provient de la boucle *pour* $i \in [0, d]$ dans l'algorithme I.3 tandis que

*. Les valeurs de la fonctions $f(a_i)$ sont données; nous ne devons pas les calculer.



| n | coef. de x^n | n | coef. de x^n | n | coef. de x^n |
|-----|----------------|-----|----------------|-----|----------------|
| 1 | $-2.776D - 17$ | 3 | 1 | 5 | $6.661D - 16$ |
| 2 | $-2.776D - 16$ | 4 | $5.551D - 16$ | 6 | $-1.110D - 15$ |

TABLE 2 – Coefficients de $\mathbf{L}_{[0, \dots, a_6; M_3]}(x) = x^3$ calculés par l’algorithme I.3.

la seconde somme provient de la boucle *pour* $j \in [0 : i - 1; i + 1 : d]$. L’imbrication des signes \sum traduit le fait que la seconde boucle s’effectue à l’intérieur de la première. ■

2.4 La stabilité de l’algorithme

Prenons 7 points équidistants dans $[-1, 1]$, $a_i = -1 + 2/6 \cdot i$, $i = 0 \dots, 6$ et calculons l’interpolant de Lagrange de la fonction $M_3 : x \rightarrow x^3$. La relation (1.18) montre que

$$\mathbf{L}[a_0, \dots, a_6; M_3](x) = x^3.$$

Nous avons modifié l’algorithme I.3, pour qu’il produise un polynôme. C’est une bien mauvaise idée, du point de vue de la précision des calculs, mais elle nous servira à montrer comment un algorithme mathématiquement correct peut donner des résultats très médiocres. Les coefficients du polynôme obtenu sont indiqués dans la table 2. Les résultats qui ne sont pas nuls mais qui devraient l’être sont tellement petit que nous pouvons sans hésiter les éliminer* de sorte que les résultats sont acceptables. Les difficultés apparaissent pour un nombre de points supérieur. Pour $d = 30$ et la fonction polynôme $p(x) = 6x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5$, nous obtenons les coefficients donnés dans la table 3. Il n’est

| n | coef. de x^n | n | coef. de x^n | n | coef. de x^n |
|-----|----------------|-----|----------------|-----|----------------|
| 1 | $-7.154D - 16$ | 11 | 0.0000102 | 21 | 0.0312387 |
| 2 | 6 | 12 | -0.0000084 | 22 | -0.0128725 |
| 3 | 2 | 13 | 0.0000207 | 23 | -0.0083289 |
| 4 | 1 | 14 | -0.0003492 | 24 | 0.0210372 |
| 5 | 1 | 15 | 0.0021007 | 25 | -0.0186058 |
| 6 | $2.804D - 09$ | 16 | -0.0073588 | 26 | 0.0090390 |
| 7 | $3.535D - 09$ | 17 | 0.0175530 | 27 | -0.0024166 |
| 8 | 0.0000001 | 18 | -0.0304909 | 28 | 0.0003477 |
| 9 | 0.0000011 | 19 | 0.0399997 | 29 | 0.0000052 |
| 10 | -0.0000046 | 20 | -0.0407562 | 30 | -0.0000115 |

TABLE 3 – Coefficients de l’interpolant de Lagrange $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_{29}; p](x) = p$, $p(x) = 6x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5$, calculés par l’algorithme I.3 avec 30 points équidistants dans $[-1, 1]$.

pas difficile d’expliquer l’inexactitude du résultat. Un calculateur ne travaille qu’avec

*. Les logiciels de calculs sont munis d’opérateur de “nettoyage” qui remplacent par 0 les données extrêmement petites.



une famille finie (très étendue) de nombres F et le résultat de toutes les opérations qu'il effectue doit être sélectionné parmi ces nombres. Si a et b sont deux nombres réels et $*$ désigne une opération quelconques alors le résultat de l'opération $a * b$ sera $F(a * b)$ avec

$$F(a * b) = \boxed{\boxed{a} * \boxed{b}},$$

où \boxed{x} désigne l'élément de F le plus proche, en un certain sens, de x . Traditionnellement, même si cela ne correspond plus au fonctionnement des calculateurs modernes, la différence entre le résultat exact $a * b$ et le nombre retenu par le calculateur $F(a * b)$ est appelée **erreur d'arrondi**. De manière informelle, nous disons qu'un algorithme est stable lorsque les erreurs au niveau des données et les erreurs d'arrondis induisent des erreurs au niveau du résultat comparables à (la somme de) celles sur les données. Pour être correctement analysée, cette idée doit être formalisée : nous devons estimer la différence entre le résultat théorique et le résultat fourni par le calculateur en tenant compte des erreurs sur les données et des propriétés techniques des calculateurs. Cette analyse, en général est délicate et, dans ce cours, nous n'aurons l'occasion d'en considérer que quelques exemples très simples qui ne concerneront que la propagation des erreurs sur les données.

Dans le cas du calcul de l'interpolant de Lagrange qui nous intéresse ici, l'algorithme ne calcule pas $\mathbf{L}[0, \dots, a_{29}; p]$ mais une approximation $\tilde{\mathbf{L}}$. Si nous examinons le coefficient de x^{17} dans la table 3, qui théoriquement devrait être nul, nous trouvons une erreur de l'ordre d'un centième qui est une erreur extrêmement grande — si nous savons que tous les calculs sont effectués avec une précision de l'ordre de 10^{-12} . Nous dirons que l'algorithme est instable. En général, la stabilité dépend : (a) des points d'interpolation a_0, \dots, a_d — de ce point de vue les points équidistants constituent un mauvais choix ; (b) de la fonction interpolée ; en particulier les risques d'erreur augmentent si la fonction admet des variations importantes, c'est-à-dire lorsque $f(x + \varepsilon)$ peut être très différent de $f(x)$ pour ε petit — c'est le cas des fonctions avec $f'(x)$ grand ; (c) de l'algorithme utilisé, dont les qualités dépendent de la méthode mathématique dont il découle, du programme ou langage à l'intérieur duquel l'algorithme est programmé, de l'habileté du traducteur. Les problèmes de la complexité et de la stabilité ne sont pas indépendants puisqu'en général plus le nombre d'opérations sera grand plus le risque de propagation des erreurs d'arrondis sera élevé.

2.5 La formule de récurrence de Neville-Aitken

Théorème I.5 (Neville-Aitken). *Soit $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ un ensemble de $d + 1$ nombres réels distincts et f une fonction définie (au moins) sur A . Alors*

$$\begin{aligned} & (a_0 - a_d)\mathbf{L}[a_0, a_1, \dots, a_d; f](x) \\ &= (x - a_d)\mathbf{L}[a_0, a_1, \dots, a_{d-1}; f](x) - (x - a_0)\mathbf{L}[a_1, a_2, \dots, a_d; f](x). \end{aligned} \quad (2.2)$$



Démonstration. Considérons $Q \in \mathcal{P}_d$ défini par

$$Q(x) = \frac{1}{a_0 - a_d} \left\{ \underbrace{\mathbf{L}[a_0, \dots, a_{d-1}; f](x)}_{\in \mathcal{P}_{d-1}} \underbrace{(x - a_d)}_{\in \mathcal{P}_1} - \underbrace{\mathbf{L}[a_1, \dots, a_d; f](x)}_{\in \mathcal{P}_{d-1}} \underbrace{(x - a_0)}_{\in \mathcal{P}_1} \right\}, \quad (2.3)$$

et calculons ses valeurs en les points a_i . Nous avons, en indiquant par un point d'interrogation une valeur inconnue mais sans influence,

$$\begin{aligned} Q(a_0) &= \frac{1}{a_0 - a_d} \{f(a_0)(a_0 - a_d) - [?] \times 0\} = f(a_0), \\ Q(a_i) &= \frac{1}{a_0 - a_d} \{f(a_i)(a_i - a_d) - f(a_i)(a_i - a_0)\} = f(a_i) \quad (1 \leq i \leq d-1), \\ Q(a_d) &= \frac{1}{a_0 - a_d} \{[?] \times 0 - f(a_d)(a_d - a_0)\} = f(a_d). \end{aligned}$$

Maintenant, de $Q \in \mathcal{P}_d$ et $Q(a_i) = f(a_i)$ pour $i = 0, \dots, d$, nous déduisons que Q n'est autre que $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f](x)$ et c'est ce qu'il fallait établir. ■

Corollaire I.6. *Sous les mêmes hypothèses, pour tout couple d'indice (i, j) dans $\{0, \dots, d\}$ avec $i \neq j$,*

$$\begin{aligned} &(a_i - a_j) \mathbf{L}[a_0, a_1, \dots, a_d; f](x) \\ &= (x - a_j) \mathbf{L}[a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_d; f](x) - (x - a_i) \mathbf{L}[a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d; f](x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Démonstration. Cela provient immédiatement du théorème précédent, en tenant compte du fait que les points pouvant être permutés, nous pouvons mettre a_i à la place de a_0 et a_j à la place de a_d . ■

2.6 L'algorithme de Neville-Aitken

Posons $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{d+1}\}$ un ensemble de $d + 1$ réels distincts. Il faut prendre garde que les points sont ici indicés à partir de 1 et non pas, comme jusqu'à présent, à partir de 0. Nous définissons une famille de polynômes $p_{i,m}$ par récurrence sur $m \in \{0, 1, \dots, d\}$ comme suit

$$p_{i,0}(x) = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq d + 1; \quad (2.5)$$

puis,

$$p_{i,m+1}(x) = \frac{(x_i - x)p_{m+1,m}(x) - (x_{m+1} - x)p_{i,m}(x)}{x_i - x_{m+1}}, \quad m + 2 \leq i \leq d + 1. \quad (2.6)$$

Les polynômes $p_{i,m}$ sont définis seulement pour les couples d'indices (i, m) vérifiant la condition $d + 1 \geq i > m \geq 0$, nous disons que nous avons construit une famille triangulaire de polynômes.

Théorème I.7. Pour $0 \leq m \leq d$, nous avons

$$p_{i,m} = \mathbf{L}[x_1, x_2, \dots, x_m, x_i; f], \quad m+1 \leq i \leq d+1. \quad (2.7)$$

Lorsque $m = 0$ l'écriture $\mathbf{L}[x_1, x_2, \dots, x_m, x_i; f]$ doit être comprise comme $\mathbf{L}[x_i; f]$.

Remarquons que le cas $m = d$ dans la relation (2.7) nous donne

$$p_{d+1,d} = \mathbf{L}[x_1, x_2, \dots, x_{d+1}; f].$$

Démonstration. Nous démontrons (2.7) par récurrence sur m . Le résultat est vrai pour $m = 0$ à cause de la définition (2.5). Supposant que le résultat est vrai pour m , nous le montrons pour $m+1$. Appelons $Q(x)$ le terme de droite dans l'équation (2.6). L'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire

$$p_{m+1,m} = \mathbf{L}[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}; f] \quad \text{et} \quad p_{i,m} = \mathbf{L}[x_1, \dots, x_m, x_i; f],$$

de sorte que

$$Q(x) = \frac{(x_i - x)\mathbf{L}[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}; f](x) - (x_{m+1} - x)\mathbf{L}[x_1, \dots, x_m, x_i; f](x)}{x_i - x_{m+1}}$$

et nous déduisons de la relation de Neville-Aitken, via la formule (2.4) du corollaire, que

$$Q(x) = \mathbf{L}[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_i; f](x)$$

qui est la formule annoncée dans le cas $m+1$. ■

Algorithme I.8. Les données de l'algorithme sont (a) le vecteur $x = (x_1, \dots, x_{d+1})$ formé des points d'interpolation, (b) le vecteur $f = (f_1, \dots, f_{d+1})$ formé des valeurs d'interpolation (c) le point t en lequel nous voulons calculer $\mathbf{L}[x; f]$. On utilise une matrice P de dimension $(d+1) \times (d+1)$ que l'on initialise à 0. Le résultat est dans $P(d+1, d+1)$.

(a) Pour $j \in [1 : d+1]$, $P(j, 1) = f_j$.

(b) Pour $m \in [2 : d+1]$

Pour $i \in [m : d+1]$

$$p(i, m) = \frac{(x(i) - x) \times p(m-1, m-1) - (x(m-1) - x) \times p(i, m-1)}{(x(i) - x(m-1))}. \quad (2.8)$$

E 10 Déterminer le nombre de multiplications-divisions employé par l'algorithme de Neville-Aitken.

La table 4 reprend l'exemple de la table 3 précédent et compare les six plus mauvais coefficients obtenus par l'algorithme de Lagrange (Lag) aux coefficients correspondants produits par l'algorithme de Neville-Aitken (N-A) ci-dessus. Celui-ci améliore le résultat en moyenne par un facteur 10. L'algorithme reste instable (et le restera toujours s'agissant de points équidistants) mais cet exemple illustre bien le fait que l'algorithme lui-même et non seulement les données influe sur la stabilité.

| N-A | | | Lag | | | N-A | | | Lag | | |
|-----|-------------|-------------|-----|-------------|-------------|-----|-------------|-------------|-----|-------------|-------------|
| n | coef. x^n | coef. x^n | n | coef. x^n | coef. x^n | n | coef. x^n | coef. x^n | n | coef. x^n | coef. x^n |
| 17 | 0.0024 | 0.0175 | 21 | -0.002 | 0.0312 | 24 | -0.0019 | 0.021 | | | |
| 18 | 0.0023 | -0.0305 | 22 | 0.0026 | -0.0128 | 26 | 0.00226 | 0.00903 | | | |

TABLE 4 – Coefficients instables obtenus par une version de l’algorithme de Neville-Aitken.

§ 3. ETUDE DE L’ERREUR

3.1 L’énoncé du théorème

Comme le polynôme d’interpolation $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f]$ est égal à la fonction f en tous les points a_i , $i = 0, \dots, d$, il est naturel d’espérer que la différence entre f et ce polynôme aux autres points sera petite c’est-à-dire, que $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f]$ fournira une bonne approximation de $f(x)$, au moins en les points x pas trop éloignés des a_i .

Pour mesurer la qualité de cette approximation, nous devons estimer l’erreur E_x entre $f(x)$ et $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f](x)$, c’est-à-dire trouver une majoration de la valeur absolue de E_x . La figure fait apparaître cette erreur dans le cas $d = 1$. Cette erreur est une distance,

$$E_x = |f(x) - \mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f](x)|.$$

Nous devinons facilement qu’elle dépendra à la fois de la fonction f et de la position des points a_i . Le théorème suivant, et surtout son corollaire, fournissent une estimation simple de l’erreur.

Rappelons d’abord une notation. Nous disons qu’une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est de classe \mathcal{C}^{d+1} sur cet intervalle et on écrit $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$ lorsque f est $d + 1$ fois dérivable et que $f^{(d+1)}$, la dérivée $(d + 1)$ -ième est continue. Au point a (resp. b) il s’agit de dérivées à droite (resp. à gauche).

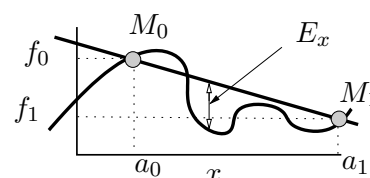
Théorème I.9. Soient $f \in \mathcal{C}^{d+1}([a, b])$ et $A = \{a_0, a_1, \dots, a_d\} \subset [a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi = \xi_x \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - \mathbf{L}[A; f](x) = \frac{f^{(d+1)}(\xi)}{(d+1)!} (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_d). \quad (3.1)$$

Lorsque $d = 0$ et $A = \{a_0\}$, nous avons $\mathbf{L}[a_0; f](x) = f(a_0)$ de sorte que le théorème I.9 affirme que, pour un x fixé dans $[a, b]$, il existe un point ξ – dépendant de x – tel que

$$f(x) - f(a_0) = f'(\xi)(x - a_0).$$

Il s’agit du théorème des accroissements finis dont le théorème I.9 est par conséquent une généralisation.



E 11 Soit $a \leq a_0 < a_1 \leq b$. Montrer que si f est une fonction strictement convexe deux fois dérivable sur $[a, b]$ alors $f(x) - \mathbf{L}[a_0, a_1; f](x) < 0$ pour tout $x \in]a_0, a_1[$. Que dire en dehors de l'intervalle $[a_0, a_1]$? Même question dans le cas des fonctions deux fois dérivables strictement concaves. Étudier le problème sans supposer que les fonctions soient deux fois dérivable.

Dans la pratique, le corollaire suivant est très souvent suffisant.

Corollaire I.10.

$$|f(x) - \mathbf{L}[A; f](x)| \leq \frac{1}{(d+1)!} |x - a_0| |x - a_1| \dots |x - a_d| \max_{t \in [a, b]} |f^{(d+1)}(t)|. \quad (3.2)$$

En particulier,

$$\max_{x \in [a, b]} |f - \mathbf{L}[A; f]| \leq \frac{1}{(d+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(d+1)}| \cdot \max_{x \in [a, b]} |w_A(x)|, \quad (3.3)$$

où w_A est le polynôme de degré $d + 1$ défini par

$$w_A(x) = (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_d). \quad (3.4)$$

Une conséquence de ce résultat sur le choix des points d'interpolation est esquissée à la partie 3.4.

E 12 * Considérons les réels $a_0 = 100$, $a_1 = 121$ et $a_2 = 144$ et la fonction f définie de \mathbb{R}^+ dans lui-même par $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer $\mathbf{L}[a_0, a_1, a_2; f](115)$ et montrer que

$$\left| \sqrt{115} - \mathbf{L}[a_0, a_1, a_2; f](115) \right| < 1,8 \cdot 10^{-3}.$$

(Sol. 1 p. 96.)

La démonstration du théorème I.9, assez délicate, sera donnée un peu plus loin après que nous nous serons munis de l'outil nécessaire qui est une généralisation du théorème de Rolle habituel.

3.2 Le théorème de Rolle généralisé

Rappelons que théorème de Rolle ordinaire affirme que si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ alors il existe c tel que $f'(c) = 0$. Ici, nous aurons besoin du

Théorème I.11 (de Rolle généralisé). *Si u est un fonction continue sur $[a, b]$ et k fois dérivable sur $]a, b[$ qui s'annule en $k + 1$ points x_i , $i = 0, \dots, k$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $u^{(k)}(c) = 0$.*

L'énoncé habituel du théorème de Rolle correspond au cas $k = 1$.

Démonstration. Elle consiste à appliquer un grand nombre de fois le théorème de Rolle ordinaire. Nous supposons, sans perte de généralité que $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq b$.

*. [2]



Étape 1. Puisque $u(x_0) = 0 = u(x_1)$, le théorème de Rolle nous dit qu'il existe $c_0 \in]x_0, x_1[$ tel que $u'(c_0) = 0$. De $u(x_1) = 0 = u(x_2)$ nous tirons l'existence de $c_1 \in]x_1, x_2[$ tel que $u'(c_1) = 0$ et, en continuant ainsi, nous construisons k réels $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \dots, k-1$, tels que $u'(c_i) = 0$.

Étape 2. Nous reprenons le même raisonnement mais en l'appliquant à la fonction u' . De $u'(c_0) = u'(c_1) = 0$, nous tirons l'existence de $c_0^2 \in]c_0, c_1[$ tel que $u''(c_0^2) = 0$ et, en exploitant de la même manière tous les points c_i , nous obtenons $k-1$ réels $c_i^2 \in]c_i, c_{i+1}[$, $i = 0, \dots, k-1$.

Aux étapes suivantes, nous appliquerons le théorème de Rolle à u'' puis u''' jusqu'à l'appliquer à l'étape $k+1$ à $u^{(k)}$ et arriver à l'existence d'un réel c_1^{k+1} dans $]a, b[$ tel que $u^{(k+1)}(c_1^{k+1}) = 0$ et le théorème est établi. ■

E 13 Rédiger une démonstration par récurrence du théorème I.11.

3.3 Démonstration du théorème I.9

Démonstration. Fixons $x \in [a, b]$. Si $x \in A$, n'importe quel ξ convient. (Dans ce cas, la formule donne seulement $0 = 0$). Nous supposons que $x \notin A$. Notons w le polynôme défini par $w(t) = (t - a_0) \dots (t - a_d)$ et prenons $K = K(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) - \mathbf{L}[A; f](x) = K(x)w(x). \quad (3.5)$$

Un tel nombre existe ; il suffit de prendre

$$K(x) = \frac{f(x) - \mathbf{L}[A; f](x)}{w(x)}, \quad (3.6)$$

qui est bien défini car, comme $x \neq a_i$ ($i = 0, \dots, d$), le dénominateur ne s'annule pas.

Considérons maintenant le fonction u définie sur l'intervalle $[a, b]$ par la relation

$$u(t) = f(t) - \mathbf{L}[A; f](t) - K(x)w(t), \quad t \in [a, b]. \quad (3.7)$$

Il faut prendre garde ici que x est un paramètre fixé et t est la variable. Puisque $f \in \mathcal{C}^{d+1}[a, b]$, nous avons aussi $u \in \mathcal{C}^{d+1}[a, b]$. De plus,

$$u(a_i) = f(a_i) - \mathbf{L}[A; f](a_i) - K(x) \times 0 = f(a_i) - f(a_i) = 0, \quad 0 \leq i \leq d;$$

et, par définition de $K(x)$,

$$u(x) = f(x) - \mathbf{L}[A; f](x) - K(x)w(x) = 0.$$

Il suit que u s'annule en $d+2$ points, à savoir les $d+1$ points de A auxquels s'ajoute le point x . Le théorème I.11 de Rolle généralisé nous permet d'affirmer l'existence de $\xi \in]a, b[$ tel que $u^{(d+1)}(\xi) = 0$. Nous pouvons facilement calculer la dérivée $(d+1)$ -ième de u . D'abord, puisque $\mathbf{L}[A; f](t)$ est un polynôme de degré d , sa dérivée $(d+1)$ -ième est nulle. Quant à $w(t)$, puisque

$$w(t) = (t - a_0)(t - a_1) \dots (t - a_d) = t^{d+1} + (\text{polynôme de degré } \leq d).$$

Sa dérivée $(d+1)$ -ième, est la constante $(d+1)!$. Finalement,

$$u^{d+1}(t) = f^{(d+1)}(t) - (d+1)!K(x). \quad (3.8)$$

En prenant $t = \xi$, il vient

$$0 = f^{(d+1)}(\xi) - (d+1)!K(x). \quad (3.9)$$

Revenant à la définition de $K(x)$, nous obtenons

$$f(x) - \mathbf{L}[A; f](x) = K(x)w(x) = \frac{f^{(d+1)}(\xi)}{(d+1)!}(x-a_0)\dots(x-a_d). \quad (3.10)$$

Nous avons bien trouvé un nombre ξ dans $]a, b[$ vérifiant la formule annoncée. ■

3.4 Conséquence de la formule d'erreur sur le choix des points d'interpolation

Le second corollaire du théorème I.9 montre que si nous voulons rendre l'erreur entre la fonction f et son polynôme interpolation la plus petite possible et que nous sommes libres de choisir les points d'interpolation* $a_i, i = 0, \dots, d$ comme nous le voulons dans $[a, b]$, alors nous avons intérêt à choisir ces points de telle sorte que la quantité $\max_{x \in [a, b]} |w_A|$ soit la plus petite possible, voir (3.4). Il existe un unique ensemble de points qui minimise cette quantité. On les appelle les **points de Chebyshev**† en hommage au mathématicien russe qui les a découverts en 1874. Lorsque $[a, b] = [-1, 1]$ ces points sont donnés par la formule

$$a_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(d+1)}\pi\right), \quad i = 0, \dots, d. \quad (3.11)$$

L'exercice 33 montre comment ces points sont obtenus. La figure 1 compare la répartition des points de Chebyshev et des points équidistants, donnés lorsque $[a, b] = [-1, 1]$ par la formule $a_i = 1 + 2i/d$, lorsque $d = 50$. Remarquons que les premiers tendent à se densifier lorsqu'on approche des extrémités de l'intervalle.

E 14 La cas où $[a, b]$ est un intervalle quelconque (avec $a < b$) se déduit facilement du cas $a = -1$ et $b = 1$. Comment ?

3.5 Précision de l'interpolant et nombre de points d'interpolation

Il est naturel de penser que plus nous augmenterons le nombre de points d'interpolation, meilleure sera la précision de l'approximation fournie par le polynôme d'interpolation de Lagrange. Cette intuition est renforcée par les exemples de la table

*. Le choix de points d'interpolation peut être limité lorsque les valeurs $f(a_i)$ proviennent de mesures obtenues expérimentalement.

†. P. L. Chebyshev (1821-1894) est un des pères de la théorie de l'approximation des fonctions.

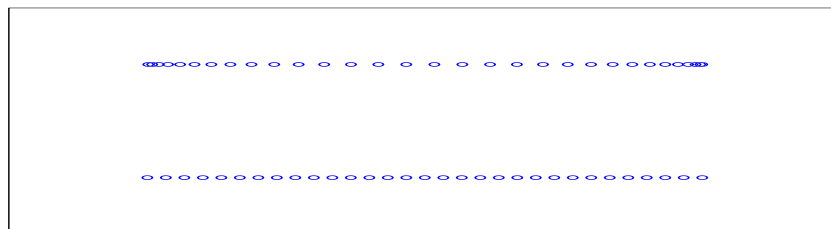


FIGURE 1 – Répartition des points de chebyshev et des points equidistants ($d = 30$).

1 (p. 8). Pourtant, si cette idée reste correcte pour une classe importante de fonctions* et pour des points d'interpolation correctement choisis, elle est fautive dans le cas général. L'exemple classique a été donné par le mathématicien allemand Runge (1856-1927) qui a montré en 1901 que les polynômes d'interpolation aux points équidistants de la fonction f définie par $f(x) = 1/(1+x^2)$ donnaient des résultats très mauvais. La table 5 présente le graphe de la fonction d'erreur entre le polynôme d'interpolation aux points équidistants et la fonction de Runge modifiée $f(x) = 1/(1+100x^2)$ pour quelques valeurs de d . Ici nous avons modifié la fonction de Runge classique pour accélérer le phénomène de divergence. Le problème n'est évidemment pas limité à la fonction de Runge. On peut démontrer que, quels que soient les points d'interpolation choisis, il existe une fonction continue qui ne se laisse pas approcher par ses polynômes d'interpolation.

Par contre, il est possible de montrer que les polynômes d'interpolation aux points de Chebyshev convergent vers la fonction interpolée, lorsque le nombre de points croît indéfiniment, sous la seule condition que la fonction soit dérivable, de dérivée bornée. Il s'agit ici de **convergence uniforme** des fonctions. Cela signifie que la suite de nombres réels positifs $\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f](x)|$, $d \in \mathbb{N}$, converge vers 0 lorsque $d \rightarrow \infty$. La convergence cependant peut être lente. La table 6 reprend l'exemple de la fonction de Runge et donne la fonction d'erreur entre cette fonction et le polynôme d'interpolation aux points de Chebyshev.

§ 4. POLYLIGNES

4.1 Subdivisions

Nous appelons **subdivision de longueur d** de $I = [a, b]$ une suite (strictement) croissante de $d + 1$ éléments de I , $\sigma = (a_0, \dots, a_d)$ telle que $a_0 = a$ et $a_d = b$. Autrement dit,

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{d-1} < a_d = b. \quad (4.1)$$

*. Le lecteur trouvera à l'exercice 36 une classe assez simple de fonctions pour lesquelles les polynômes d'interpolation de Lagrange fournissent toujours d'excellentes approximations.

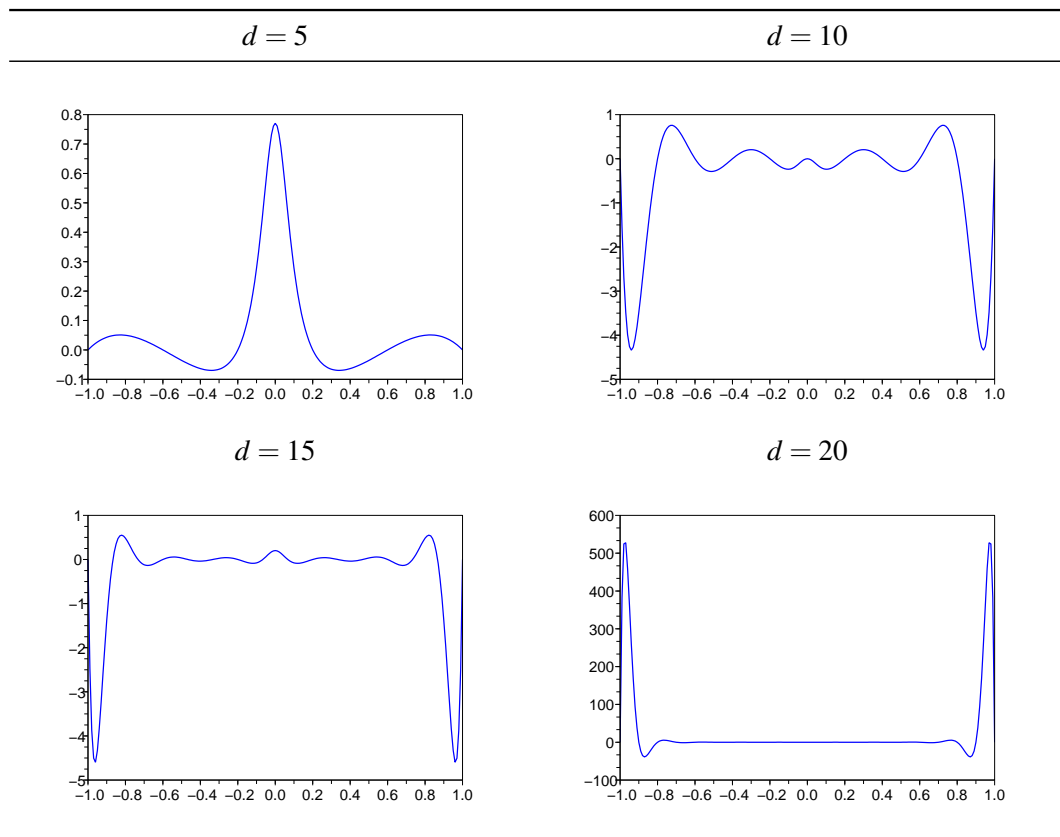


TABLE 5 – Graphe de la fonction d'erreur entre la fonction $f(x) = \frac{1}{1+100x^2}$ et ses polynôme d'interpolation de Lagrange aux points équidistants lorsque $d = 5, 10, 15$ et 20 .

A chaque subdivision σ de longueur d de $[a, b]$ est associée une **partition** de l'intervalle $[a, b]$,

$$[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{d-2}, a_{d-1}] \cup [a_{d-1}, a_d]. \quad (4.2)$$

La distance entre deux points successifs a_i et a_{i+1} est noté h_i et l'**écart** h de la subdivision σ est la plus grande des distances entre deux points successifs,

$$h = \max_{i=0, \dots, d} h_i = \max_{i=0, \dots, d-1} (a_{i+1} - a_i). \quad (4.3)$$

Ces définitions sont mises en évidence sur la figure 2.

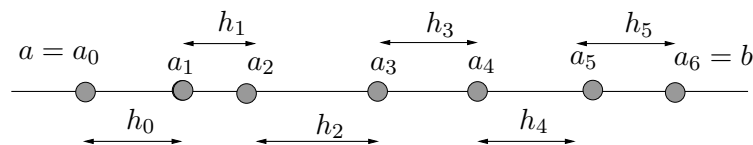


FIGURE 2 – Subdivision et écart d'une subdivision.

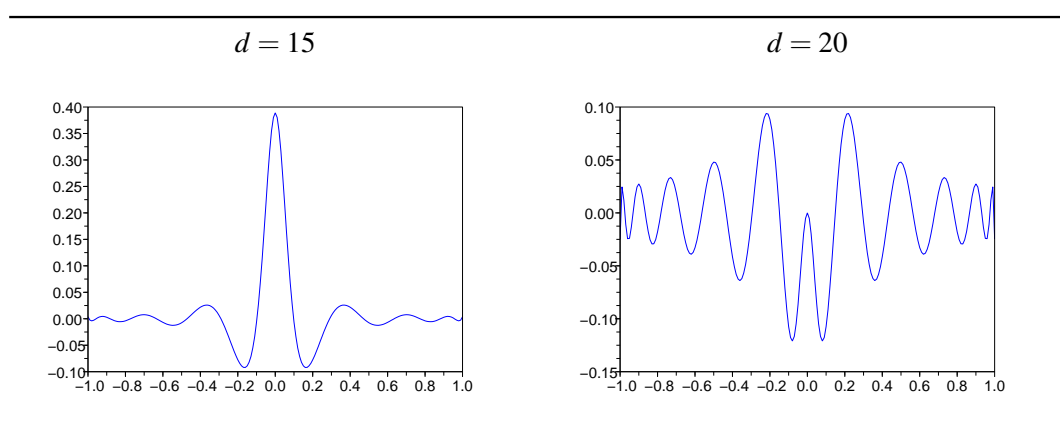


TABLE 6 – Graphe de la fonction d’erreur entre la fonction $f(x) = \frac{1}{1+100x^2}$ et ses polynômes d’interpolation de Lagrange aux points de Chebyshev lorsque $d = 15$ et $d = 20$

Lorsque les distances h_i sont constantes, $h_i = (b - a)/d$, la subdivision est formée des points équidistants

$$\sigma = \left(a + i \frac{b-a}{d} : i = 0, \dots, d \right).$$

Nous disons qu’une fonction g est **affine par morceaux** sur l’intervalle I s’il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_d)$ de l’intervalle I telle que la restriction de g à chacun des sous-intervalles défini par **sigma** soit une fonction affine, c’est-à-dire pour $i = 0, \dots, d - 1$, il existe des coefficients α_i et β_i tels que

$$x \in [a_i, a_{i+1}[\implies g(x) = \alpha_i x + \beta_i.$$

Remarquons que cette définition n’impose aucune condition sur la valeur de g à l’extrémité $b = a_d$ de l’intervalle.

E 15 A quelles conditions (sur les nombres α_i et β_i) la fonction g est-elle continue? (continue et convexe)? Que dire de la dérivabilité des fonctions affines par morceaux?

4.2 Fonctions polyignes

Soit σ une subdivision de $[a, b]$ et $f = (f_0, \dots, f_d)$ une suite de $d + 1$ valeurs quelconques. Nous pouvons construire les polynômes de Lagrange

$$\mathbf{L}[a_i, a_{i+1}; f_i, f_{i+1}], \quad i = 0, \dots, d - 1,$$

c’est-à-dire les uniques polynômes de degrés inférieur ou égal à 1 qui prennent les valeurs f_i au point a_i et f_{i+1} au point a_{i+1} . La fonction **polyligne** associée à la subdivision σ et aux valeurs f , notée $\mathbf{PL}[\sigma, f]$, est définie sur chacun des sous-intervalles de la subdivision par la relation

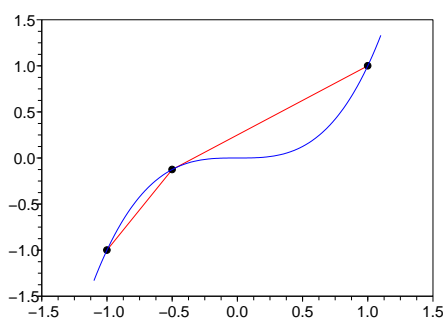
$$\begin{cases} \mathbf{PL}[\sigma, f](x) = \mathbf{L}[a_i, a_{i+1}; f_i, f_{i+1}](x), & x \in [a_i, a_{i+1}[\\ \mathbf{PL}[\sigma, f](b) = f_d. \end{cases} \quad (4.4)$$

Lorsque les valeurs f_i sont les valeurs d'une fonction f aux points a_i ,

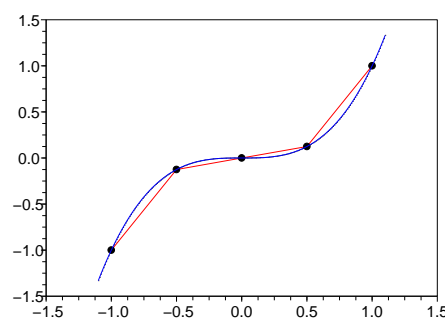
$$y_i = f(a_i), \quad i = 0, \dots, d,$$

nous disons que $\mathbf{PL}[\sigma; f]$ est la (fonction) polyligne interpolant la fonction f aux points de la subdivision σ .

Les deux schémas dans le tableau 7 font apparaître en rouge les graphes des fonctions $\mathbf{PL}[\sigma; f]$ lorsque $f(x) = x^3$ (tracé en bleu) et (7 : 1) $\sigma = (-1, -0.5, 1)$ puis (7 : 2) $\sigma = (-1, -0.5, 0, 0.5, 1)$.



(1)



(2)

TABLE 7 – Deux exemples de polylignes.

Théorème I.12. $\mathbf{PL}[\sigma, f]$ est une fonction affine par morceaux continue satisfaisant

$$\mathbf{PL}[\sigma, f](a_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, d. \quad (4.5)$$

Démonstration. D'après la définition même, $\mathbf{PL}[\sigma, f]$ est une fonction affine par morceaux. D'autre part,

$$i \in \{0, \dots, d-1\} \implies \mathbf{PL}[\sigma, f](a_i) = \mathbf{L}[a_i, a_{i+1}; f_i, f_{i+1}](a_i) = f_i,$$

et nous avons aussi, toujours par définition, $\mathbf{PL}[\sigma, f](a_d) = f_d$. La seule propriété que nous devons démontrer est la continuité. Les éventuels problèmes de continuité d'une fonction affine par morceaux se trouvent aux points de jonction des sous-intervalles de la subdivision, ici, aux points a_i , $i = 1, \dots, d$. Commençons par prendre un point a_i avec $1 \leq i \leq d-1$ de sorte que nous excluons le cas $a_i = a_d$. Pour montrer la continuité de $\mathbf{PL}[\sigma, f]$ en ce point, il suffit de s'assurer que les limites à gauche et à droite coïncident (et sont égales à la valeur de la fonction f au point). Or, d'une part,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a_i^+} \mathbf{PL}[\sigma, f](x) &= \lim_{x \rightarrow a_i^+} \mathbf{L}[a_i, a_{i+1}; f_i, f_{i+1}](x) \\ &= \mathbf{L}[a_i, a_{i+1}; f_i, f_{i+1}](a_i) = f(a_i) = \mathbf{PL}[\sigma; f](a_i), \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a_i^-} \mathbf{PL}[\sigma, f](x) &= \lim_{x \rightarrow a_i^-} \mathbf{L}[a_{i-1}, a_i; f_{i-1}, f_i](x) \\ &= \mathbf{L}[a_{i-1}, a_i; f_{i-1}, f_i](a_i) = f(a_i) = \mathbf{PL}[\sigma, f](a_i).\end{aligned}$$

Les deux limites coïncident et sont égales à $f(a_i)$ et la fonction est donc bien continue au point a_i . Il reste à étudier le cas $i = d$, c'est-à-dire $a_d = b$, qui se traite de la même manière, mis à part le fait que nous étudions uniquement la limite à gauche. Notons qu'il n'y a pas de problème de continuité au point a_0 . ■

Théorème I.13. *Si f est un polynôme de degré au plus 1, c'est-à-dire une fonction affine, alors $\mathbf{PL}[\sigma; f] = f$.*

Démonstration. Cela provient du fait que lorsque f est un polynôme de degré au plus 1, nous avons $\mathbf{L}[a_i, a_{i+1}; f] = f$ si bien que f elle-même vérifie les conditions (4.4) de la définition. ■

E 16 Montrer que l'application qui à une fonction f définie sur I — $f \in \mathcal{F}(I)$ — fait correspondre $\mathbf{PL}[A; f] \in \mathcal{F}(I)$ est une application linéaire.

E 17 Montrer que si f est une fonction polynomiale telle que $\mathbf{PL}[\sigma; f] = f$ alors f est nécessairement de degré au plus 1.

E 18 Expliquer pourquoi la fonction $\mathbf{PL}[\sigma, f]$ n'est pas la seule fonction affine par morceaux A vérifiant $A(a_i) = f(a_i)$, $i = 0, \dots, d$. Quelle propriété supplémentaire, non formulée dans le théorème, caractérise-t-elle $\mathbf{PL}[\sigma, f]$?

4.3 Approximation des fonctions continûment dérivables par les fonctions polygones

A la différence des polynômes d'interpolation de Lagrange, les fonctions polygones fournissent une bonne approximation de toutes les fonctions continues, pour peu que l'écart de la subdivision soit suffisamment petit. Cela n'est pas surprenant. Les polygones sont des objets beaucoup plus souples que les polynômes. Nous pouvons changer la valeur d'une polygone au point a sans rien changer à la valeur au point b ; par contre une petite modification de la valeur d'un polynôme en a peut provoquer un grand écart de valeur en b . Nous pouvons dire que les valeurs d'un polynôme sont solidaires les unes des autres tandis que celles d'une polygone – en des points suffisamment éloignés – sont complètement indépendantes. Le prix de la souplesse des polygones est cependant lourd à payer : ce sont des fonctions très peu régulières, elles sont continues mais non dérivables sur $[a, b]$. Plus précisément, sauf cas exceptionnel, une fonction polygone n'est dérivable en aucun des points de jonction. Un autre inconvénient peut-être plus sérieux est que la précision des interpolants polygones est limitée. Quelle soit la fonction non affine considérée, l'erreur globale entre la fonction interpolée et la fonction polygone ne pourra jamais décroître vers 0 que comme la suite $1/d^2$ où d dénote la longueur de la



subdivision utilisée*. Au contraire, les polynômes d'interpolation bénéficient des propriétés de la fonction interpolée et, si les fonctions sont suffisamment régulières, l'erreur pourra décroître aussi vite qu'une suite géométrique r^d avec $0 < r < 1$ où d est le degré du polynôme d'interpolation†.

Nous nous limiterons ici à démontrer un théorème sur l'approximation des fonctions dérivables, de dérivées continues. Le cas des fonctions seulement continues sera traité plus bas (4.5) en complément. Une autre estimation, concernant les fonctions deux fois continûment dérivables est proposée à l'exercice 39.

Théorème I.14. Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a, b]$ et σ une subdivision de $[a, b]$ d'écart h . Pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - \mathbf{PL}[\sigma; f](x)| \leq h \cdot \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|. \quad (4.6)$$

Démonstration. L'inégalité à démontrer est évidente lorsque x est l'un des points de la subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_d)$ car alors $f(x) = \mathbf{PL}[\sigma; f](x)$. Nous supposons que $x \neq a_i$, $i = 0, \dots, d + 1$. Dans ce cas, x appartient à un et un seul des sous-intervalles (ouverts) définis par la subdivision, disons, $x \in]a_j, a_{j+1}[$. Il suit que

$$f(x) - \mathbf{PL}[\sigma; f](x) = f(x) - \mathbf{L}[a_j, a_{j+1}; f](x) = f(x) - f(a_j)\ell_0(x) - f(a_{j+1})\ell_1(x), \quad (4.7)$$

où ℓ_0 et ℓ_1 sont les polynômes fondamentaux de Lagrange,

$$\ell_0(x) = \frac{x - a_{j+1}}{a_j - a_{j+1}} \quad \text{et} \quad \ell_1(x) = \frac{x - a_j}{a_{j+1} - a_j}.$$

Mais nous avons vu – c'est l'équation (1.19) – que la somme des polynômes fondamentaux de Lagrange est toujours égale à 1, ici, $\ell_0 + \ell_1 = 1$. En utilisant cette relation, nous obtenons

$$f(x) - \mathbf{PL}[\sigma; f](x) = [f(x) - f(a_j)]\ell_0(x) + [f(x) - f(a_{j+1})]\ell_1(x) \quad (4.8)$$

$$\implies |f(x) - \mathbf{PL}[\sigma; f](x)| \leq |f(x) - f(a_j)|\ell_0(x) + |f(x) - f(a_{j+1})|\ell_1(x). \quad (4.9)$$

Maintenant, il résulte de $x \in]a_j, a_{j+1}[$ que $|x - a_j| \leq |a_{j+1} - a_j|$ et ceci entraîne $|\ell_1(x)| \leq 1$. Un argument similaire assure que $|\ell_0(x)| \leq 1$. En reportant ces deux nouvelles informations dans l'inégalité ci-dessus, il vient

$$|f(x) - \mathbf{PL}[\sigma; f](x)| \leq |f(x) - f(a_j)| + |f(x) - f(a_{j+1})|. \quad (4.10)$$

L'inégalité des accroissements finis donne finalement

$$|f(x) - \mathbf{PL}[\sigma; f](x)| \leq |x - a_j| \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| + |x - a_{j+1}| \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \quad (4.11)$$

$$\leq (x - a_j) \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| + (a_{j+1} - x) \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \quad (4.12)$$

$$\leq (a_{j+1} - a_j) \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \leq h \cdot \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|. \quad (4.13)$$

*. Pour une explication de ce phénomène, le lecteur pourra consulter le commentaire de l'exercice 39

†. Voir l'exercice 36 et le commentaire qui le suit.

La dernière égalité provenant de la définition de l'écart d'une subdivision. L'inégalité annoncée a été établie. ■

Corollaire I.15. Si σ^d , $d \in \mathbb{N}$, est une suite de subdivisions de longueur d de $[a, b]$ dont l'écart tend vers 0 lorsque d tend vers ∞ alors

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{PL}[\sigma^d; f] = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (4.14)$$

S'agissant d'une suite de subdivisions, à chaque changement de d , les points de la subdivision changent, excepté le premier qui doit toujours être égal à a et le dernier qui doit toujours être égal à b ,

$$\sigma^d = (a, a_1^d, a_2^d, \dots, a_{d-1}^d, b).$$

Naturellement, l'écart de la subdivision σ^d dépend de d .

Corollaire I.16. Lorsque σ^d est la subdivision formée des points équidistants

$$a_i = a + i \cdot \frac{b-a}{d}, \quad i = 0, \dots, d+1, \quad d \in \mathbb{N}^*,$$

alors

$$|f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| \leq \frac{b-a}{d} \cdot \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0, \quad x \in [a, b]. \quad (4.15)$$

E 19 Les convergences des deux résultats précédents sont-elles aussi des convergences uniformes. Autrement dit, a-t-on

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| = 0 ?$$

4.4 Représentation

Nous allons déterminer des fonctions $b_i = b_i^\sigma$ adaptées à la subdivision σ qui permettent une représentation simple du polygone $\mathbf{PL}[\sigma; f]$. Pour que tous les points a_i , $i = 0, \dots, d$ jouent un rôle semblable, Nous sommes amené à compléter la subdivision σ par deux points a_{-1} et a_{d+1} comme indiqué sur la figure 3. Ces points peuvent être choisis librement sous les seules conditions que $a_{-1} < a = a_0$ et $a_{d+1} > a_d = b$.

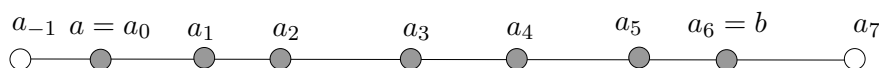
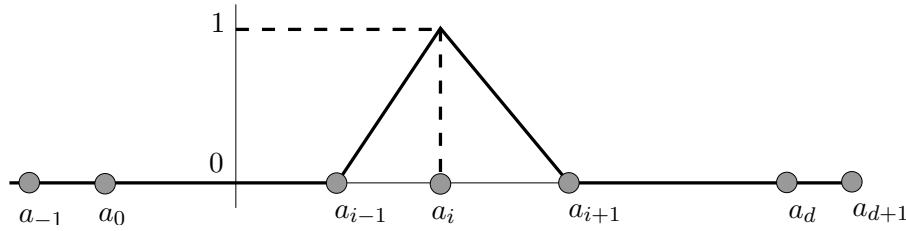


FIGURE 3 – Subdivision complétée des points a_{-1} et a_{d+1} .

Une fois la subdivision complétée, nous définissons pour $i = 0, \dots, d$ la fonction b_i sur \mathbb{R} par le graphe donné dans la figure 4.4.

FIGURE 4 – Graphe de la fonction b_i .

En formule, la fonction b_i est définie par

$$b_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a_{i-1}, \\ \frac{x-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}} & \text{if } a_{i-1} \leq x \leq a_i, \\ \frac{x-a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}} & \text{if } a_i \leq x \leq a_{i+1}, \\ 0 & \text{if } x \geq a_{i+1}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Les fonctions b_i , $i = 0, \dots, d$, sont affines par morceaux, continues, positives ou nulles et bornées par 1,

$$0 \leq b_i(x) \leq 1, \quad x \in [a, b], \quad (4.17)$$

et s'annulent en tout les points a_j sauf lorsque $j = i$ auquel cas nous avons $b_i(a_i) = 1$. Remarquons aussi qu'elles nulles en dehors de l'intervalle $[a_{i-1}, a_{i+1}]$. Cet intervalle est appelé le **support** de la fonction b_i .

Théorème I.17. $\mathbf{PL}[\sigma; f] = \sum_{i=0}^d f_i b_i$.

Démonstration. Appelons g la fonction définie par la partie droite de l'égalité à démontrer. Il suffit d'établir que pour tous $j = 1, \dots, d-1$ et $x \in [a_j, a_{j+1}[$ nous avons $g(x) = \mathbf{L}[a_j, a_{j+1}; f](x)$ ainsi que $g(a_d) = f(a_d)$ car la définition même de $\mathbf{PL}[\sigma; f]$ nous donnera alors $g = \mathbf{PL}[\sigma; f]$. Prenons donc $j \in \{1, \dots, d-1\}$ et $x \in]a_j, a_{j+1}[$. Remarquons que nous considérons ici l'intervalle ouvert $]a_j, a_{j+1}[$ alors que l'égalité doit être établie sur l'intervalle semi fermé $[a_j, a_{j+1}[$. Nous traiterons à part le cas $x = a_j$. Puisque $x \in]a_j, a_{j+1}[$, nous avons $b_i(x) = 0$ sauf si $i = j$ ou $i = j+1$. Nous en déduisons en tenant compte de (4.16) que

$$g(x) = f_j b_j(x) + f_{j+1} b_{j+1}(x) = f_j \frac{x-a_{j+1}}{a_j-a_{j+1}} + f_{j+1} \frac{x-a_j}{a_{j+1}-a_j} = \mathbf{L}[a_j, a_{j+1}; f](x),$$

qui est bien l'égalité obtenir. Pour la cas particulier où $x = a_j$, il suffit de remarquer que $b_i(a_j) = \delta_{ij}$, par conséquent $g(a_j) = f_j = \mathbf{L}[a_j, a_{j+1}; f](a_j)$. Le même raisonnement est valable pour a_d et la démonstration est terminée. ■

Corollaire I.18. $\sum_{i=0}^d b_i = 1$.

Démonstration. Il suffit de prendre la fonction constant égale à 1 (qui est un polynôme de degré ≤ 1) dans le théorème ci-dessus et d'utiliser ensuite le théorème I.13. ■

COMPLÉMENT

4.5 * Approximation des fonctions continues par des fonctions polygones

Théorème I.19. Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et σ^d , $d \in \mathbb{N}$, une suite de subdivisions de $[a, b]$. Nous supposons que la longueur de σ^d est d et que l'écart de σ^d tend vers 0 lorsque d tend vers ∞ . La suite des polygones $\mathbf{PL}[\sigma^d; f]$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Autrement dit,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| = 0. \quad (4.18)$$

La démonstration utilise la notion d'**uniforme continuité**. Rappelons qu'une fonction f définie sur un intervalle I est uniformément continue sur I si la distance entre les valeurs $f(x)$ et $f(y)$ est petite chaque fois que la distance entre x et y est assez petite. De manière précise, pour tout réel positif ε , il doit exister un réel positif η , dépendant de ε , de telle sorte que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour tout couple de valeurs (x, y) dans I satisfaisant $|x - y| \leq \eta$. Il y a une manière plus commode de présenter la propriété d'uniforme continuité. Notons

$$\omega_f(\eta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : (x, y) \in I \text{ et } |x - y| \leq \eta\},$$

de sorte que $\omega_f(\eta)$ est la plus grande des distances possibles entre $f(x)$ et $f(y)$ lorsque les deux éléments x et y de I sont distants d'au plus η . Dans ces conditions, nous avons

$$f \text{ uniformément continue sur } I \iff \lim_{\eta \rightarrow 0} \omega_f(\eta) = 0.$$

La fonction ω_f s'appelle le **module de continuité** de f . Elle joue un rôle important en analyse.

Dans la définition de la continuité ordinaire, nous parlons de continuité de f en un point x_0 qui est fixe et cherchons à vérifier l'existence d'un η , dépendant de ε et de x_0 , tel que $|f(y) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ lorsque $|y - x_0| \leq \eta$. Dans le cas de la continuité uniforme, deux valeurs varient, x et y , contre une seule, y , dans le cas de la continuité ordinaire. Malgré cette différence importante, un théorème fondamental de l'analyse, connu sous le nom de **théorème de Heine**, établit que *si I est un intervalle fermé borné, c'est-à-dire de la forme $I = [a, b]$, alors toute fonction continue est aussi uniformément continue*. La condition sur la forme de l'intervalle I est importante et la propriété est fautive en général dans le cas des autres types d'intervalle.

Démonstration (du théorème I.19). Nous devons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance, il existe $d_0 \in \mathbb{N}$, d_0 dépendant de ε , tel que

$$d \geq d_0 \implies \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| \leq \varepsilon. \quad (4.19)$$

Nous noterons $\sigma^d = (a_0^d, a_1^d, \dots, a_{d-1}^d, a_d^d)$ avec $a_0^d = a$ et $a_d^d = b$. L'écart de σ^d sera noté h_d . Soit x un élément quelconque de $[a, b]$, x se trouve dans un unique intervalle $[a_j^d, a_{j+1}^d[$. Reprenons la relation (4.10),

$$|f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| \leq |f(x) - f(a_j^d)| + |f(x) - f(a_{j+1}^d)|.$$



Puisque $|x - a_j^d| \leq h_d$ et $|x - a_{j+1}^d| \leq h_d$, l'inégalité ci-dessus et la définition du module de continuité ω_f donne

$$|f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| \leq 2\omega_f(h_d).$$

Puisque cette estimation est valable pour tout x dans $[a, b]$, nous avons aussi

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| \leq 2\omega_f(h_d). \quad (4.20)$$

Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle y est aussi, d'après le théorème de Heine, uniformément continue, de sorte que $\lim_{\eta \rightarrow 0} \omega_f(\eta) = 0$ et comme $\lim_{d \rightarrow \infty} h_d = 0$ par hypothèse, par composition des limites, $\lim_{d \rightarrow \infty} 2\omega_f(h_d) = 0$ ce qui entraîne à son tour, en vue de (4.20)

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| = 0,$$

ce qu'il fallait établir. ■

E 20 Dans la démonstration précédente, il faudrait en toute rigueur écrire $a_{j_d}^d$ et $a_{j_d+1}^d$ plutôt que a_j^d et a_{j+1}^d . Pourquoi ?

E 21 Soit, pour tout $d \geq 2$, $\sigma^d = (a = a_0^d, a_1^d, \dots, a_{d-1}^d, a_d^d = b)$ une subdivision de longueur d de $[a, b]$ et d'écart h_d . On suppose que h_d tend vers 0 lorsque $d \rightarrow \infty$. Soient $y^d = (y_0^d, \dots, y_d^d)$ une suite de $d+1$ valeurs et f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalents.

(a) $\lim_{d \rightarrow \infty} \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; y^d]| = 0.$

(b) $\lim_{d \rightarrow \infty} \max_{i=0, \dots, d} |y_i^d - f(a_i^d)| = 0.$

On prendra garde que $\mathbf{PL}[\sigma^d; y^d]$ n'est pas $\mathbf{PL}[\sigma^d; f]$.

4.6 Extension

Plutôt que de se limiter à des fonctions affines par morceaux, c'est-à-dire polynomiales de degré 1 par morceaux, il est naturel de considérer des fonctions polynomiales de degré d par morceaux. La construction donnée ci-dessus s'étend immédiatement à ce cas. Il suffit simplement de remplacer les polynômes de Lagrange de degré au plus 1, $\mathbf{L}[a_i, a_{i+1}; f]$ par des polynômes d'interpolation de degré au plus d , $\mathbf{L}[a_i, a_{i,1}, \dots, a_{i,d-1}, a_{i+1}; f]$ où les $a_{i,j}$, $j = 1, \dots, d-1$ sont des points intérieurs à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$. Cette extension de la théorie ne présente aucune difficulté. Les résultats de cette section s'étendent directement au cas général. Les lecteurs intéressés peuvent s'entraîner à rédiger les démonstrations. Il est plus fécond de se concentrer sur l'insuffisance majeure des polygones, à savoir d'être non différentiables. En augmentant le degré des polynômes sur chaque sous-intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, il est possible de les raccorder pour obtenir des fonctions plusieurs fois dérivables sur $[a, b]$. C'est la théorie des fonctions splines qui joue un rôle important en analyse numérique mais que nous ne pourrons pas étudier dans ce cours.

§ 5. EXERCICES ET PROBLÈMES

22 Un problème d'interpolation général. Trouver une condition sur la paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la proposition suivante soit vraie : Quel que soit le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ il existe un et une seule $p \in \mathcal{P}_2$ tel que $p(a) = \alpha$, $p(b) = \beta$, $p(a) + p'(b) = \gamma$.

23 Un problème d'interpolation des dérivées. Soient a, b et c trois nombres réels. Montrer que quels que soient les réels α, β, γ il existe un et un seul polynôme $p \in \mathcal{P}_2$ tel que $p(a) = \alpha$, $p'(b) = \beta$ et $p''(c) = \gamma$. (Sol. 4 p. 97)

24 Un exemple. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f(x) = 1/(1+x)$ par rapport aux points $0, 3/4, 1$. Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée. Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(1/2)$ et $\mathbf{L}[0, 3/4, 1; f](1/2)$.

25 Propriétés générales de l'interpolation. Soit $I = [a, b]$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $A = \{a_0, \dots, a_d\} \in I$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) i) si $\mathbf{L}[A; f]$ est un polynôme constant alors d est nécessairement égal à 0. ii) si $d > 1$ et $\mathbf{L}[A; f]$ est un polynôme constant alors f est nécessairement constante.

(b) Si $d = 1$ et f est une fonction croissante (resp. décroissante) sur I alors $\mathbf{L}[A; f]$ est croissante (resp. décroissante) sur I .

(c) Même question lorsque $d = 2$.

26 Interpolation et division euclidienne. Rappelons que la division euclidienne d'un polynôme V par un polynôme W non nul consiste à écrire (de manière unique) V sous la forme $V = qW + r$ où q et r sont deux polynômes, le second vérifiant $\deg(r) < \deg(W)$. On appelle q le quotient de la division euclidienne de V et W et r le reste de cette division.

(a) Montrer que si $W(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_d)$ alors $r = \mathbf{L}[A; V]$.

(b) Utiliser une division euclidienne pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ aux points $-1, 0, 1, 2$. Vérifier le résultat obtenu.

27 Formule de Simpson. Soient $a < b$ deux réels distincts. On pose $m = \frac{a+b}{2}$.

(a) Donner la formule de Lagrange pour le polynôme d'interpolation $\mathbf{L}[a, m, b; f]$.

(b) Démontrer que

$$\int_a^b \mathbf{L}[a, m, b; f](x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(m) + f(b)].$$

NOTE. — Le résultat obtenu s'appelle la **formule de Simpson**. Nous l'étudierons dans le chapitre suivant (II.2.3).

28 Invariance des polynômes d'interpolation par les bijections affines. Soit h une bijection affine, $h(x) = \alpha x + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Soient $A = \{a_0, \dots, a_d\}$ et f une fonction définie sur \mathbb{R} .

A) Montrer que

$$\mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; f \circ h](x) = \mathbf{L}[h(a_0), \dots, h(a_d); f](h(x)).$$

On commencera par expliciter et vérifier cette relation dans le cas où $d = 1$.

B) A quelle(s) condition(s) sur l'ensemble A les assertions suivantes sont-elles vraies ?

(a) Si f est une fonction paire alors $\mathbf{L}[A; f]$ est un polynôme pair.

(b) Si f est une fonction impaire alors $\mathbf{L}[A; f]$ est un polynôme impair.

29 Groupement des points d'interpolation. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ deux ensembles respectivement de n et m nombres réels (deux à deux distincts). On suppose que X et Y n'ont aucun point en commun, autrement dit $X \cap Y = \emptyset$. On pose

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad \text{et} \quad q(x) = (x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_m).$$

Pour toute fonction f définie (au moins) sur $X \cup Y$ on considère le polynôme

$$R_f(x) = q(x) \mathbf{L}\left[X; \frac{f}{q}\right](x) + p(x) \mathbf{L}\left[Y; \frac{f}{p}\right](x).$$

Comme d'habitude la notation $\mathbf{L}[X; f/q](x)$ (resp. $\mathbf{L}[Y; f/p](x)$) désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f/q (resp. f/p) par rapport aux points de X (resp. de Y).

- (a) Que peut-on dire du degré de $R_f(x)$ en fonction de n et m ?
 (b) Calculer $R_f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ et $R_f(y_j)$, $j = 1, \dots, m$.
 (c) En déduire que R_f est un polynôme d'interpolation de Lagrange que l'on précisera.

(Sol. 5 p. 97.)

30 Formule de Lagrange barycentrique. Soient $A = \{a_0, \dots, a_d\} \in I = [a, b]$ et f une fonction définie sur I . On note

$$w_A(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_d).$$

et pour $i = 0, \dots, d$,

$$w_{A,i} = w_A(x)/(x - a_i).$$

On remarquera que $w_{A,i}$ est un polynôme de degré (exactement) d .

- (a) Montrer que $w'_A(a_i) = w_{A,i}(a_i)$. (Dériver la relation $w_A(x) = (x - a_i) \cdot w_{A,i}(x)$).
 (b) En déduire en partant de la formule d'interpolation de Lagrange que

$$\mathbf{L}[A; f](x) = \sum_{i=0}^d f(a_i) \frac{w_A(x)}{w'_A(a_i)(x - a_i)}.$$

On note

$$\Delta_i = \frac{1}{w'_A(a_i)}.$$

- (c) Montrer, en utilisant la relation $\mathbf{L}[A; 1](x) = 1$ que

$$w_A(x) \cdot \sum_{i=1}^d \frac{\Delta_i}{x - a_i} = 1.$$

- (d) Montrer que

$$\mathbf{L}[A; f](x) = \frac{\sum_{i=0}^d f(a_i) \frac{\Delta_i}{x - a_i}}{\sum_{i=0}^d \frac{\Delta_i}{x - a_i}}. \quad (5.1)$$

(e) Ecrire un algorithme basé sur la formule ci-dessus pour calculer les valeurs du polynôme d'interpolation de Lagrange. Calculer le nombre d'opérations employé par cet algorithme.

NOTE. — La formule (5.1) s'appelle la **formule de Lagrange barycentrique**.

31 Un exemple. On souhaite obtenir une approximation de $\cos(\pi/5)$ connaissant $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et $\cos 0$. Pour cela on considère $f(x) = \cos(\pi x)$ et son polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathbf{L}[0, 1/6, 1/4; f]$.

- (a) Calculer $\alpha = \mathbf{L}[0, 1/6, 1/4; f](1/5)$.
 (b) Donner une estimation de l'erreur $|\cos(\pi/5) - \alpha|$.

(Sol. 2 p. 96.)

32 Polynômes d'interpolation de certaines fractions rationnelles. On considère $d + 1$ nombres réels a_0, a_1, \dots, a_d deux à deux distincts et λ un paramètre réel différent de chacun des a_i c'est-à-dire $\lambda \neq a_i$ pour $i = 0, 1, \dots, d$. On pose $w(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_d)$ et on considère la fonction $f_\lambda(x)$ définie par

$$f_\lambda(x) = \frac{w(\lambda) - w(x)}{w(\lambda)(\lambda - x)}.$$

(a) Montrer que le polynôme $r(x) =_{def} (\lambda - x)$ divise le polynôme $q(x) =_{def} w(\lambda) - w(x)$. En déduire que f_λ est un polynôme. Préciser le degré de f_λ .



(b) Calculer $f_\lambda(a_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, d$ et en déduire que f_λ est le polynôme d'interpolation de Lagrange par rapport aux points a_0, a_1, \dots, a_d d'une fraction rationnelle g_λ que l'on précisera i.e. $f_\lambda = \mathbf{L}[a_0, a_1, \dots, a_d; g_\lambda]$. (Sol. 3 p. 97.)

33 Polynômes de Chebyshev. On définit une suite de polynômes $T_d(x)$ par la relation de récurrence

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, & T_1(x) = x \\ T_{d+1}(x) = 2xT_d(x) - T_{d-1}(x), & d \geq 1 \end{cases} .$$

Les polynômes T_d forment la suite des polynômes de Chebyshev.

- (a) Déterminer T_2, T_3 et T_4 ?
 (b) Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$, T_d est un polynôme de degré d et son coefficient de plus haut degré est 2^{d-1} pour $d \geq 1$.
 (c) Montrer que si d est pair alors T_d est un polynôme pair et si d est impair, T_d est un polynôme impair.
 (d) Montrer que pour tout $d \in \mathbb{N}$ on a

$$T_d(\cos \theta) = \cos(d\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

On pourra utiliser les relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{aligned}$$

(e) Montrer que le polynôme T_{d+1} possède exactement $d+1$ racines r_i , toutes dans dans $[-1, 1]$, données par

$$r_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(d+1)}, \quad i = 0, \dots, d.$$

Ces nombres r_i sont les **points de Chebyshev**.

(f) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$|T_d(x)| \leq 1.$$

On pourra utiliser que pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$.

34 Interpolation aux points de Chebyshev ← 33. On pose $A = \{r_0, \dots, r_d\}$.

- (a) Quel est le lien entre $T_{d+1}(x)$ et $(x-r_0)(x-r_1)\cdots(x-r_d)$?
 (b) Calculer les nombres Δ_i introduits dans la partie précédente. On pourra procéder comme suit :
 i) On montrera d'abord que

$$1/\Delta_i = \frac{1}{2^d} T'_{d+1}(r_i),$$

ii) puis on montrera

$$T_{d+1}(x) = \cos((d+1) \arccos x)$$

et on utilisera cette relation pour calculer $T'_{d+1}(r_i)$. On rappelle que

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- (c) En déduire la formule de Lagrange barycentrique pour les points de Chebyshev.
 (d) Montrer en appliquant un théorème du cours et les résultats précédents que si f est une fonction $d+1$ continûment dérivable sur $[-1, 1]$ alors pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$|f(x) - \mathbf{L}[r_0, \dots, r_d; f](x)| \leq \frac{1}{2^d \cdot (d+1)!} \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(d+1)}(t)|.$$

35 Une majoration de l'erreur entre la fonction interpolée et le polynôme d'interpolation.

Dans cette partie on considère un ensemble $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset [a, b]$ avec $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. On définit $h_0 = a_0 - a$ puis pour $i = 1, 2, 3, 4$, $h_i = a_i - a_{i-1}$ et enfin $h_5 = b - a_4$. On va majorer la valeur absolue du polynôme w_A défini par la relation

$$w_A(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4).$$

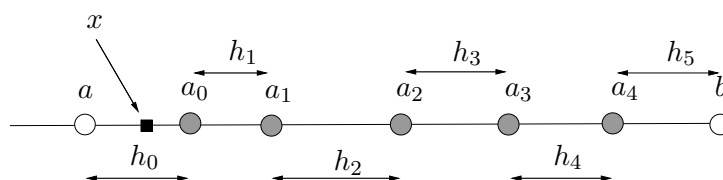
CAS OÙ x EST COMPRIS ENTRE a ET a_0 .

A) On suppose que x est compris entre a et a_0 comme dans la figure ci-dessous. Montrer que

$$|w_A(x)| \leq h_0 \times (h_0 + h_1) \times (h_0 + h_1 + h_2) \times (h_0 + h_1 + h_2 + h_3) \times (h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4).$$

En déduire que

$$|w_A(x)| \leq 5!h^5 \quad \text{avec} \quad h = \max_{0 \leq i \leq 5} h_i.$$



CAS OÙ x EST DANS UN INTERVALLE $[a_i, a_{i+1}[$.

B) On suppose maintenant que $x \in]a_0, a_1[$. Montrer, après avoir dessiné la figure correspondante et en utilisant la même idée que dans la question précédente que

$$|w_A(x)| \leq h_1 \times h_1 \times (h_1 + h_2) \times (h_1 + h_2 + h_3) \times (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

et en déduire que

$$|w_A(x)| \leq 4!h^5.$$

C) Démontrer en suivant les mêmes idées les majorations suivantes

(a) si $x \in]a_1, a_2[$ alors $|w_A(x)| \leq 2! \cdot 3! \cdot h^5$,

(b) si $x \in]a_2, a_3[$ alors $|w_A(x)| \leq 3! \cdot 2! \cdot h^5$,

(c) si $x \in]a_3, a_4[$ alors $|w_A(x)| \leq 1! \cdot 4! \cdot h^5$,

(d) si $x \in]a_4, b[$ alors $|w_A(x)| \leq 5! \cdot h^5$.

D) Déduire des résultats précédents que

$$\max_{x \in [a, b]} |w_A(x)| \leq 5!h^5$$

puis que pour toute fonction f de classe C^5 sur $[a, b]$ et tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x) - \mathbf{L}[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; f](x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f^{(5)}| \cdot h^5.$$

CAS OÙ OÙ $a_0 = a$ ET $a_4 = b$.

Dans cette partie, on améliore l'inégalité précédente dans le cas où $a_0 = a$ et $a_4 = b$.

E) Soit $i \in \{0, \dots, 3\}$. Montrer en étudiant la fonction $x \rightarrow (x - a_i)(x - a_{i+1})$ que

$$\max_{x \in [a_i, a_{i+1}]} |(x - a_i)(x - a_{i+1})| = \frac{h_{i+1}^2}{4}.$$

F) Soit $x \in [a_0, a_1]$. Montrer que

$$|w_A(x)| \leq \frac{h_1^2}{4} \times (h_1 + h_2) \times (h_1 + h_2 + h_3) \times (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \leq 4! \frac{h^5}{4}.$$

G) Montrer plus généralement, en considérant les intervalles $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$ et $[a_3, a_4]$ que

$$\max_{x \in [a, b]} |w_A(x)| \leq 4! \frac{h^5}{4}$$

et en déduire une nouvelle majoration pour $|f(x) - \mathbf{L}[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; f](x)|$.

H) Expliquer brièvement comment les résultats obtenus se généralisent au cas où

$$A = \{a_0, \dots, a_n\} \subset [a, b] \quad a_i < a_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

(Sol. 6 p. 97)

36 Interpolation des fonctions de dérivées à croissance lente. Soient $I = [-1, 1]$ et $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ une suite de points deux à deux distincts dans I . On note $A^d = \{a_0, \dots, a_d\}$. Nous étudions une condition sur la fonction f pour que, pour tout $x \in I$, on ait

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{L}[A^d; f](x) = f(x).$$

A) Montrer que si f est $d+1$ fois continûment dérivable sur I et si $x \in I$ alors

$$|f(x) - \mathbf{L}[A^d; f](x)| \leq \frac{2^{d+1}}{(d+1)!} \max_{t \in [-1, 1]} |f^{(d+1)}(t)|.$$

On note \mathcal{G} l'ensemble des fonctions f indéfiniment dérivables sur I pour lesquelles il existe des nombres $M = M_f$ et $r = r_f$ tels que

$$|f^{(d)}(x)| \leq M \cdot r^d, \quad d \in \mathbb{N}, \quad x \in I.$$

B) Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont dans l'ensemble \mathcal{G} : $f_1(x) = \sin(\alpha x)$, $f_2(x) = \cos(\alpha x)$, $f_3(x) = \exp(\alpha x)$, $f_4(x) = \exp(\exp \alpha x)$, $f_5(x) = 1/(x+a)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 1$?

C) Montrer les propriétés suivantes : (i) Si $f \in \mathcal{G}$ alors $f' \in \mathcal{G}$ (on déterminera $M_{f'}$ et $r_{f'}$ en fonction de M_f et r_f). (ii) Montrer que si f et g sont deux éléments de \mathcal{G} et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g \in \mathcal{G}$ (ceci signifie que \mathcal{G} est un espace vectoriel). On déterminera $M_{f+\lambda g}$ et $r_{f+\lambda g}$ en fonction de $M_f, M_g, r_f, r_g, \lambda$.

D) Démontrer, par récurrence sur d la **formule de Leibniz** sur les dérivées d'un produit de deux fonctions (indéfiniment dérivables) f et g :

$$(f \cdot g)^{(d)} = \sum_{j=0}^d \binom{d}{j} f^{(j)} \cdot g^{(d-j)}$$

où $\binom{d}{j}$ désigne le coefficient binomial – aussi noté C_j^d – défini par

$$\binom{d}{j} = \frac{d!}{j!(d-j)!}.$$

E) Démontrer que si f et g sont deux éléments de \mathcal{G} alors $f \cdot g$ est aussi un élément de \mathcal{G} . On déterminera $M_{f \cdot g}$ et $r_{f \cdot g}$ en fonction de M_f, M_g, r_f, r_g .

F) Démontrer que si $f \in \mathcal{G}$ alors pour tout $x \in I$, on a

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{L}[A^d; f](x) = f(x).$$

COMMENTAIRE. — * Pour une fonction $f \in \mathcal{G}$, nous avons

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - \mathbf{L}[A^d; f](x)| \leq M_f \frac{(2r)^{d+1}}{(d+1)!}.$$

Or pour tout $v \in \mathbb{R}$, la suite $v^{d+1}/(d+1)!$ converge vers 0 lorsque $d \rightarrow \infty$. Cela implique que si $\Delta > 1$ alors

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \Delta^{d+1} \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - \mathbf{L}[A^d; f](x)| = 0 \quad (5.2)$$

puisque

$$\Delta^{d+1} \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - \mathbf{L}[A^d; f](x)| \leq M_f \frac{(2\Delta r)^{d+1}}{(d+1)!} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0.$$

La relation (5.2) signifie que l'erreur entre f et son polynôme d'interpolation converge uniformément vers 0 plus vite que n'importe quelle suite géométrique de raison moindre que 1.*

37 Effet d'une composition par une bijection affine sur les polyignes. Etudier les propriétés démontrées à l'exercice 28 dans le cas des interpolants polyignes $\mathbf{PL}[\mathbf{s}; f]$.

38 Propriétés générales des polyignes. Les implications suivantes sont-elles vraies ? Les fonctions sont considérées sur un intervalle $[a, b]$ et \mathbf{s} désigne une subdivision quelconque de cet intervalle.

(a) Si f croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ alors $\mathbf{PL}[\mathbf{s}; f]$ est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.

(b) Si $\mathbf{PL}[\mathbf{s}; f]$ croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$.

(c) Si f est convexe (resp. concave) sur $[a, b]$ alors $\mathbf{PL}[\mathbf{s}; f]$ est convexe (resp. concave) sur $[a, b]$.

(d) Si $\mathbf{PL}[\mathbf{s}; f]$ convexe (resp. concave) sur $[a, b]$ alors f est convexe (resp. concave) sur $[a, b]$.

39 Erreur entre polyligne et fonction interpolée de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[a, b]$ et σ est une subdivision de $[a, b]$ d'écart h alors pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$|f(x) - \mathbf{PL}[\sigma; f](x)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot \max_{t \in [a, b]} |f^{(2)}(t)|.$$

Quelle inégalité obtient-on dans le cas où $f(x) = \sin x$?

COMMENTAIRE. — * Supposons que $\sigma^d = (a, a_1^d, \dots, a_{d-1}^d, b)$ soit la subdivision de $[a, b]$ formée des points équidistants. Dans ce cas, si

$$\mu = (a_j^d + a_{j+1}^d)/2$$

alors la définition des fonctions polyignes et le théorème I.9 sur l'erreur la fonction et son polynôme d'interpolation dans le cas $d = 1$ donnent

$$|f(x) \mathbf{PL}[\sigma^d; f](\mu)| = |f(x) - \mathbf{L}[a_j^d, a_{j+1}^d; f](\mu)| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2} |\mu - a_j^d| |\mu - a_{j+1}^d| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{d^2},$$

où ξ est un certain réel compris entre a_j^d et a_{j+1}^d . Il suit que

$$d^2 \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \mathbf{PL}[\sigma^d; f](x)| \geq m_2,$$

où $m_2 = \inf_{x \in [a, b]} |f^{(2)}(x)|$. En particulier, l'inégalité montre que lorsque f est une fonction pour m_2 ne s'annule pas alors l'erreur entre la fonction interpolée et la fonction polyligne ne saurait décroître plus vite que la suite $1/d^2$. *

40 Un exemple. On veut approcher la fonction $f(x) = 1/(1+x^2)$ sur $[-1, 1]$ par une polygone. Comment faut-il choisir la subdivision si l'erreur doit être moindre que 10^{-2} ?

41 Ajout d'un point à une subdivision Soit $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d = b)$ une subdivision de longueur d de l'intervalle $[a, b]$. On complète cette subdivision par deux points $a_{-1} < a$ et $a_{d+1} > b$ et on définit les fonctions $b_i^\sigma, i = 0, \dots, d$ comme dans le cours par le graphe de la figure 4.4.

(a) Trouvez la relation entre deux fonctions b_i et $b_j, i, j \in \{0, \dots, d\}$ lorsque la subdivision σ est déterminée par les points équidistants.

(b) On rajoute un point a^+ à la subdivision σ pour obtenir une subdivision σ_+ de longueur $d+1$. Comment calculer les fonctions $b_i^{\sigma_+}$ à l'aide des fonctions b_i^σ .

42 Interpolation et calcul approché des dérivées. On étudie une méthode de calcul approché des dérivées des fonctions à partir des valeurs d'une fonction.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ et $X = \{x_0, \dots, x_d\}$ un ensemble de $d+1$ points deux à deux distincts dans I . Etant donnée $y \in I$, on cherche une formule $Q_y(f)$ de la forme

$$Q_y(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_d f(x_d) \quad (5.3)$$

où les A_i sont des nombres réels indépendant de f , telle que

$$f'(y) \approx Q_y(f). \quad (5.4)$$

(a) Montrer que l'application Q_y définie ci-dessus est une application linéaire de E dans \mathbb{R} où E désigne l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur I .

(b) Dans cette partie, on cherche à déterminer les nombres A_i de sorte (5.4) se réduise à une égalité lorsque f est un polynôme de degré inférieur ou égal à d , autrement dit,

$$Q_y(p) = p'(y) \quad \text{pour tout polynôme } p \text{ de degré } \leq d. \quad (5.5)$$

Pour tout $i = 0, \dots, d$, on note ℓ_i le polynôme fondamental de Lagrange pour $X = \{x_0, \dots, x_d\}$ correspondant au point x_i ,

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^d \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (5.6)$$

(c) Montrer que la condition (5.5) est satisfaite *si et seulement si* pour tout $i = 0, \dots, d$, A_i est la dérivée de ℓ_i en y , autrement dit

$$A_i = \ell'_i(y). \quad (5.7)$$

(d) En déduire que la condition (5.5) est satisfaite *si et seulement si*

$$Q_y(f) = (\mathbf{L}[X, f])'(y) \quad (5.8)$$

où $\mathbf{L}[X, f]$ désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange de f par rapport aux points de X .

Nota Bene : Dans la suite du problème on suppose que l'égalité (5.8) est satisfaite.

(e) Donner l'expression de $Q_0(f)$ lorsque $X = \{-1, 0, 1\}$.

(f) On suppose maintenant que f est $d+1$ dérivable sur I et que $y = x_i \in X$. On cherche une estimation de l'erreur $|f'(y) - Q_y(f)|$. On note $\varepsilon(x) = f(x) - \mathbf{L}[X, f](x)$ et $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_d)$

(g) Montrer que $w'(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^d (x_i - x_j)$.

(h) On admet que pour tout $x \in I$ on a $\varepsilon(x) = w(x)g(x)$ où g est une fonction dérivable telle que $g(x) = (1/(d+1)!)f^{(d+1)}(\xi_x)$. Montrer que

$$f'(x_i) - Q_{x_i}(f) = \frac{1}{(d+1)!} \prod_{j=1, j \neq i}^d (x_i - x_j) f^{(d+1)}(\xi_{x_i}). \quad (5.9)$$

En déduire une majoration de l'erreur $|f'(x_i) - Q_{x_i}(f)|$.

COMPLÉMENT

43 Déterminant de Vandermonde et interpolation de Lagrange. Nous avons vu que si $A = \{a_0, \dots, a_d\}$ et $p(x) = \sum_{i=0}^d c_i x^i$, pour que la condition $p(a_i) = f(a_i)$, $i = 0, \dots, d$ soit vérifiée, il faut et il suffit que les coefficients c_i satisfassent le système linéaire (à $d + 1$ équations et $d + 1$ inconnues)

$$\sum_{i=0}^d c_i a_j^i = f(a_j), \quad j = 0, \dots, d. \quad (5.10)$$

Nous noterons $\text{VDM}(a_0, \dots, a_d)$ le déterminant de (la matrice associée à) ce système,

$$\text{VDM}(a_0, \dots, a_d) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^d \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_d & a_d^2 & \cdots & a_d^d \end{vmatrix}.$$

Pour que le système (5.10) admette une solution unique, son déterminant $\text{VDM}(a_0, \dots, a_d)$ doit être non nul, voir le chapitre IV. Le but de cet exercice est de calculer ce déterminant et de montrer qu'il est non nul dès lors que les points a_j sont deux à deux distincts.

- (a) Montrer que si les points a_j ne sont pas deux à deux distincts alors $\text{VDM}(a_0, \dots, a_d)$ est nul.
 (b) Nous supposons maintenant que les a_j sont deux à deux distincts. Considérons le polynôme $R(t)$ défini pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$R(t) = \text{VDM}(a_0, \dots, a_{d-1}, t) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^d \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_{d-1} & a_{d-1}^2 & \cdots & a_{d-1}^d \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^d \end{vmatrix}.$$

Montrer que R est un polynôme de degré d qui s'annule pour $t = a_j$, $j = 0, \dots, d - 1$, et dont le coefficient de plus haut degré est $\text{VDM}(a_0, \dots, a_{d-1})$. En déduire que

$$\text{VDM}(a_0, \dots, a_d) = \text{VDM}(a_0, \dots, a_{d-1}) \prod_{j=0}^{d-1} (a_d - a_j).$$

- (c) Montrer que

$$\text{VDM}(a_0, \dots, a_d) = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (a_j - a_i).$$

- (d) En déduire que $\text{VDM}(a_0, \dots, a_d)$ est non nul à la seule condition que les points soient deux à deux distincts.
 (e) Retrouver l'expression des polynômes fondamentaux de Lagrange à l'aide des formule de Cramer.

II

Calcul approché des intégrales

§ 1. FORMULES DE QUADRATURES ÉLÉMENTAIRES

1.1 Problème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Nous voulons calculer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx.$$

C'est un des calculs parmi les plus communs dans les applications des mathématiques. Le théorème fondamental du calcul intégral nous dit que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f . Pour appliquer ce résultat, nous disposons de divers outils théoriques dont les plus fondamentaux sont le théorème de changement de variable et le théorème d'intégration par partie. Cependant, il n'est possible de déterminer explicitement une primitive F que pour une classe relativement restreinte de fonctions f et, lorsque cette détermination est à notre disposition, l'expression de F est souvent si compliquée que l'évaluation de $F(b) - F(a)$ nécessite l'emploi d'un processus d'approximation. Dans ce cas, il est tout aussi naturel et généralement moins coûteux de chercher directement une approximation de l'intégrale.

1.2 Présentation générale

L'idée consiste à utiliser une approximation $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx$ où g est une fonction qui, d'une part, est proche de f et, d'autre part, possède des primitives aisément calculables. Le choix le plus naturel est celui du polynôme d'interpolation de Lagrange,

$$g = \mathbf{L}[x_0, \dots, x_d; f],$$

où $A = \{x_0, \dots, x_d\} \subset [a, b]$ car les polynômes d'interpolation sont proches de la fonction qu'ils interpolent et, étant des polynômes, il est raisonnable d'espérer que leurs primitives seront facilement calculables. Nous appelons **formule de quadrature** (élémentaire) d'ordre d , toute expression

$$Q(f) = \int_a^b \mathbf{L}[x_0, \dots, x_d; f](x) dx = \sum_{i=0}^d f(x_i) \int_a^b \ell_i(x) dx \quad (1.1)$$

où ℓ_i est le polynôme fondamental de Lagrange correspondant au point a_i , voir. L'application Q ainsi définie est une forme linéaire sur $\mathcal{C}[a, b]$, autrement dit, elle vérifie

$$Q(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Q(f_1) + \lambda_2 Q(f_2) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{C}[a, b].$$

Pour savoir si $Q(f)$ est effectivement proche de $\int_a^b f(x) dx$, nous devons étudier l'erreur

$$\mathbf{E}^Q(f) := \left| \int_a^b f(x) dx - Q(f) \right|. \quad (1.2)$$

Remarquons que si Q est une formule de quadrature d'ordre d alors pour tout $p \in \mathcal{P}_d$ on a $\int_a^b p(x) dx = Q(p)$. En effet,

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{P}_d &\Rightarrow p = \mathbf{L}[x_0, \dots, x_d; p] \\ &\Rightarrow Q(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \mathbf{L}[x_0, \dots, x_d; p](x) dx = \int_a^b p(x) dx. \end{aligned}$$

Nous verrons que dans certains cas l'égalité ci-dessus peut continuer à être vérifiée pour des polynômes de degré plus grand que d .

Une réciproque est vraie.

Théorème II.1. Si $R(f)$ est une expression de la forme $R(f) = \sum_{i=0}^d \lambda_i f(a_i)$ telle que $R(p) = \int_a^b p(x) dx$ pour tout $p \in \mathcal{P}_d$ alors $\lambda_i = \int_a^b \ell_i(x) dx$ où ℓ_i est le polynôme fondamental de Lagrange correspondant à $x_i \in \{x_0, \dots, x_d\}$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la relation $\sum_{i=0}^d \lambda_i p(a_i) = \int_a^b p(x) dx$ avec $p = \ell_j$. En effet, puisque $\ell_j(a_i) = 0$ sauf lorsque $i = j$ pour lequel nous avons $\ell_j(a_j) = 1$, on a $\sum_{i=0}^d \lambda_i \ell_j(a_i) = \lambda_j$. ■

Remarquons que puisque R est une forme linéaire, pour s'assurer que

$$R(p) = \int_a^b p(x) dx, \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}_d,$$

il suffit de vérifier l'identité lorsque p parcourt une base de \mathcal{P}^d . En particulier, si $M_i(x) = x^i$ il suffit de vérifier que $R(M_i) = \int_a^b x^i dx$ pour $i = 0, 1, \dots, d$.

E 44 * On cherche une approximation de $\int_{-1}^1 f(x) dx$ par une formule du type

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(t_1) + f(t_2)$$

de telle sorte que la formule soit *exacte* pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe une et une seule paire $\{t_1, t_2\}$ satisfaisant la propriété demandée et la déterminer.

*. [2]



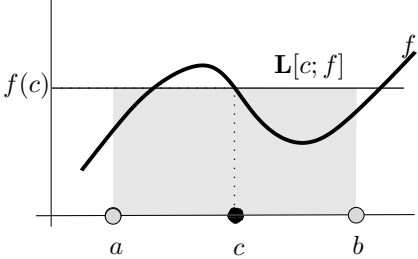
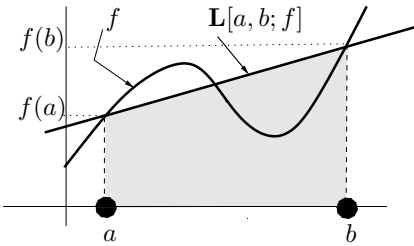
| A) POINT MILIEU | B) TRAPÈZE |
|--|--|
|  |  |
| <p>Nous avons posé $c = (a + b)/2$. L'aire de la partie grisée est égale à $Q(f)$.</p> | <p>L'aire de la partie grisée est égale à $Q(f)$.</p> |

TABLE 1 – Méthode du point milieu et du trapèze.

Dans la pratique, grâce au procédé de composition, des résultats très précis sont souvent obtenus en employant seulement des méthodes d'ordre $d \leq 2$. Nous étudierons en détail trois de ces méthodes : la **méthode du point milieu** ($d = 0$), la **méthode des trapèzes** ($d = 1$) et la **méthode de Simpson** ($d = 2$). D'autres exemples sont proposés en exercice.

§ 2. EXEMPLES FONDAMENTAUX

2.1 La formule du point milieu

Nous utilisons un polynôme d'interpolation de degré $d = 0$ avec le point $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Dans ce cas, $\mathbf{L}[x_0; f](x) = f(\frac{a+b}{2})$ et l'approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \mathbf{L}[x_0; f](x) dx \quad \text{devient} \quad \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (2.1)$$

L'expression $Q(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ s'appelle la **formule du point milieu**. Lorsque $f(c) > 0$, $Q(f)$ est l'aire du rectangle de sommets les points de coordonnées $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, f(c))$ et $(b, f(c))$, voir la figure 1 A).

2.2 La formule du trapèze

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Nous prenons $d = 1$ et $A = \{a, b\}$. L'approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \mathbf{L}[a, b; f](x) dx \quad \text{devient} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)). \quad (2.2)$$

En effet, $\mathbf{L}[a, b; f](x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, voir (I.1.7), d'où

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{L}[a, b; f](x) dx &= \int_a^b f(a) + \left\{ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right\} dx \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \int_a^b (x-a) dx \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^b \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= \frac{(b-a)}{2} \cdot [f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

L'expression $Q(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$ s'appelle la **formule du trapèze**. Lorsque $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs, elle n'est autre que l'aire du trapèze de sommets les points de coordonnées $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ comme illustré par la figure 1 B).

2.3 La formule de Simpson

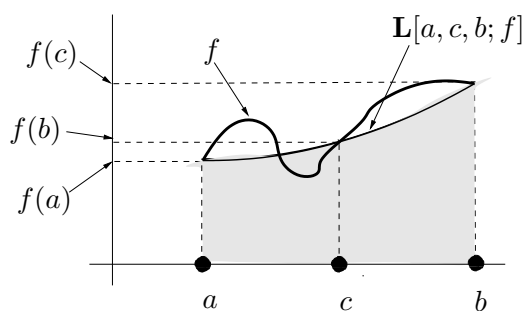
Nous prenons cette fois $d = 2$ et $A = \{a, c, b\}$ où $c = \frac{a+b}{2}$. L'approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \mathbf{L}[a, c, b; f](x) dx$$

devient

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b)). \quad (2.3)$$

Le calcul est proposé à l'exercice I.27. L'expression $Q(f) = \frac{(b-a)}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b))$ s'appelle la **formule de Simpson**.



L'aire de la partie grisée est égale à $Q(f)$.

FIGURE 1 – Méthode de Simpson.

§ 3. ETUDE DE L'ERREUR

3.1 Estimation de l'erreur dans la formule du point milieu

Théorème II.2. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f^{(2)}(\xi).$$

En particulier,

$$\left| \int_a^b f(t)dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f^{(2)}(x)|.$$

Comme de nombreux résultats d'analyse numérique, la démonstration de ce théorème est basée sur la **formule de Taylor**. Nous la rappelons dans un cadre suffisamment général pour pouvoir servir dans la suite du cours.

Théorème II.3 (Formule de Taylor). Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$ et $d+1$ fois dérivable sur $] \alpha, \beta [$. Si u_0 et v sont dans $[\alpha, \beta]$ alors il existe $\xi \in] \alpha, \beta [$ tel que

$$f(v) = f(u_0) + f'(u_0)(v - u_0) + \dots + \frac{f^{(d)}(u_0)}{d!}(v - u_0)^d + \frac{f^{(d+1)}(\xi)}{d!}(v - u_0)^{d+1}. \quad (3.1)$$

Cette égalité s'appelle la formule de Taylor de f en u_0 à l'ordre d .

Le polynôme

$$T^d(f, \cdot) = f(u_0) + f'(u_0)(\cdot - u_0) + \dots + \frac{f^{(d)}(u_0)}{d!}(\cdot - u_0)^d$$

s'appelle le **polynôme de Taylor** de f en u_0 à l'ordre d . Le vocabulaire ici est assez malheureux, il faudrait parler de *degré* plutôt que d'*ordre*.

Dans ce cours nous appliquerons toujours ce théorème avec une fonction f de classe \mathcal{C}^{d+1} sur un intervalle contenant α et β de sorte que les conditions du théorème seront largement satisfaites.

Démonstration du Théorème II.2. Posons $c = \frac{a+b}{2}$. Pour tout $x \in [a, b]$, une application de la formule de Taylor ci-dessus avec $u_0 = c$ donne l'existence de ξ_x tel que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2.$$

D'où nous tirons l'inégalité

$$f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{m_2}{2}(x - c)^2 \leq f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{M_2}{2}(x - c)^2$$

où $m_2 = \inf [a, b] f''$ et $M_2 = \max [a, b] f''$. En intégrant la première inégalité, il vient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\geq \int_a^b (f(c) + f'(c)(x - c) + m_2(x - c)^2)dx \\ &\geq \mathcal{Q}(f) + \frac{1}{2}[(x - c)^2]_a^b + \frac{m_2}{2 \cdot 3}[(x - c)^3]_a^b \\ &\geq \mathcal{Q}(f) + 0 + \frac{m_2}{2 \cdot 3} \left(\frac{(b-a)^3}{2^3} \right) \end{aligned}$$

et il suit

$$m_2 \frac{(b-a)^3}{24} \leq \int_a^b f(x) dx - Q(f).$$

De la même manière, en intégrant la seconde inégalité, nous obtenons

$$\int_a^b f(x) dx - Q(f) \geq M_2 \frac{(b-a)^3}{24}.$$

Regroupant les deux estimations, nous tirons

$$m_2 \leq \frac{24}{(b-a)^3} \left\{ \int_a^b f(x) dx - Q(f) \right\} \leq M_2.$$

Maintenant puisque f'' est une fonction continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre compris entre sa plus grande valeur M_2 et sa plus petite valeur m_2 est encore une valeur de f'' . Autrement dit, il existe $\theta \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) dt - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\theta). \quad \blacksquare$$

3.2 Estimation de l'erreur dans la formule du trapèze

Théorème II.4. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Il existe $\theta \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) dt - \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\theta).$$

En particulier,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(2)}|.$$

Démonstration. Nous devons estimer $\int_a^b \{f(x) - \mathbf{L}[a, b; f](x)\} dx$. Nous commençons par obtenir une estimation du terme sous l'intégrale. D'après le Théorème I.I.9, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - \mathbf{L}[a, b; f](x) = \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2} (x-a)(x-b).$$

Puisque la fonction $x \rightarrow (x-a)(x-b)$ est négative ou nulle sur $[a, b]$, nous avons

$$\frac{M_2}{2} (x-a)(x-b) \leq f(x) - \mathbf{L}[a, b; f](x) \leq \frac{m_2}{2} (x-a)(x-b),$$

où $m_2 = \min_{[a,b]} f^{(2)}$ et $M_2 = \max_{[a,b]} f^{(2)}$. Nous intégrons ces deux inégalités en utilisant le résultat suivant

$$\int_a^b (x-a)(x-b) dx = -(b-a)^3/6, \quad (3.2)$$

qui se vérifie immédiatement pour obtenir

$$-M_2(b-a)^3/12 \leq \int_a^b \{f(x) - \mathbf{L}[a, b; f](x)\} dx \leq -m_2(b-a)^3/12.$$

En raisonnant comme dans la démonstration du Théorème II.2, nous déduisons qu'il existe θ tel que

$$\int_a^b \{f(x) - \mathbf{L}[a, b; f](x)\} dx = -\frac{f(\theta)}{12}(b-a)^3.$$

■

E 45 Démontrer la relation (3.2).

3.3 Estimation de l'erreur dans la formule de Simpson

Nous ne connaissons pas de démonstration simple du résultat suivant. Une démonstration élémentaire mais peu naturelle sera proposée à l'exercice 58.

Théorème II.5 (‡). Soit $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$. On a

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}|.$$

Les point important de cette estimation est qu'elle fait intervenir la dérivée 4-ième de la fonction (et un facteur $(b-a)^5$). La constante 2880 naturellement est purement anecdotique.

E 46 D'après sa construction la formule de Simpson est d'ordre 2 mais l'estimation ci-dessus montre qu'elle est en réalité d'ordre 3. Donner une démonstration directe de cette propriété.

§ 4. COMPOSITION

4.1 Idée générale

Nous savons que le polynôme $\mathbf{L}[x_0, \dots, x_d; f]$ a d'autant plus de chance d'être proche de la fonction interpolée f que l'intervalle $[a, b]$ est petit et les formules d'erreur données dans la partie précédente confirment l'intuition que plus l'intervalle $[a, b]$ sera petit plus l'approximation sera précise. Dans ces conditions, il est naturel de découper l'intervalle de départ en une famille de sous-intervalles beaucoup plus petits et d'appliquer les formules de quadrature à ces petits intervalles avant de regrouper les approximations obtenues. De manière précise, choisissons une subdivision $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de $[a, b]$ et, dans chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, $d+1$ points distincts $X^i = \{x_0^i, x_1^i, \dots, x_d^i\}$ pour construire la formule d'approximation

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx \approx \mathbf{Q}_{[a_i, a_{i+1}]}(f) \quad (4.1)$$

avec

$$\mathbf{Q}_{[a_i, a_{i+1}]}(f) = \sum_{k=0}^d f(x_k^i) \int_{a_i}^{a_{i+1}} \ell_k^i(x) dx \quad \text{et} \quad \ell_k^i(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^d \frac{x - x_j^i}{x_k^i - x_j^i}. \quad (4.2)$$

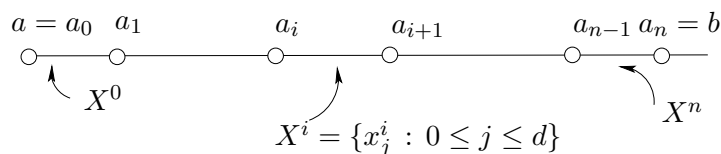


FIGURE 2 – Localisation des points dans une formule de quadrature composée

La localisation des points x_j^i dans chaque sous-intervalle est illustrée dans la figure 2. La relation de Chasle pour les intégrales nous donne

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx,$$

de sorte que pour approximer l'intégrale globale il suffit d'approximer les n termes de la somme

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^d Q_{[a_k, a_{k+1}]}(f) \quad (4.3)$$

Toute expression Q_c de la forme

$$Q_c(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^d Q_{[a_k, a_{k+1}]}(f)$$

s'appelle une **formule de quadrature composée d'ordre d** . L'application Q_c définit une forme linéaire sur $\mathcal{C}[a, b]$. L'erreur $|\int_a^b f(x)dx - Q_c(f)|$ est notée $\mathbf{E}^{Q_c}(f)$.

Théorème II.6 (Principe d'addition des erreurs).

$$\mathbf{E}^{Q_c}(f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}^Q(f). \quad (4.4)$$

Démonstration. Avec les notations précédentes, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{Q_c}(f) &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} Q_{[a_i, a_{i+1}]}(f) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - \mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}^Q(f) \right\} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx - \mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}^Q(f) \right| \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}_{[a_i, a_{i+1}]}^Q(f). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2 Exemples fondamentaux de formules composées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I = [a, b]$ et $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Ecrivons $h(n) = (b - a)/n$ et $a(i, n) = a + ih(n)$. L'application du principe d'addition ci-dessus aux exemples fondamentaux des méthodes du point milieu, du trapèze et de Simpson donne les résultats regroupés dans la table 2. Lorsque $n \rightarrow \infty$, dans les trois cas, l'erreur commise tend toujours vers 0, autrement dit, quelle que soit la précision choisie ε , en prenant n suffisamment grand, chacune des méthodes fournira une valeur approchée de l'intégrale avec une erreur moindre que ε . Pour connaître une valeur de n assurant la précision ε il faut cependant au moins disposer d'un majorant de $\max_{[a,b]} |f^{(2)}|$ pour la méthode des trapèzes ou du point milieu et de $\max_{[a,b]} |f^{(4)}|$ pour la méthode de Simpson.

E 47 Montrer que si $Qc(f)$ désigne la formule des trapèzes composées avec $n + 1$ points équidistants $a(i, n) = a + i(b - a)/n$ alors

$$Qc(f) = \int_a^b \mathbf{PL}[f, \sigma](x) dx,$$

où σ est la subdivision $a = a(0, n) < a(1, n) < \dots < a(n, n) = b$.

La table 3 montre l'erreur obtenue en utilisant les méthodes pour approcher $\int_0^1 4/(1 + x^2)$ qui n'est autre que le nombre π . L'exécution est très rapide. Pour la méthode de Simpson avec $n = 700$, l'algorithme ne demande que 0.125 seconde d'attente.

4.3 Codes Scilab

Nous donnons les codes correspondant aux méthodes du point milieu, des trapèzes et de Simpson pour évaluer l'intégrale Le code calcule une valeurs approchée de

$$\int_a^b \text{fonc}(x) dx. \quad (4.5)$$

En particulier, dans tous les codes ci-dessus,

- (a) a, b sont donc les bornes de l'intervalle,
- (b) fonc désigne la fonction à intégrer,

Code SCILAB 2 (Méthode du point milieu). Dans le code suivant,

- (a) n est le nombre sous-intervalles utilisés,
- (b) NodesPM est le vecteur contenant les milieux de ces sous-intervalles.

```

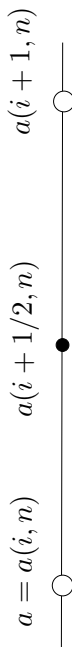
1  fonction [y]=PM(a, b, n, fonc);
   h=(b-a)/n;
3  NodesPM=a+((2*[1:n]-1)*(h/2));
   TBS=feval(NodesPM, fonc); // ou TBS=fonc(NodesPM);
5  y=(b-a)*sum(TBS)/n;
   endfunction;
```

Code SCILAB 3 (Méthode du trapèze). Dans le code suivant,

- (a) n est le nombre de sous-intervalles utilisés,

PRINCIPALES FORMULES DE QUADRATURES COMPOSÉES

$$I = [a, b], h(n) = (b - a)/n, a(i, n) = a + ih(n), f \in \mathcal{C}(I)$$



Point milieu



Trapèze



Simpson

| Formule : Qc(f) | Erreur : $\mathbf{E}^{Qc}(f)$ | Type de fonctions |
|---|--|--------------------------|
| Point milieu $h(n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a(i + 1/2, n))$ | $\frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{[a,b]} f^{(2)} $ | $f \in \mathcal{C}^2(I)$ |
| Trapèze $\frac{h(n)}{2} \cdot [f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a(i, n))]$ | $\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{[a,b]} f^{(2)} $ | $f \in \mathcal{C}^2(I)$ |
| Simpson $\frac{h(n)}{6} \{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a(i, n)) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(a(i + 1/2, n)) \}$ | $\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \max_{[a,b]} f^{(4)} $ | $f \in \mathcal{C}^4(I)$ |

TABLE 2 – Exemples fondamentaux de formules de quadrature composées



| n | Point milieu | Trapèze | Simpson |
|-------|--------------|-----------|-------------|
| 2. | - 0.0207603 | 0.0415927 | 0.0000240 |
| 4. | - 0.0052079 | 0.0104162 | 0.0000002 |
| 6. | - 0.0023148 | 0.0046296 | 1.328D-08 |
| 8. | - 0.0013021 | 0.0026042 | 2.365D-09 |
| 10. | - 0.0008333 | 0.0016667 | 6.200D-10 |
| 70. | - 0.0000170 | 0.0000340 | 5.329D-15 |
| 930. | - 9.635D-08 | 0.0000002 | - 4.441D-16 |
| 2300. | - 1.575D-08 | 3.151D-08 | 4.441D-16 |

TABLE 3 – comparaison des diverses méthodes pour $\pi = \int_0^1 4/(1+x^2)dx$

(b) *NodesTrap* est le vecteur contenant les points intervenant dans la méthode.

```

function [y]=TRAP(a,b,n,fonc);
2   h=(b-a)/n;
   NodesTrap=a+h*[1:n-1];
4   ValuesTrap=fonc(NodesTrap);
   y=h*(sum(ValuesTrap)+0.5*fonc(a)+0.5*fonc(b));
6   endfunction;

```

Code SCILAB 4 (Méthode de Simpson). Dans le code suivant,

- (a) n est le nombre de sous-intervalles utilisés,
- (b) *extrem* est le vecteur formé des extrémités des sous-intervalles.
- (c) *milieux* est le vecteur formé des milieux des sous-intervalles.

```

function [y]=SIMPSON(a,b,n,fonc);
2   h=(b-a)/n;
   extrem=a+h*[1:n-1];
4   valextrem=fonc(extrem);
   milieux=a+(h/2)*(2*[1:n]-1);
6   valmilieu=fonc(milieux);
   y=(h/6)*(fonc(a)+fonc(b)+2*sum(valextrem)+4*sum(valmilieu));
8   endfunction;

```

En principe, les formules d'erreur de la table 2 permettent de déterminer le nombre de sous-intervalles nécessaires pour obtenir la précision voulue. C'est le nombre n qui est demandé dans de nombreux exercices académiques comme d'ailleurs ici aux problèmes 53, 54 et 55. Dans la pratique, un tel exercice est rarement réalisé. Il y a pour cela au moins deux raisons. La première c'est que l'emploi de ces formules nécessite la connaissance d'une borne de la valeur absolue de la dérivée seconde (dans le cas de la formule du point milieu et de celle des trapèzes) ou de la dérivée quatrième (dans le cas de la formule de Simpson) et ces bornes peuvent difficiles à obtenir surtout. La seconde raison, c'est que même si l'emploi des formules d'erreur est possible elles donnent très souvent un valeur de n exagérément grande. Si l'on ne connaît

pas *a priori* le paramètre n employé dans les codes précédent, on utilise en général ce qui est appelé un test d'arrêt, pour fixer la valeur n . Un test d'arrêt communément employé est d'arrêter l'augmentation de n lorsque les valeurs approchées successives obtenues ne diffèrent pas plus que d'un epsilon fixé par l'utilisateur. Voici un tel code appliqué à la formule du point milieu.

Code SCILAB 5 (Un test d'arrêt sur la méthode du point milieu). Dans le code suivant,

- (a) *myeps* est l'epsilon fixé par l'utilisateur, ici 10^{-8} .
- (b) *PM* est la fonction définie au code SCILAB 2.
- (c) Le résultat affiche le couple $A=(\text{nombre de sous-intervalles, valeur approchée})$.

```

1  myeps=10^(-8);
2  k=1;
   while abs(PM(0,1,k,fonc)-PM(0,1,k+1,fonc)) >
   myeps; k=k+1; end
4  A=[k,PM(0,1,k,fonc)]

```

Ce test peut s'avérer médiocre lorsque la convergence est lente. En prenant $\varepsilon = 10^{-6}$ et $\text{fonc}(x) = 4/(1+x^2)$ sur $[0, 1]$, le code précédent donne $k = 55$ et l'intégrale (qui vaut π) est approchée avec une erreur de $2.75 \cdot 10^{-5}$. Pour $\varepsilon = 10^{-8}$, l'erreur est $1.28 \cdot 10^{-6}$.

Signalons en outre que l'usage d'une instruction *while* peut être dangereux. Elle peut donner lieu à une exécution infinie si la condition d'arrêt n'est jamais vérifiée. Il est judicieux d'imposer un nombre maximal d'itérations après lequel la boucle s'interrompt, que la condition du *while* soit satisfaite ou non.

E 48 Rajouter une instruction d'échappement comme indiqué ci-dessus dans le code SCILAB 5. On pourra consulter le détail du fonctionnement de la boucle *while* sur les fichiers d'aide scilab ainsi que de l'instruction *break* *.

§ 5. EXERCICES ET PROBLÈMES

49 Une caractérisation de la formule du point milieu. Déterminer tous les points $p \in [a, b]$ tels que l'approximation

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(p)$$

soit exacte (i.e., soit une égalité) pour tous les polynômes de degré ≤ 1 .

50 Une expression de l'erreur dans la formule des trapèzes. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 dans $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \int_a^b (x-a)(b-x)\frac{f''(x)}{2}dx.$$

On pourra calculer la partie intégrale dans le terme de droite en effectuant une ou plusieurs intégrations par parties.

*. Voir aussi l'exercice III.61 à la suite du code SCILAB 7

51 Une formule de quadrature avec points intérieurs. Soient $a < b$ et pour $i = 0, \dots, 3$, $x_i = a + i\frac{b-a}{3}$ de sorte que $x_0 = a$ et $x_3 = b$, f désigne une fonction continue sur $[a, b]$. Démontrer que

$$\int_a^b \mathbf{L}[x_1, x_2; f](x) dx = \frac{b-a}{2} [f(x_1) + f(x_2)] \quad (5.1)$$

où $\mathbf{L}[x_1, x_2; f]$ désigne le polynôme d'interpolation de f par rapport aux points x_1 et x_2 .

52 La seconde formule de Simpson. Soient x_i , $i = 0, \dots, 3$ les points équidistants de l'intervalle $[a, b]$, $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/3$, $i = 0, 1, 2, 3$.

(a) Montrer que

$$\int_a^b \mathbf{L}[x_0, x_1, x_2, x_3; f](x) dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)].$$

(b) L'expression

$$Q(f) = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

s'appelle la **seconde formule de Simpson** ou la **formule de Newton** [Newton 1711].

(c) Illustrer graphiquement l'approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)].$$

(d) Donner la formule de quadrature composée correspondante (avec n sous-intervalles).

53 Un exemple. Soit $I = \int_0^1 x^{1/2} dx$.

(a) Donner la valeur exacte de I .

(b) Donner une approximation de I en utilisant la méthode de Simpson avec deux sous-intervalles.

(c) Le théorème du cours permettait-il de prédire l'erreur commise ?

(UPS, L2, 2005)

54 Formule des trapèzes et fonctions convexes. On souhaite calculer une valeur approchée de $\ln(2)$ à partir de la relation

$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Nous considérerons la fonction f définie sur $]0, \infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Montrer que pour tout $(a, b) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b). \quad (5.2)$$

(b) On suppose $0 < a < b < \infty$. Soit $x \in [a, b]$. Montrer que $\frac{b-x}{b-a} \in [0, 1]$. Montrer en prenant $t = \frac{b-x}{b-a}$ dans (5.2) que

$$f(x) \leq \mathbf{L}[a, b; f](x).$$

(c) Trouver une approximation de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en appliquant la méthode des trapèzes combinée avec 2 sous-intervalles. Faire un schéma illustrant le calcul.

(d) Expliquer pourquoi quel que soit le nombre de sous-intervalles, le nombre trouvé par la méthode des trapèzes combinée fournira toujours une approximation par excès (c'est-à-dire supérieure à la valeur exacte $\ln(2)$).



(e) On approche maintenant $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en utilisant la méthode Simpson combinée. Combien de sous-intervalles faut-il utiliser pour commettre une erreur inférieure ou égale à 10^{-10} ?

(UPS, L2, 2003, sol 7 p. 99.)

NOTE. — Voir l'exercice I.11.

55 Un exemple. Estimer, à l'aide des théorèmes du cours, le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

avec une erreur moindre que 10^{-6} , en utilisant (a) la méthode du point milieu combinée, (b) la méthode des trapèzes combinée, (c) la méthode de Simpson combinée ? Comparer les estimations trouvées avec les résultats donnés dans le tableau 4 (voir cours).

| n | Point milieu | Trapèze | Simpson |
|-------|--------------|-----------|-------------|
| 2. | - 0.0207603 | 0.0415927 | 0.0000240 |
| 4. | - 0.0052079 | 0.0104162 | 0.0000002 |
| 6. | - 0.0023148 | 0.0046296 | 1.328D-08 |
| 8. | - 0.0013021 | 0.0026042 | 2.365D-09 |
| 10. | - 0.0008333 | 0.0016667 | 6.200D-10 |
| 70. | - 0.0000170 | 0.0000340 | 5.329D-15 |
| 930. | - 9.635D-08 | 0.0000002 | - 4.441D-16 |
| 2300. | - 1.575D-08 | 3.151D-08 | 4.441D-16 |

TABLE 4 – Erreur dans l'approximation de $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ avec les méthodes du point milieu, du trapèze et de Simpson.

56 Sensibilité de la formule des trapèzes composée aux erreurs sur les valeurs de la fonction. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \exp(x^2)$. On souhaite calculer une valeur approchée de

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

par la méthode de Simpson combinée.

On note $A(n, f)$ la valeur approchée fournie par la méthode de Simpson combinée avec n sous-intervalles.

(a) Déterminer une valeur de n aussi petite que possible assurant $|I - A(n, f)| \leq 10^{-3}$. On notera v la valeur de n trouvée.

Le calcul de $A(n, f)$ nécessite l'utilisation d'un certain nombre de valeurs de la fonction f . Or on ne peut disposer que d'une approximation de cette fonction, une approximation donnée, disons, par la fonction \tilde{f} . Il est donc impossible de calculer exactement $A(n, f)$: on ne peut disposer que de $A(n, \tilde{f})$.

(b) On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$ on a $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon$ où ε est un réel strictement positif. Montrer que

$$|A(n, f) - A(n, \tilde{f})| \leq \varepsilon$$

(c) En déduire une majoration pour $|I - A(v, \tilde{f})|$.

(d) Que peut-on dire de la perte de précision entraînée par le calcul de la formule donnant $A(v, \tilde{f})$ sur une calculatrice travaillant avec une précision de 10^{-12} ?



(UPS, L2, 2004, sol. 8 p. 100.)

57 Méthode des parabole à chevauchement. Soit $n \geq 1$. On considère $n + 1$ points x_i dans l'intervalle $[a, b]$ de sorte que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

(a) Pour $i = 1, \dots, n - 2$, on utilise l'approximation

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx Q_i(f)$$

où

$$Q_i(f) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{L}[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f](x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{L}[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f](x) dx \right\}.$$

(b) On définit les nombres a_i, b_i et c_i pour $i = 1, \dots, n - 1$ par la relation

$$\mathbf{L}[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f](x) = a_i x^2 + b_i x + c_i.$$

Démontrer que

$$Q_i(f) = \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \left(\frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} \right) + \frac{b_i + b_{i+1}}{2} \left(\frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} \right) + \frac{c_i + c_{i+1}}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

(c) Montrer, en utilisant le théorème mesurant l'erreur entre une fonction et son polynôme d'interpolation, que si $f \in C^3[a, b]$ alors il existe une constante C_i que l'on précisera telle que

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - Q_i(f) \right| \leq C_i \cdot \sup_{[x_{i-1}, x_{i+2}]} |f^{(3)}|.$$

On considère maintenant l'approximation

$$\int_a^b f(x) dx \approx Q(f)$$

avec

$$Q(f) = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{L}[x_0, x_1, x_2; f](x) dx + \sum_{i=1}^{n-2} Q_i(f) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{L}[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n; f](x) dx.$$

(d) Montrer que si f est un polynôme de degré ≤ 2 alors $Q(f) = \int_a^b f(x) dx$.

(e) Donner une majoration de l'erreur $\left| \int_a^b f(x) dx - Q(f) \right|$ lorsque $f \in C^3[a, b]$.

(UPS, L2, 2005, sol. 9 p. 101.)

58 Une démonstration* des formules d'erreur pour les méthodes du point milieu, des trapèzes et de Simpson. Rappelons les théorèmes

Théorème. (a) Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(2)}| \quad (5.3)$$

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(2)}|. \quad (5.4)$$

*. [3]



(b) Si $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}|. \quad (5.5)$$

Nous construisons une démonstration de chaque inégalité en suivant un principe commun. Posons $c := \frac{a+b}{2}$, $a = c - h$ et $b = c + h$ (de sorte que $h = \frac{b-a}{2}$) et considérons

$$\Psi_{\text{Simp}}(t) = \Psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x) dx - \frac{t}{3} \{f(c+t) + 4f(c) + f(c-t)\}$$

puis

$$\Phi(t) = \Psi(t) - \left(\frac{t}{h}\right)^5 \Psi(h)$$

(a) Calculer les trois premières dérivées de Φ et montrer qu'il existe $\xi(t) \in [a, b]$ tel que

$$\Phi^{(3)}(t) = \frac{-2t^2}{3} \left\{ f^{(4)}(\xi(t)) + \frac{90}{h^5} \Psi(h) \right\}.$$

(b) Montrer en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle qu'il existe $\bar{t} \in [a, b]$ tel que $\Phi^{(3)}(\bar{t}) = 0$.

(c) En déduire l'estimation (5.5).

(d) Démontrer (5.4) en s'inspirant de la démonstration précédente. On considérera

$$\Psi_{\text{trap}} = \Psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x) dx - t \{f(c+t) + f(c-t)\}$$

puis

$$\Phi(t) = \Psi(t) - \left(\frac{t}{h}\right)^3 \Psi(h)$$

(e) Démontrer (5.3) toujours en suivant la même technique : quelle est la fonction Ψ_{milieu} appropriée ?



III

Solutions approchées des équations

§ 1. INTRODUCTION

Le problème de construire une suite convergente vers la solution d'une équation numérique est certainement à l'origine des plus anciens algorithmes mathématiques. L'exemple le plus célèbre est l'algorithme attribué à Héron d'Alexandrie mais qui était vraisemblablement connu des mathématiciens babyloniens. Cet algorithme fournit une approximation rapide de \sqrt{a} , $a > 0$, qui est l'unique solution positive de l'équation $x^2 - a = 0$. Les équations numériques interviennent fréquemment en mathématiques. Des questions fondamentales qui apparaissent dans de nombreux contextes scientifiques comme la détermination de points d'intersection de graphes ou celle des extremums de fonctions numériques (qui passe par le calcul des points d'annulation de la dérivée) conduisent à la résolution d'équations. Les méthodes avancées d'analyse numérique comportent aussi souvent des résolutions d'équations numériques, notamment dans l'étude des équations différentielles*.

De manière précise, ce chapitre est consacré au problème suivant. Étant donnée une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, nous cherchons les réels x dans $[a, b]$ satisfaisant $f(x) = 0$. Un tel réel s'appelle une solution de l'équation $f(x) = 0$. On dit aussi, surtout lorsque f est un polynôme, que x est un zéro de f ou encore une racine de f . En principe, trois questions se posent.

- (i) L'équation a-t-elle des solutions ?
- (ii) Si oui, combien en a-t-elle ?
- (iii) Déterminer des valeurs aussi proches que nécessaire de ces solutions, étant entendu que les cas pour lesquels une solution exacte exploitable peut être obtenue sont très rares.

L'étude des points (i) et (ii) ne sera abordée que dans la dernière partie de ce chapitre. Ailleurs, nous supposerons que l'équation admet une et une seule solution dans $[a, b]$, ou bien cela découlera immédiatement de nos hypothèses. Rappelons que, dans les cas simples, une étude élémentaire de fonction (avec tableau de variation) permet de s'assurer si cette hypothèse est satisfaite ou non. Parmi le grand nombre de méthodes disponibles pour répondre au troisième point, nous étudierons quatre techniques classiques.

*. Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et la relation déterminant l'inconnue fait intervenir la dérivée de cette inconnue.

- (1) La méthode de dichotomie.
 (2) Les méthodes de la sécante et de Newton qui consistent à remplacer l'équation $f(x) = 0$ par $p(x) = 0$ où p est un polynôme du premier degré – c'est-à-dire une fonction affine – proche de f .
 (3) La méthode dite du point fixe ou des approximations successives.

Signalons que les méthodes que nous allons exposer sont si naturelles, elles ont une signification géométrique si simple qu'il est pratiquement impossible d'en tracer l'origine. D'ailleurs, il n'y a pas de terminologie fixe. Ce qui dans un texte est appelé *méthode de la sécante* portera dans l'autre le nom de *méthode des cordes*, celle de *dichotomie* ou *bissection* s'appelle parfois, notamment dans les textes en langue anglaise, la *méthode d'encadrement*.

§ 2. MÉTHODE DE DICHOTOMIE (OU DE BISSECTION)

2.1 Définition

La méthode repose uniquement sur le théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ satisfaisant les deux conditions suivantes ;

- i) f admet une et une seule racine r dans $[a, b]$,
 ii) $f(a)f(b) < 0$.

Posons $c = (a + b)/2$. Trois cas de figure seulement sont possibles. Ou bien $f(c) = 0$ auquel cas la solution de l'équation est trouvée puisque $r = c$, ou bien $f(c) \neq 0$ auquel cas $f(b)f(c)$ est soit négatif soit positif. Si $f(b)f(c) < 0$, f change de signe en passant de c à b et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule entre c et b . Comme f s'annule une seule fois, cela signifie que $r \in]c, b[$. Maintenant si $f(b)f(c) > 0$, puisque $f(a)f(b) < 0$, nous avons nécessairement $f(a)f(c) < 0$ et le même théorème des valeurs intermédiaires nous donne $r \in]a, c[$.

Ce raisonnement simple nous a permis de nettement préciser la localisation de la solution puisque nous savions au départ que $r \in]a, b[$ et nous connaissons maintenant un intervalle de longueur deux fois moindre contenant r . En itérant le test, nous obtenons une suite qui converge vers la solution de l'équation. Cette itération est décrite dans l'algorithme suivant.

Algorithme III.1. *Sous les hypothèses i) et ii) ci-dessus, il construit trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) de la manière suivante.*

(a) $a_1 = a ; b_1 = b$.

(b) Pour $n \geq 1$,

(a) $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

(b) i. Si $f(c_n) = 0$ alors c_n est la racine de f et le processus est arrêté

ii. Sinon

– Si $f(c_n)f(b_n) < 0$ alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

– Si $f(c_n)f(b_n) > 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

L'algorithme ci-dessus s'appelle l'**algorithme de dichotomie** ou **algorithme de bisection**.

2.2 Etude de la convergence

Théorème III.2. Soit f continue sur $[a, b]$. Nous supposons que $f(a)f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution r dans $[a, b]$. Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape $n + 1$ (de sorte que $c_i \neq r$, $0 \leq i \leq n$) alors

$$|r - c_{n+1}| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Démonstration. Remarquons que

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} \\ \text{ou} \\ c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \end{cases} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

En continuant,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{4} = \dots = \frac{b - a}{2^n}.$$

Ensuite, c_{n+1} étant le milieu de $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, pour tout $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ nous avons

$$|x - c_{n+1}| \leq (b_{n+1} - a_{n+1})/2 = (b - a)/2^{n+1}.$$

Mais, par définition, la racine r se trouve dans $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ car $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$, nous pouvons donc prendre $x = r$ dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$|r - c_{n+1}| \leq (b_{n+1} - a_{n+1})/2 = (b - a)/2^{n+1}. \quad \blacksquare$$

Voici le code scilab pour la méthode de dichotomie.

Code SCILAB 6 (Algorithme de dichotomie). La fonction suivante donne une valeur approchée d'une solution de l'équation $fonc(x) = 0$ sur l'intervalle $[exg, exd]$ en appliquant la méthode de dichotomie avec n itérations. Le code suppose que $fonc(exg) \cdot fonc(exd) < 0$.

```

1  fonction [y]=DICHO(exg , exd , fonc , n );
    a=exd ;
3  b=exg ;
    for i = 1 : n ;
5      y=(a+b)*0.5 ;
      s=sign ( fonc (y)* fonc (b) ) ;
7      if s== -1 then ;
          a=y ;
9      else ;
          b=y ;
11     end ;
    end ;
13 endfunction ;

```

E 59 Quelle est le résultat donné par la fonction DICH0 si l'hypothèse $\text{fonc}(\text{exg}) \cdot \text{fonc}(\text{exd}) < 0$ n'est pas satisfaite ? Rajouter un test au début du code pour s'assurer que la condition est vérifiée et imprimant 'Attention : la fonction ne satisfait la condition des signes' dans le cas contraire. Pour l'instruction d'impression utiliser `disp('Attention : la fonction ne satisfait la condition des signes.')`.

Grâce au théorème III.2, il suffit de rajouter une ligne de code pour obtenir une fonction `DICHEPS(exg, exd, fonc, myeps)` qui donne une approximation avec une précision `myeps` fixée par l'utilisateur.

E 60 Ecrire cette fonction.

Le code suivant adopte une construction un peu différente en faisant à un instruction du type 'tant que' (while).

Code SCILAB 7 (Algorithme de dichotomie à précision fixée). La fonction suivante donne une valeur approchée par la méthode de dichotomie d'une solution de l'équation $\text{fonc}(x) = 0$ sur l'intervalle $[\text{exg}, \text{exd}]$ avec une erreur au plus égale à `myeps`. Le code suppose que $\text{fonc}(\text{exg}) \cdot \text{fonc}(\text{exd}) < 0$.

```

1  fonction [y]=DICH0EPS(exg , exd , fonc , myeps );
2  a=exg ;
3  b=exd ;
4  k=0;
5  while abs ((exd-exg)/2^{k+1})> myeps ;
6      y=(a+b)*0.5 ;
7      s=sign ( fonc (y)* fonc (b) );
8      if s== -1 then ;
9          a=y ;
10         else ;
11             b=y ;
12         end ;
13     k=k+1 ;
14 end ;
endfunction

```

E 61 A la suite du code SCILAB II.5, nous avons signalé un danger éventuel lié à l'utilisation des boucles `while`, voir l'exercice II.48. Pourquoi cette mise en garde n'a-t-elle pas lieu d'être ici ?

Exemple 1.

(a) L'équation $x^4 + x^3 - 1 = 0$ admet une solution (unique) dans $]0, 1[$ comme le montre une étude bien simple de fonction. Une approximation \tilde{r} de la racine r avec une erreur moindre que 10^{-6} est obtenu en moins de 0.2 seconde, $\tilde{r} = 0.8191729$, par la méthode de dichotomie. La figure dans la première colonne table 1 représente les quatre premiers termes de la suite et la seconde colonne en reporte les valeurs.

(b) De même, l'équation $x - \sin x - 1/4 = 0$ admet une solution unique dans $]0, \pi/2[$. Une approximation \tilde{r} de la racine r avec une erreur moindre que 10^{-6} est obtenu en moins de 0.2 seconde : $\tilde{r} = 1.1712288$ par l'algorithme de dichotomie dont ses valeurs sont indiquées dans la troisième colonne de la table 1.

E 62 Modifier l'algorithme de dichotomie ci-dessus pour que $\varepsilon > 0$ étant donné, il donne un nombre c tel que $|r - c| \leq \varepsilon$. (En vertu du théorème III.2, il suffit de construire c_n avec $(b - a)/2^n \leq \varepsilon$.)

E 63 Montrer que l'algorithme III.1 fonctionne encore si l'on retire la première hypothèse sur f à savoir que f admet une unique racine dans $[a, b]$ et vérifier qu'il converge toujours vers une racine de f . Dans les deux schémas de la table, dite vers laquelle des racines convergera l'algorithme. Il sera peut-être nécessaire d'utiliser une règle graduée.

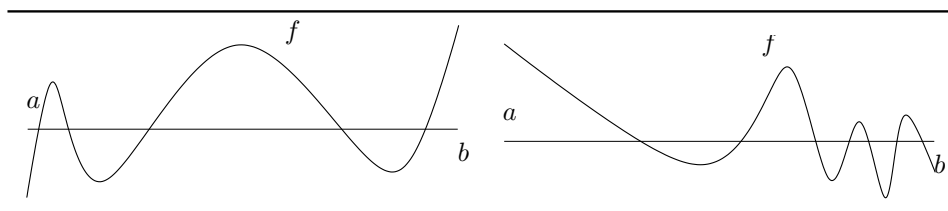
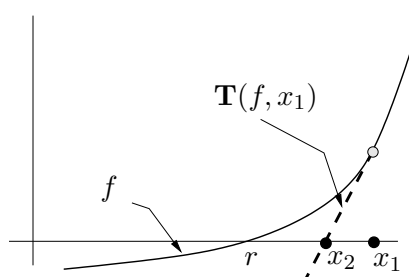


FIGURE 1 – Vers laquelle des racines convergera l'algorithme de dichotomie ?

§ 3. MÉTHODE DE NEWTON

3.1 Construction

Supposons que $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et que l'équation $f(x) = 0$ admette une et une seule racine, notée r , dans $[a, b]$. L'idée de la **méthode de Newton** consiste à remplacer l'équation $f(x) = 0$ par l'équation $T_1(x) = 0$ où T_1 est le polynôme de Taylor de f de degré 1 en un point x_1 .



Puisque $T_1(x)$ est un polynôme du premier degré, le calcul de sa racine est immédiat et il est naturel d'espérer que cette racine sera proche de celle de f . Nous avons

$$T_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

et l'équation $T_1(x) = 0$ a pour racine le nombre x_2 donné par

FIGURE 2 – Schéma de Newton.
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Comme toujours, le principe est assez grossier puisqu'un polynôme du premier degré, quel qu'il soit, n'approchera que très imparfaitement la fonction f . C'est en itérant le procédé que nous obtiendrons une bonne approximation de la racine. Une condition nécessaire, qui n'est pas obligatoirement satisfaite, pour effectuer cette itération est que le point x_2 appartienne bien à l'intervalle $[a, b]$ faute de quoi, cela n'aurait pas de sens de parler du polynôme de Taylor de f en x_2 . Lorsque cette condition est satisfaite, en remplaçant $f(x) = 0$ par $T_2(x) = 0$ où $T_2(x) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$ et en résolvant cette dernière équation, nous obtenons

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad \text{avec} \quad r \approx x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Nous construisons ainsi par récurrence, *sous réserve que* $x_n \in [a, b]$, la suite

$$\begin{cases} x_1 &= b \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

Cette relation de récurrence s'appelle le schéma de Newton. Le mot *schéma* est un synonyme ancien du mot *algorithme*.

E 64 Donner (graphiquement) un exemple de fonction pour laquelle la suite (x_n) n'est pas définie. Il s'agit de construire une fonction pour laquelle il existe une valeur n avec $x_n \notin [a, b]$ de sorte qu'il ne soit pas possible de calculer $f(x_n)$ et donc x_{n+1} .

3.2 Etude de la convergence

Nous devons répondre aux trois questions suivantes.

- i) La suite (x_n) est-elle bien définie ?
- ii) Si oui, converge-t-elle vers la racine r ?
- iii) Si oui, quelle est la rapidité de convergence ?

Les réponses dépendent naturellement des propriétés de la fonction f considérée. De nombreux théorèmes apportent des réponses. Le suivant est l'un des plus simples. Ses hypothèses correspondent à la figure 2.

Théorème III.3. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle ouvert I contenant $[a, b]$ telle que f' et f'' soient strictement positives sur I (f est strictement croissante convexe). Nous supposons que $f(b) > 0$, $f(a) < 0$ et nous appelons r l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a, b]$.

(a) La suite de Newton

$$\begin{cases} x_1 &= b \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

est bien définie.

- (b) Elle converge vers r en décroissant.
- (c) L'estimation suivante est vraie

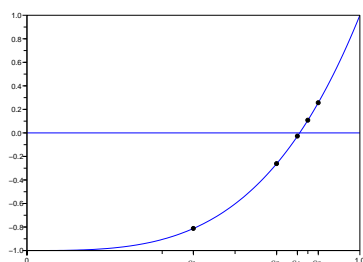
$$|x_n - r| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - r)^2$$

où $M_2 = \sup_{[a,b]} f''$ et $m_1 = \inf_{[a,b]} f'$.

Exemple 2. L'équation

$$3x^5 - x^4 - 1 = 0 \tag{3.1}$$

admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$. En effet la fonction $f(x) = 3x^5 - x^4 - 1$ a pour dérivée $f'(x) = x^3(15x - 4)$ et, sur $[0, 1]$ elle décroît de $f(0) = -1$ jusqu'à $f(4/15) \approx -1,001$ puis croît jusqu'à $f(1) = 1$. En particulier $r \in]4/15, 1[$. Par ailleurs, puisque $f''(x) = 12x^5(5x - 1)$, f est strictement convexe sur $[1/5, 1]$ en particulier sur $[4/15, 1]$ puisque $4/15 > 1/5$. Nous pouvons appliquer le théorème III.3 sur l'intervalle $[4/15, 1]$ en prenant comme point de départ $x_0 = 1$. Les dix premiers termes de la suite de Newton sont donnés dans le tableau 2. Remarquons que nous obtenons les six premières décimales de r dès le quatrième terme de la suite.



| n | c_n | n | c_n |
|-----|-----------|-----|-----------|
| 1. | 0.5 | 1. | 0.7853982 |
| 2. | 0.75 | 2. | 1.1780972 |
| 3. | 0.875 | 3. | 0.9817477 |
| 4. | 0.8125 | 4. | 1.0799225 |
| 5. | 0.84375 | 5. | 1.1290099 |
| 6. | 0.828125 | 6. | 1.1535536 |
| 16. | 0.8191681 | 16. | 1.1712183 |
| 17. | 0.8191757 | 17. | 1.1712303 |
| 18. | 0.8191719 | 18. | 1.1712243 |
| 19. | 0.8191738 | 19. | 1.1712273 |
| 20. | 0.8191729 | 20. | 1.1712288 |

Quatre premières valeurs données par l'algorithme de dichotomie pour résoudre l'équation $x^4 + x^3 - 1 = 0$ dans $[0, 1]$.

$$x^4 + x^3 - 1 = 0 \quad x - \sin x - 1/4 = 0$$

$$x \in [0, 1] \quad x \in [0, \pi/2]$$

TABLE 1 – Exemple d'applications de la méthode de dichotomie

| $3x^5 - x^4 - 1 = 0$ | | | $f(x) = x - \sin(x) - 1/4$ | | |
|----------------------|-----------|-----------------|----------------------------|-----------------------|-----------------|
| n | x_n | $x_n - x_{n-1}$ | n | x_n | $x_n - x_{n-1}$ |
| 1. | 1. | | 1. | 1.5707963 ($\pi/2$) | |
| 2. | 0.9090909 | -0.0909091 | 2. | 1.25 | -0.3207963 |
| 3. | 0.8842633 | -0.0248276 | 3. | 1.1754899 | -0.0745101 |
| 4. | 0.8826212 | -0.0016421 | 4. | 1.1712433 | -0.0042467 |
| 5. | 0.8826144 | -0.0000068 | 5. | 1.1712297 | -0.0000136 |
| 6. | 0.8826144 | -1.161D-10 | 6. | 1.1712297 | -1.397D-10 |
| 7. | 0.8826144 | 0. | 7. | 1.1712297 | 2.220D-16 |
| 8. | 0.8826144 | 0. | 8. | 1.1712297 | -2.220D-16 |
| 9. | 0.8826144 | 0. | 9. | 1.1712297 | 2.220D-16 |
| 10. | 0.8826144 | 0. | 10. | 1.1712297 | -2.220D-16 |

TABLE 2 – Premiers termes de deux suites de Newton

Les valeurs de l'exemple précédent sont calculées avec le code suivant.

Code SCILAB 8 (Méthode de Newton). La fonction suivante applique le schéma de Newton à l'équation $\text{fonc}(x) = 0$.

- (a) dfonc est la dérivée de fonc .
- (b) a est le point de départ ($a = x_0$).
- (c) n est le nombre d'itération (l'algorithme produit x_n).

Aucune condition n'étant testée, il n'y a pas garantie de convergence.

```

1  fonction [y]=NEWTON(a, fonc, dfonc, n);
    y=a;
3  for i=1:n;
    y=y-fonc(y)/dfonc(y);
5  end
endfunction

```

E 65 Justifier l'emploi de la suite de Newton pour l'équation $x - \sin(x) - 1/4 = 0$.

Démonstration du théorème III.3. Nous décomposons la démonstration en plusieurs étapes.

Etape 1. Montrons que $r < x_1 < x_0 = b$. Nous avons

$$x_0 = b \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x_0) > 0 \\ f' > 0 \text{ (hyp.)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} > 0 \Rightarrow x_0 - \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} < x_0 \Rightarrow x_1 < x_0.$$

Ensuite, en utilisant la formule de Taylor de f à l'ordre 2 en x_0 (théorème II.II.3), il vient

$$f(r) = f(x_0) + (r - x_0)f'(x_0) + \frac{(r - x_0)^2}{2}f''(c)$$

où $c \in]r, x_0[$. Puisque $f(r) = 0$, cette relation devient

$$\begin{aligned} -f(x_0) &= (r - x_0)f'(x_0) + \frac{(r - x_0)^2}{2}f''(c) \\ \Rightarrow \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} &= (r - x_0) + \frac{(r - x_0)^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= r + \frac{(r - x_0)^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow x_1 &= r + \frac{(r - x_0)^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow x_1 &> r \quad \text{car } f'' > 0, f' > 0 \end{aligned}$$

Etape 2. Supposons que nous ayons démontré que

$$(P_n) \quad r < x_{n+1} < x_n \leq b \quad (\text{Hypothèse de récurrence}).$$

D'abord, puisque x_{n+1} se trouve dans l'intervalle $[a, b]$, nous pouvons calculer x_{n+2} par la définition, $x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})}$. Nous allons établir la propriété P_{n+1} ,

$$(P_{n+1}) \quad r < x_{n+2} < x_{n+1} \leq b.$$

Remarquons d'abord que la dernière inégalité est déjà contenue dans l'hypothèse de récurrence de sorte que nous devons simplement obtenir $x_{n+2} < x_{n+1}$ et $r < x_{n+2}$. Puisque f est strictement croissante et que, en vertu hypothèse de récurrence, $x_{n+1} > r$, nous avons aussi $f(x_{n+1}) > f(r) = 0$. Ensuite,

$$\left. \begin{array}{l} f(x_{n+1}) > 0 \\ f' > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{f'(x_{n+1})}{f(x_{n+1})} < 0 \Rightarrow x_{n+1} - \frac{f'(x_{n+1})}{f(x_{n+1})} < x_{n+1} \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}.$$

En utilisant à nouveau la formule de Taylor (théorème II.II.3), nous pouvons écrire

$$f(r) = f(x_{n+1}) + (r - x_{n+1})f'(x_{n+1}) + \frac{(r - x_{n+1})^2}{2}f''(c)$$

où $c \in]r, x_{n+1}[$. Utilisant $f(r) = 0$, nous obtenons avec les mêmes calculs que précédemment

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})} &= r + \frac{(r - x_{n+1})^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_{n+1})} \\ \text{d'où } x_{n+2} &= r + \frac{(r - x_{n+1})^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_{n+1})} \\ \text{d'où } x_{n+2} &> r \quad \text{car } f'' > 0 \text{ et } f' > 0. \end{aligned}$$

Les étapes 1 et 2 montrent par récurrence que la suite (x_n) est bien définie et vérifie

$$r < x_{n+1} < x_n \leq b \quad n \geq 1.$$

En particulier, étant décroissante et minorée par r la suite (x_n) est convergente. Appelons l sa limite. Nous devons nous assurer que $l = r$. Faisons $n \rightarrow \infty$ dans la relation

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3.2)$$

Nous avons à la fois $x_{n+1} \rightarrow l$ et $x_n \rightarrow l$. La continuité de f entraîne que $f(x_n) \rightarrow f(l)$ et celle de f' que $f'(x_n) \rightarrow f'(l)$. Observons que $f'(l)$ est non nul car, par hypothèse, f' ne s'annule jamais. Le passage à la limite ($n \rightarrow \infty$) dans (3.2) donne donc

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \Rightarrow f(l) = 0 \Rightarrow l = r, \quad (3.3)$$

la dernière implication étant justifiée par le fait que f admet une et une seule racine. Enfin, revenant à la relation

$$x_{n+2} = r + \frac{(r - x_{n+1})^2}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_{n+1})},$$

établie au dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - r| &\leq \left| \frac{(r - x_{n+1})^2}{2} \right| \left| \frac{f''(c)}{f'(x_{n+1})} \right|, \\ \text{d'où } |x_{n+2} - r| &\leq \left| \frac{(r - x_{n+1})^2}{2} \right| \left| \frac{M_2}{m_1} \right|. \end{aligned}$$

■

A cause de la relation $|x_{n+2} - r| \leq C(r - x_{n+1})^2$, nous disons que la méthode de Newton est d'**ordre** 2. Une telle propriété implique une convergence très rapide. Par exemple, si, au rang n l'erreur est comparable à 10^{-3} , au rang $n + 1$, elle sera au pire comparable à 10^{-6} , au rang $n + 2$, à 10^{-12} et ainsi de suite.

E 66 Donner une estimation de $|x_{n+2} - r|$ en fonction de C et $|x_1 - r|$. Montrer que si $|x_1 - r| < 1$ alors il existe $\delta < 1$ tel que

$$|x_{n+1} - r| \leq \delta^{2^n}.$$

3.3 Autres versions

Il est facile d'adapter le théorème précédent pour traiter toutes les équations de la forme $f(x) = 0$ lorsque la fonction f et sa dérivée sont toutes deux strictement monotones. Il y a quatre cas à considérer, donnés dans la figure 3. Le lecteur écrira la définition de la suite de Newton adaptée à chaque cas.

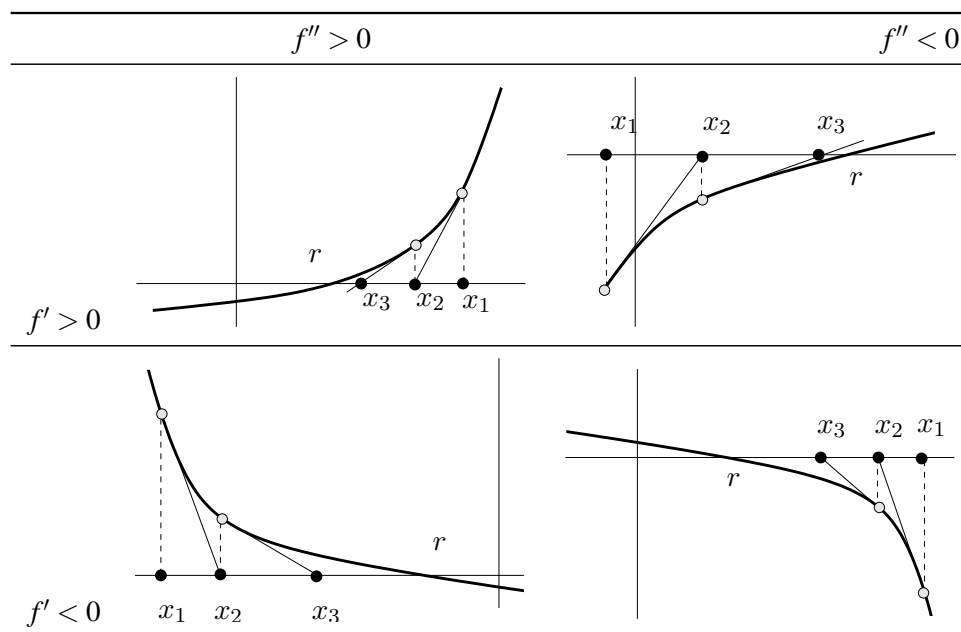


TABLE 3 – Quatre schémas de Newton convergents.

§ 4. MÉTHODE DE LA SÉCANTE

4.1 Construction

Supposons à nouveau que $f \in \mathcal{C}[a, b]$, que l'équation $f(x) = 0$ admette une et une seule solution r dans $[a, b]$ et enfin que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Comme dans la méthode de Newton, la **méthode de la sécante** consiste à remplacer l'équation $f(x) = 0$ par une équation polynomiale du premier degré en choisissant un polynôme aussi voisin que possible de f . Ici, le choix se

porte sur le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathbf{L}[a, b; f](x) = 0$ qui prend donc le rôle du développement de Taylor dans la méthode de Newton. Du point de vue de calcul, cette méthode a l'avantage de ne pas requérir le calcul d'une dérivée. Nous verrons cependant que sa rapidité de convergence est sensiblement plus faible. Puisque

$$\mathbf{L}[a, b; f](x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a} = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a), \quad (4.1)$$

l'unique solution de l'équation $\mathbf{L}[a, b; f](x) = 0$ qui vient se substituer à $f(x) = 0$ est donnée par

$$\begin{aligned} x_1 &= -f(a) \frac{b-a}{f(b) - f(a)} + a \\ &= \frac{-f(a)b + af(a) + af(b) - af(a)}{f(b) - f(a)} \\ &= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \end{aligned}$$

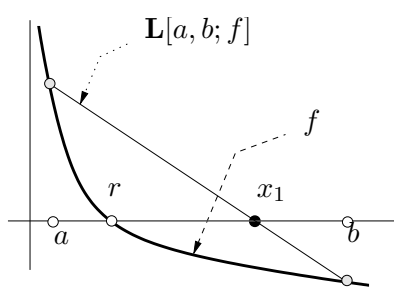


FIGURE 3 –
rer $\mathbf{L}[x_1, b; f](x) = 0$ dont nous noterons la racine x_2 . Nous obtenons

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}.$$

En poursuivant, nous construisons par récurrence, *sous réserve* que $x_n \in [a, b]$, la suite

$$\begin{cases} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad (n \geq 0). \end{cases}$$

La suite récurrente ainsi construite s'appelle le schéma de la sécante.

E 67 Donner sur un exemple graphique une équation $f(x) = 0$ admettant une unique solution mais pour laquelle la suite de la sécante ne peut pas être construite. Voir aussi l'exercice 64.

4.2 Étude de la convergence

Nous devons répondre aux mêmes questions que pour la méthode de Newton. Les hypothèses du théorème suivant correspondent à la figure 4.1.

Théorème III.4. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle ouvert I contenant $[a, b]$ telle que f' et f'' soient strictement positives sur I (f est strictement croissante convexe). Nous supposons que $f(b) > 0$, $f(a) < 0$ et nous notons r l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$.

(a) La suite

$$\begin{cases} x_0 & = & a \\ x_{n+1} & = & \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

est bien définie.

(b) Elle converge en croissant vers r et

(c) nous avons l'estimation

$$|x_n - r| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})(b - x_n)$$

où $M_2 = \max_{[a,b]} f''$ et $m_1 = \min_{[a,b]} f'$.

Un énoncé plus simple (moins précis) est proposé à l'exercice 79 avec une démonstration différente de celle qui est esquissée ci-dessous.

Démonstration. Elle est similaire en principe à celle du théorème III.3. Les détails sont laissés au lecteur. Nous établirions par récurrence sur n que

$$a < x_n \leq x_{n+1} < r < b, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.2)$$

La relation $x_n \leq x_{n+1}$ s'obtient facilement à partir de l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n . Pour le reste, il suffit d'observer que par définition de x_n , $\mathbf{L}[x_{n-1}, b; f](x_n) = 0$ et d'autre part, en utilisant le théorème des accroissements finis

$$f(x_n) = f(x_n) - f(r) = (x_n - r)f'(\theta_n)$$

pour un certain θ_n compris strictement entre x_n et r . Il suit que

$$x_n - r = \frac{f(x_n) - \mathbf{L}[x_{n-1}, b; f](x_n)}{f'(\theta_n)}. \quad (4.3)$$

Il reste à utiliser le théorème sur l'erreur dans l'interpolation de Lagrange (th. I.I.9) qui nous donne

$$f(x_n) - \mathbf{L}[x_{n-1}, b; f](x_n) = \frac{1}{2} (x_n - x_{n-1})(x_n - b)f''(\xi) \quad (4.4)$$

pour un ξ compris entre x_{n-1} et b . ■

Exemple 3. Nous reprenons dans la table 4 les exemples étudiés ci-dessus avec la méthode de Newton.

Code SCILAB 9 (Méthode de la sécante). La fonction suivante applique le schéma de la sécante (avec extrémité droite fixe) à l'équation $\text{fonc}(x) = 0$.

| $3x^5 - x^4 - 1 = 0$ | | | $f(x) = x - \sin(x) - 1/4$ | | |
|----------------------|-----------|-----------------|----------------------------|-----------|-----------------|
| n | x_n | $x_n - x_{n-1}$ | n | x_n | $x_n - x_{n-1}$ |
| 1. | 0.15 | - 1. | 1. | 0.15 | |
| 2. | 0.5750592 | 0.4250592 | 2. | 1.4921931 | 1.3421931 |
| 3. | 0.7787569 | 0.2036977 | 3. | 1.1336931 | - 0.3585000 |
| 4. | 0.8533380 | 0.0745812 | 4. | 1.1767653 | 0.0430721 |
| 5. | 0.8749467 | 0.0216086 | 5. | 1.170437 | - 0.0063282 |
| 8. | 0.8824870 | 0.0003733 | 6. | 1.1713436 | 0.0009066 |
| 9. | 0.8825820 | 0.0000950 | 9. | 1.1712293 | - 0.0000027 |
| 10. | 0.8826062 | 0.0000242 | 10. | 1.1712297 | 0.0000004 |
| 11. | 0.8826123 | 0.0000061 | 11. | 1.1712296 | - 5.563D-08 |
| 12. | 0.8826139 | 0.0000016 | 18. | 1.1712297 | 7.039D-14 |
| 13. | 0.8826143 | 0.0000004 | 19. | 1.1712297 | - 9.992D-15 |
| 15. | 0.8826144 | 2.570D-08 | 20. | 1.1712297 | 1.332D-15 |
| 18. | 0.8826144 | 4.226D-10 | | | |

TABLE 4 – Premiers termes de deux suites de méthode de la sécante.

- (a) exd est le point fixe de la sécante (ici, l'extrémité droite).
 (b) a est le point de départ ($a = x_0$).
 (c) n est le nombre d'itération (l'algorithme produit x_n).

Aucune condition n'étant testée, il n'y a pas garantie de convergence.

```

function [y]=SECANTE(a, exd, fonc, n);
2   y=a;
   b=exd
4   for i=1:n;
       y=(y*fonc(b)-b*fonc(y))/(fonc(b)-fonc(y));
6   end
endfunction

```

E 68 Indiquer comment adapter la méthode de la sécante à la résolution d'équations $f(x) = 0$ lorsque la fonction f et sa dérivée sont strictement monotones. On donnera un tableau correspondant au tableau 3 pour la méthode de Newton.

E 69 Sous les hypothèses des deux théorèmes précédents (th. III.3 et th. III.4), on construit la suite (x_n) fournie par la méthode de la sécante et la suite (\bar{x}_n) fournie par la méthode de Newton. Montrer que lorsque x_n et \bar{x}_n ont les mêmes k premières décimales, ce sont aussi les k premières de r .

§ 5. LE THÉORÈME DU POINT FIXE

5.1 Introduction

Dans cette partie, nous considérons les équations de la forme $x = g(x)$. Nous étudierons un théorème qui, à la fois (a) garantit l'existence et l'unicité de la solution (b) fournit une suite

qui converge rapidement vers la solution. Le procédé employé – les approximations successives – joue un rôle très important en mathématiques. Il peut être étendu à l'étude d'équations plus complexes dans lesquelles les inconnues sont des fonctions, par exemple, les équations différentielles. Il est de tous les procédés considérés dans ce chapitre, le plus fondamental. Il permet d'unifier leur traitement, cela sera expliqué dans le complément proposé plus bas.

5.2 Enoncé du théorème du point fixe

Théorème III.5. Soit I un intervalle fermé (non nécessairement borné) et g une fonction de I dans I . S'il existe un réel $k < 1$ tel que

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y| \quad x, y \in I$$

alors l'équation

$$g(x) = x$$

admet une et une seule solution dans I . Cette solution est limite de la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 & = a \in I \\ x_{n+1} & = g(x_n) \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

(On est libre de choisir n'importe quel x_0 dans I). De plus, si s est la solution de l'équation $g(x) = x$ alors

$$|s - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|, \quad n \geq 1.$$

L'intervalle I est de la forme $I = \mathbb{R}$ ou $I =] - \infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ ou $[a, b]$. Il est essentiel que g prenne ses valeurs dans I c'est-à-dire que son ensemble image soit inclus dans son ensemble de définition, faute de quoi nous ne serions plus sûrs que la suite (x_n) soit bien définie.

Lorsqu'une fonction vérifie une inégalité

$$|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|, \quad x, y \in I$$

avec $0 \leq k < 1$, nous disons que f est **contractante** ou bien que c'est une **contraction** de constante k . Les fonctions contractantes sont continues en tout point. Fixons $x_0 \in I$ et montrons la continuité en x_0 . Nous devons établir que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que les conditions $(|x - x_0| \leq \eta$ et $x \in I)$ impliquent $|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$. Or ε était fixé, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon/k$.

Lorsque g est dérivable, pour qu'elle soit contractante de constante k , il suffit que

$$\sup_I |g'| \leq k.$$

En effet, d'après le théorème des accroissements finis,

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)||x - y| \leq k|x - y|.$$

Bien entendu, il existe des fonctions contractantes non dérivables. La fonction $g(x) = |x|/2, x \in \mathbb{R}$ en est un exemple très simple.

Les suites définies par les méthode de Newton et de la sécante sont des cas particuliers de schémas d'approximations successives. Dans le premier cas, nous avons $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ et dans le second $g(x) = (xf(b) - bf(x))/(f(b) - f(x))$. Cependant, l'étude de ces méthodes comme cas particuliers de la méthode du point fixe est moins élémentaire que celle qui a été donnée dans ce cours mais sans doute plus instructive. Elle est traitée en complément à la section 6.

5.3 Illustration graphique

La figure 4 montre un exemple de construction des premiers termes de la suite des approximations successives. Remarquons que les points $M_n = (x_n, f(x_n))$ convergent en s'enroulant autour de $(r, f(r)) = (r, r)$.

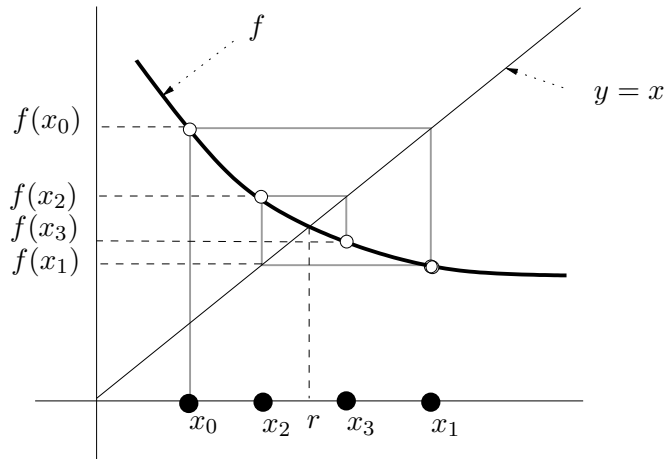


FIGURE 4 – Construction des quatre premiers termes d'une suite d'approximations successives.

Exemple 4. La table 5 donne les résultats obtenus en appliquant la méthode du point fixe à l'équation $x = \sin(x) + 1/4$ en prenant deux points de départ différents.

Code SCILAB 10 (Approximations successives). La fonction suivante applique le schéma des approximations successives à l'équation $fonc(x) = x$.

- (a) a est le point de départ ($a = x_0$).
- (b) n est le nombre d'itération (l'algorithme produit x_n).

Aucune condition n'étant testée, il n'y a pas garantie de convergence.

| $f(x) = x - \sin(x) - 1/4$ | | | $f(x) = x - \sin(x) - 1/4$ | | |
|----------------------------|-----------|-----------------|----------------------------|-----------|-----------------|
| n | x_n | $x_n - x_{n-1}$ | n | x_n | $x_n - x_{n-1}$ |
| 1. | 1. | | 1. | 0.5 | |
| 2. | 1.091471 | 0.0914710 | 2. | 0.7294255 | 0.2294255 |
| 3. | 1.1373063 | 0.0458353 | 3. | 0.9164415 | 0.1870159 |
| 4. | 1.1575053 | 0.0201990 | 4. | 1.0434407 | 0.1269993 |
| 5. | 1.165804 | 0.0082987 | 5. | 1.1141409 | 0.0707001 |
| 6. | 1.1691054 | 0.0033014 | 6. | 1.1475323 | 0.0333914 |
| 7. | 1.1704012 | 0.0012958 | 7. | 1.1617531 | 0.0142208 |
| 8. | 1.1709071 | 0.0005058 | 8. | 1.1675018 | 0.0057487 |
| 9. | 1.1711041 | 0.0001971 | 9. | 1.169773 | 0.0022713 |
| 10. | 1.1711808 | 0.0000767 | 10. | 1.170662 | 0.0008890 |
| 15. | 1.1712292 | 0.0000007 | 15. | 1.1712246 | 0.0000080 |
| 20. | 1.1712296 | 6.090D-09 | 20. | 1.1712296 | 7.084D-08 |
| 25. | 1.1712297 | 5.426D-11 | 25. | 1.1712297 | 6.312D-10 |
| 30. | 1.1712297 | 4.834D-13 | 30. | 1.1712297 | 5.624D-12 |

TABLE 5 – Premiers termes d'une suite d'approximations successives

```

1 fonction [y]=AS(a , fonc , n);
  y=a;
3 for i=1:n;
  y=fonc(y);
5 end;
endfunction

```

E 70 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sin(x) + 1/4$ satisfait aux conditions du théorème du point fixe en prenant comme intervalle de départ $I = [0, \pi/2]$.

5.4 Démonstration du théorème du point fixe

Il est facile de voir que si l'équation $g(x) = x$ admet une solution alors cette solution est unique. En effet, si s_1 et s_2 sont deux solutions, nous avons $|s_1 - s_2| = |g(s_2) - g(s_1)| \leq k|s_2 - s_1|$ ce qui n'est possible que si $s_1 = s_2$ car $k < 1$.

Lorsque $I = [a, b]$ un argument très simple permet de montrer que l'équation $g(x) = x$ admet au moins une solution et donc, d'après la remarque précédente, une unique solution. Considérons en effet la fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = g(x) - x$. Nous avons

$$(a) \quad g(b) \in [a, b] \implies g(b) \leq b \implies f(b) \leq 0, \text{ et}$$

$$(b) \quad g(a) \in [a, b] \implies g(a) \geq a \implies f(a) \geq 0.$$

De $f(b) \leq 0$ et $f(a) \geq 0$ nous déduisons à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que f admet une racine dans $[a, b]$ autrement que l'équation $g(x) = x$ admet une solution.

Nous nous replaçons maintenant dans le cas général où I n'est pas supposé de la forme $[a, b]$, nous admettrons pour le moment que la suite (x_n) converge mais montrerons que sa limite l satisfait la relation $g(l) = l$ ainsi que les inégalités annoncées par le théorème. Le premier point

est immédiat. En effet, si $x_n \rightarrow l$ alors $x_{n+1} \rightarrow l$. Faisant $n \rightarrow \infty$ dans la relation $x_{n+1} = g(x_n)$, nous obtenons directement, grâce à la continuité de g , $l = g(l)$ de sorte que l est bien solution de l'équation $g(x) = x$ et, d'après ce qui précède, est l'unique solution. Le même raisonnement a été utilisée dans la démonstration du théorème III.3.

Nous démontrerons les inégalités à l'aide de quelques lemmes.

Lemme III.6. $\forall p \geq 0, |x_{p+1} - x_p| \leq k^p |x_1 - x_0|$.

Démonstration. D'après la définition de la suite et en utilisant que g est une contraction. Nous avons

$$\begin{aligned} |x_{p+1} - x_p| &= |g(x_p) - g(x_{p-1})| \leq k|x_p - x_{p-1}| = k|g(x_{p-1}) - g(x_{p-2})| \\ &\leq k^2|x_{p-1} - x_{p-2}| \leq \dots \leq k^p|x_1 - x_0|. \end{aligned} \quad (5.1) \quad \blacksquare$$

Lemme III.7. $\forall q > p \geq 0$,

$$|x_q - x_p| \leq \frac{k^p - k^q}{1 - k} |x_1 - x_0|.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} |x_q - x_p| &= |x_q - x_{q-1} + x_{q-1} - x_{q-2} + \dots + x_{p+1} - x_p| \\ &\leq |x_q - x_{q-1}| + |x_{q-1} - x_{q-2}| + \dots + |x_{p+1} - x_p| \\ &\leq (k^{q-1} + k^{q-2} + \dots + k^p) |x_1 - x_0| \quad (\text{d'après le Lemme III.6}) \\ &\leq k^p(k^{q-1-p} + k^{q-2-p} + \dots + k^1 + 1) |x_1 - x_0| \\ &\leq k^p \frac{1 - k^{q-p}}{1 - k} |x_1 - x_0| \leq \frac{k^p - k^q}{1 - k} |x_1 - x_0|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

C'est ce lemme qui permet de démontrer la convergence de la suite x_n que nous avons admis. La démonstration utilise le critère de Cauchy pour la convergence des suites. Elle est donnée dans le paragraphe suivant.

Admettant donc que la suite (x_n) converge, nous obtenons en appliquant l'inégalité du lemme précédent avec $p = n$ et $q = p + n$

$$|x_{p+n} - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} (1 - k^q) |x_1 - x_0| \quad (n, p \geq 0).$$

Faisons $p \rightarrow \infty$ dans l'inégalité. Puisque

$$x_{p+n} \rightarrow l = s = \text{solution de "g(x) = x"}$$

et $k^q \rightarrow 0$ (car $0 < k < 1$) nous obtenons

$$|s - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|.$$

5.5 Démonstration de la convergence de la suite x_n

Le critère de Cauchy, qui est la propriété fondatrice de l'ensemble des nombres réels, dit que pour qu'une suite de nombres réels u_n converge, il faut et il suffit qu'elle satisfasse la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N = N_\varepsilon$ tels que $q > p > N \implies |x_p - x_q| \leq \varepsilon$. Seule la condition suffisante est non élémentaire et c'est celle que nous devons utiliser pour la démonstration de la convergence de la suite u_n . Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons N de telle sorte que $\frac{k^N}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$ où $k \in]0, 1[$ est la constante de contraction de la fonction f ci-dessus. L'existence de N vérifiant la condition demandée est garantie par le fait que la suite $\frac{k^N}{1-k} |x_1 - x_0|$ tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$, propriété qui découle elle-même du fait que k est une constante positive plus petite que 1. Maintenant si $q > p > N$, grâce au lemme III.7, nous avons

$$|x_q - x_p| \leq \frac{k^p - k^q}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \frac{k^p}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \frac{k^N}{1-k} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon. \quad (5.2)$$

Ceci montre que la suite x_n vérifie le critère de Cauchy, il s'agit donc d'une suite convergente et, du fait que l'intervalle I est supposé fermé, sa limite est nécessairement incluse dans I .

COMPLÉMENT

§ 6. * DAVANTAGE SUR LE THÉORÈME DU POINT FIXE ET SES APPLICATIONS

Dans cette partie nous montrons comment, correctement modifié, avec des hypothèses à la fois précisées et affaiblies, le théorème du point fixe permet d'étudier des techniques importantes de résolution d'équations numériques de la forme $f(x) = 0$ comme les méthodes de Newton ou de la sécante que nous avons abordées plus haut d'un autre point de vue.

6.1 Sur la rapidité de convergence

La première critique que suscite le théorème III.5, c'est que la vitesse de convergence de la suite (x_n) fournie par les approximations successives est décevante. En se basant sur cet énoncé, pour avoir un résultat théoriquement meilleur que celui donné par la méthode élémentaire de dichotomie (théorème III.2), nous devrions nous assurer que $\sup_{x \in I} |g'(x)| < 1/2$, ce qui est certainement une hypothèse trop forte. Le théorème suivant montre qu'en réalité l'estimation donnée dans le théorème III.5 est pessimiste.

Théorème III.8. *Supposons que la suite x_n définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $x_0 = z \in I$ converge vers s telle que $g(s) = s$. Supposons en outre que la fonction g soit dérivable au point s . Nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|} = |g'(s)| \quad (6.1)$$

Cet énoncé suppose que $x_n \neq s$, $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Observant que $x_{n+1} - s = g(x_n) - g(s)$, il vient

$$\frac{x_{n+1} - s}{x_n - s} = \frac{g(x_n) - g(s)}{x_n - s},$$

et, puisque nous savons que $x_n \rightarrow s$, la conclusion résulte immédiatement de la définition de la dérivée de g en s et de la continuité de l'application $\|\cdot\|$. ■



Corollaire III.9. *Sous les hypothèses du théorème III.8, pour tout $\mu > |g'(s)|$, nous avons $|x_n - s| = 0(\mu^n)$.*

Rappelons que nous disons qu'une suite u_n est égale à $0(\mu^n)$ s'il existe une constante M telle que $u_n \leq M\mu^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou, ce qui revient au même, pour tout n à partir d'un certain rang *

Démonstration. Puisque $\mu > |g'(s)|$, il existe n_0 tel que

$$\frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|} \leq \mu, \quad n \geq n_0.$$

En appliquant autant de fois que possible cette inégalité, nous obtenons,

$$|x_{n+1} - s| \leq \mu |x_n - s| \leq \mu^2 |x_{n-1} - s| \leq \dots \leq \mu^{n-n_0+1} |x_{n_0} - s|, \quad n \geq n_0.$$

Nous avons établi

$$|x_{n+1} - s| \leq M\mu^N, \quad n \geq n_0,$$

avec $M = |x_{n_0} - s|/\mu^{n-n_0+1}$, ce qu'il fallait établir. ■

Ce que le théorème III.8 met en évidence, c'est que ce n'est pas la quantité $\sup_{x \in I} |g'(x)|$ (ou la constante de contraction) qui détermine la rapidité de convergence de la suite x_n du théorème III.5 vers s mais la seule valeur de la dérivée de la fonction g au point s . Naturellement, cette valeur, le plus souvent, sera inférieure (en valeur absolue) à $\sup_{x \in I} |g'(x)|$ et la rapidité de convergence meilleure que celle garantie par le théorème III.5. L'énoncé du théorème III.8 suggère aussi que dans le cas, que nous pouvons supposer exceptionnel, où $g'(s)$ serait égal à zéro, la convergence pourrait être encore plus rapide. Il en est bien ainsi comme le montre le théorème suivant.

Théorème III.10. *Supposons que la suite x_n définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $x_0 = z \in I$ converge vers s telle que $g(s) = s$. Supposons en outre que la fonction g soit $d+1$ fois continûment dérivable ($d \geq 0$) sur un voisinage † \mathcal{V} de s avec*

$$g'(s) = g''(s) = \dots = g^{(d)}(s) = 0.$$

Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^{d+1}} = \frac{|g^{(d+1)}(s)|}{(d+1)!} \quad (6.2)$$

Démonstration. Nous utilisons la formule de Taylor (théorème II.II.3) pour $g(x_n)$ au point s à l'ordre d ,

$$g(x_n) = g(s) + g'(s)(x_n - s) + \dots + \frac{g^{(d)}(s)}{d!}(x_n - s)^d + \frac{g^{(d+1)}(\xi_n)}{d!}(x_n - s)^{d+1}, \quad (6.3)$$

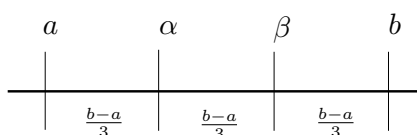
où ξ_n est un réel compris entre x_n et s . En utilisant l'annulation des dérivées de g en s , le fait que $g(x_n) = x_{n+1}$ et $g(s) = s$, nous arrivons à $x_{n+1} - s = \frac{g^{(d+1)}(\xi_n)}{d!}(x_n - s)^{d+1}$, puis

$$\frac{x_{n+1} - s}{(x_n - s)^{d+1}} = \frac{g^{(d+1)}(\xi_n)}{d!}.$$

La conclusion du théorème s'en déduit en faisant $n \rightarrow \infty$ dans cette expression. En effet puisque ξ_n est toujours compris entre s et x_n qui tend vers s , ξ_n lui-même tend vers s et la continuité de $g^{(d+1)}$ en s assure alors $g^{(d+1)}(\xi_n) \rightarrow g^{(d+1)}(s)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. ■

*. Si nous savons que $u_n \leq M\mu^n$ pour $n \geq n_0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M'\mu^n$ avec $M' = \max\{M, u_0/\mu^0, u_1/\mu^1, \dots, u_{n_0-1}/\mu^{n_0-1}\}$.

†. Un voisinage \mathcal{V} de s ici n'est autre qu'un intervalle contenant s dans son intérieur.



Nous pourrions penser que puisque la valeur de s n'est pas connue — il s'agit précisément d'en fournir une approximation — le théorème précédent ne pourrait servir qu'à expliquer *a posteriori* une convergence particulièrement rapide de la suite (x_n) fournie par le théorème du point fixe. Nous verrons cependant plus avant qu'il peut aussi être employé, sans connaître précisément la valeur de s , dans l'étude théorique des suites de Newton et de la sécante. Nous nous occuperons d'abord d'une autre difficulté liée à l'application du théorème du point fixe.

6.2 Sur l'hypothèse de stabilité de l'intervalle

Dans la pratique, plus encore que le fait de devoir montrer qu'elle est contractante c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $k < 1$, il est difficile de s'assurer que la fonction g laisse stable l'intervalle I ($g(I) \subset I$). Nous allons voir comment il est possible de s'affranchir de cette hypothèse.

Théorème III.11. Soit g une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ avec $|g'| \leq q < 1$ sur $[a, b]$. Décomposons $[a, b]$ en trois intervalles égaux de longueurs $(b-a)/3$ et appelons $[\alpha, \beta]$ l'intervalle intermédiaire (voir le schéma ci-après). Nous supposons en outre que g admet un point fixe s dans $[\alpha, \beta]$. Alors

- (a) La suite (x_n) définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ et $x_0 = z \in [\alpha, \beta]$ est bien définie.
- (b) La suite (x_n) converge vers s qui est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ sur $[a, b]$.
- (c) Les estimations des théorèmes III.5 (avec $k = q$), III.8 et III.10, avec leurs hypothèses respectives, sont valables.

Ce résultat ne suppose plus que l'intervalle de départ de la fonction g soit stable. Le prix à payer pour la suppression de cette hypothèse est que l'existence de la racine s ne découle plus du théorème mais en devient une hypothèse. Nous devons même supposer que cette racine se trouve suffisamment à l'intérieur de l'intervalle. En analyse numérique, l'ajout de cette hypothèse n'est pas dramatique. Nous pouvons souvent établir l'existence d'une racine par une simple application du théorème des valeurs intermédiaires, par exemple en mettant en évidence une valeur positive et une valeur négative de la fonction $x \mapsto g(x) - x$.

Démonstration. Nous montrons que la suite (x_n) est bien définie, c'est-à-dire que sous les hypothèses données, x_n se trouve toujours dans l'intervalle $[a, b]$. Les démonstrations des autres assertions sont en tous points identiques à celles données pour le théorème III.5. Pour établir que la suite est bien définie, nous montrons par récurrence que $|x_n - s| \leq (b-a)/3$ pour tout n . Pour $n = 0$, l'affirmation fait partie des hypothèses. En effet, puisque x_0 et s sont dans $[\alpha, \beta]$, $|x_0 - s| \leq \beta - \alpha = (b-a)/3$. Supposons que $|x_n - s| \leq (b-a)/3$, nous avons $|x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| \leq q|x_n - s| \leq |x_n - s| \leq (b-a)/3$. Enfin, la relation $|x_n - s| \leq (b-a)/3$ assure que $x_n \in [a, b]$ puisque, par construction, l'intervalle de centre s et de rayon $(b-a)/3$ est inclus dans $[a, b]$. ■

Théorème III.12. Soit g une fonction continûment dérivable sur un intervalle $[a, b]$ admettant un point fixe s dans l'intérieur de $[a, b]$. Si $|g'(s)| < 1$ alors il existe un intervalle J dans $[a, b]$ tel que pour tout point $z \in J$, la suite (x_n) définie par $x_0 = z$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ soit bien définie et converge vers s . De plus, si g est $(d+1)$ -fois continûment dérivable et $0 = g'(s) = \dots = g^{(d)}(s)$ la convergence de (x_n) vers s est d'ordre $d+1$ en ce sens que

$$|x_{n+1} - s| = O(|x_n - s|^{d+1}).$$

Ici nous avons encore affaibli l'hypothèse sur la fonction g . Nous ne supposons plus que la dérivée de la fonction g soit bornée par $q < 1$ sur la totalité de l'intervalle mais en un unique point, le point fixe s dont nous supposons encore l'existence. Là encore, comme il est naturel, une diminution des hypothèses induit une diminution de la précision de la conclusion. Ainsi nous avons simplement l'existence de l'intervalle J mais ne nous ne savons rien a priori de l'endroit où il se trouve.

Démonstration. Il suffit de trouver un intervalle $I = [a', b']$ de centre s pour lequel $\max_{t \in I} |g'(t)| \leq q < 1$. Dans ce cas, nous pouvons appliquer le théorème précédent qui nous donnera $J = [\alpha, \beta]$ avec $\alpha = a' + (b' - a')/3$ et $\beta = b' - (b' - a')/3$, l'intervalle J ainsi construit contenant bien s . L'estimation sur la rapidité de convergence se démontrerait ensuite comme dans la démonstration du théorème III.10. Maintenant, l'existence de l'intervalle I découle de la continuité* de g' en s . ■

6.3 Application à l'étude de la méthode de la sécante

Rappelons que la suite de la sécante définie au paragraphe 4.1 pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ est donnée, sous réserve que les quantités soient bien définies, par $x_0 = \alpha$ et

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}.$$

Théorème III.13. Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ avec $f(a) < 0 < f(b)$ et admettant une unique racine s dans $[a, b]$. Si le diamètre $(b - a)$ de l'intervalle $[a, b]$ est suffisamment petit, il existe un intervalle J contenant s tel que pour tout $z \in J$, la suite (x_n) ci-dessus soit bien définie et converge vers s .

Démonstration. Nous remarquons que la suite (x_n) est de la forme $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x) = x f(b) - b f(x) / (f(b) - f(x))$ et $g(x) = x$ équivaut à $f(x) = 0$. En vertu du théorème III.12, il suffit d'établir que $|g'(s)| < 1$. Or

$$g'(x) = \frac{(f(b) - b f'(s)) f(b) + (s f(b) f'(s))}{(f(b) - f(s))^2}.$$

En faisant $x = s$, compte tenu de $f(s) = 0$, nous avons

$$g'(s) = \frac{f(b) - (b - s) f'(s)}{f(b)}.$$

Ici, la formule de Taylor nous dit que le numérateur est $(b - a)^2 f''(\xi)/2$ de sorte que

$$|g'(s)| \leq \frac{(b - a)^2}{2 |f(b)|} \max_{[a, b]} |f''(x)|$$

qui montre que $|g'(s)| < 1$ si $b - a$ est assez petit. ■

E 71 Donner un résultat similaire pour la suite définie par $x_0 = z$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x_n), \quad n \geq 0.$$

On commencera par expliciter sur un graphique la construction de la suite (x_n) . Cette suite s'appelle parfois la **méthode des cordes**. On pourra remarquer que x_{n+1} est solution de l'équation

$$0 = f(x_n) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - x_n).$$

*. Prenons q entre $|g'(s)|$ et 1, il existe $\eta > 0$ tel que $x \in [s - \eta, s + \eta]$ entraîne $|g'(s)| \leq q$.

6.4 Application à la méthode de Newton

Nous revenons maintenant à la méthode de Newton étudiée à la section 3. Toujours sous réserve que les quantités soient bien définies, la suite de Newton est définie par $x_0 = \alpha$ et

$$x_{n+1} = \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}.$$

par $x_0 = z$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n \geq 0.$$

La même technique que celle utilisée ci-dessus permet d'établir le théorème suivant.

Théorème III.14. *Il existe un intervalle J contenant s tel que pour tout $z \in J$, la suite (x_n) ci-dessus soit bien définie et converge vers s . De plus si s est une racine simple ($f'(s) \neq 0$) alors la convergence est d'ordre 2,*

$$|x_{n+1} - s| = O(|x_n - s|^2).$$

Démonstration. Le principe est identique à celui de la démonstration du théorème III.13. Nous considérons la fonction g définie par $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Le calcul des deux premières dérivées montre que $g'(s) = 0$ puis $g''(s) \neq 0$. ■

E 72 Dans le cas où s est une racine de multiplicité $m > 1$, étudier la convergence de la suite (x_n) définie par $x_0 = z$ et

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

§ 7. * INTERPOLATION DE LAGRANGE ET SECONDE MÉTHODE DE LA SÉCANTE

Nous étudions ici une modification de la méthode de la sécante qui exprime x_{n+1} à l'aide de x_n et x_{n-1} de sorte que le théorème du point fixe, du moins sous sa forme élémentaire, ne s'applique pas ici*.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Nous supposons que f est strictement croissante, avec $f' > 0$ et appellerons s l'unique racine de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a, b]$. Nous posons $x_0 = a$, $x_1 = b$ et supposant que $f(x_i)$ est définie pour $i = 2, \dots, n$, c'est-à-dire $x_i \in [a, b]$ nous définissons x_{n+2} comme la racine du polynôme (de degré 1) $\mathbf{L}[x_n, x_{n+1}; f]$. Autrement dit x_{n+2} est déterminé par la condition

$$\mathbf{L}[x_n, x_{n+1}; f](x_{n+2}) = 0.$$

Nous appellerons cette suite, lorsque'elle est bien définie, la **seconde méthode de la sécante**. La construction est illustrée sur la figure 7.

Le même calcul que celui qui a été fait au paragraphe 4.1 donne

$$x_{n+2} = \frac{x_n f(x_{n+1}) - f(x_n) x_{n+1}}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n+1}}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}. \quad (7.1)$$

Puisque f est strictement croissante deux fois continûment dérivable, elle est bijective de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ et, puisque $f' > 0$, sa bijection réciproque f^{-1} est elle-même deux fois continûment dérivable.

*. Une suite définie par une relation de récurrence de la forme $x_{n+2} = h(x_{n+1}, x_n)$ peut encore s'interpréter comme une suite de la forme $X_{n+1} = H(X_n)$ en posant $X_n = (x_n, x_{n+1})$ et $H(x, y) = (y, f(y, x))$. Il faudrait donc disposer d'un théorème du point fixe pour les fonctions de deux variables. Un tel théorème existe et même dans un cadre beaucoup plus général mais il n'est pas assez élémentaire pour être traité ici.

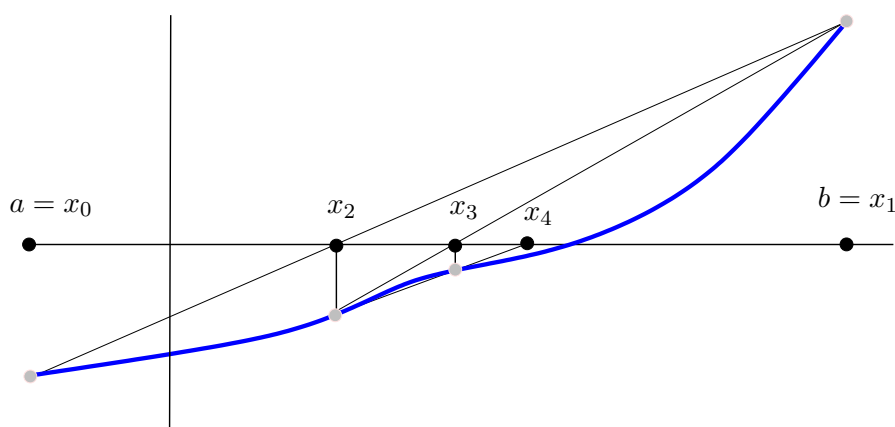


FIGURE 5 – Seconde méthode de la sécante.

Lemme III.15. $x_{n+2} = \mathbf{L}[f(x_n); f(x_{n+1}); f^{-1}](0)$.

Démonstration. En utilisant la formule (4.1) pour le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$, nous obtenons

$$\mathbf{L}[f(x_n), f(x_{n+1}); f^{-1}](0) = f^{-1}(f(x_n)) + \frac{f^{-1}(f(x_{n+1})) - f^{-1}(f(x_n))}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} \quad (7.2)$$

$$= (0 - f(x_n)) = x_n - \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} f(x_n) = x_{n+2}. \quad (7.3)$$

■

Lemme III.16. *Sous les hypothèses sur f indiquées plus haut, si la seconde suite de la sécante est définie jusqu'au rang $n + 1$, nous avons*

$$|x_{n+2} - s| \leq K |x_{n+1} - s| |x_n - s|,$$

avec

$$K = K(a, b) = \frac{M_2 M_1^2}{m_1^3},$$

où

$$M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad \text{et} \quad m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Démonstration. Nous tirons immédiatement du lemme III.15

$$s - x_{n+2} = f^{-1}(0) - \mathbf{L}[f(x_n), f(x_{n+1}); f^{-1}](0).$$

Le terme de droite peut être estimé en utilisant le théorème sur l'erreur dans l'interpolation de Lagrange (théorème I.I.9) avec f^{-1} à la place de f . Nous obtenons

$$|s - x_{n+2}| \leq \max_{[f(a), f(b)]} |(f^{-1})^{(2)}| |0 - f(x_n)| |0 - f(x_{n+1})|. \quad (7.4)$$

Maintenant de la relation

$$(f^{-1})^{(2)} = \frac{f''(f^{-1})}{(f'(f^{-1}))^3}$$

nous tirons

$$\max_{[f(a), f(b)]} |(f^{-1})^{(2)}| \leq \frac{M_2}{m_1^3}. \quad (7.5)$$

D'autre part, en utilisant le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} |0 - f(x_n)| |0 - f(x_{n+1})| &= |f(s) - f(x_n)| |f(s) - f(x_{n+1})| \\ &= |s - x_{n+1}| |f'(c_{n+1})| |s - x_n| |f'(c_n)| \leq M_1^2 |s - x_{n+1}| |s - x_n|. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Finalement, en utilisant (7.5) et (7.6) dans (7.4), nous arrivons à l'inégalité annoncée. ■

Corollaire III.17. Si l'intervalle $[a, b]$ est suffisamment petit alors x_n est bien défini pour toute valeur de n .

Démonstration. Nous montrons que si a et b sont suffisamment proche pour que $K(a, b)(b - a) \leq 1$ alors x_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposant que $x_j \in [a, b]$, $0 \leq j \leq n + 1$ avec $n + 1, n \geq 0$, nous montrons que $x_{n+2} \in [a, b]$. En effet, en vertu du lemme précédent et en utilisant d'abord le fait que x_n et s sont dans $[a, b]$ puis le fait que $K(a, b)(b - a) \leq 1$,

$$|x_{n+2} - s| \leq K|x_{n+1} - s| |x_n - s| \leq K|b - a| \leq K(b - a)|x_{n+1} - s| \leq |x_{n+1} - s|,$$

ce qui montre que x_{n+1} est plus proche de s que de x_n et en particulier se trouve dans $[a, b]$. ■

Supposons que $[a, b]$ soit assez petit que la seconde suite de la constante soit bien définie. Si nous posons $u_n = \log(K|x_n - s|)$, le lemme III.16 se traduit par

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0. \quad (7.7)$$

Lemme III.18. La suite u_n est majorée par la suite de Fibonacci définie par $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, $n \geq 0$, avec $v_0 = \log(K|s - a|)$ et $v_1 = \log(K|s - b|)$.

Démonstration. La démonstration de $u_n \leq v_n$ se fait immédiatement par récurrence sur n à partir de (7.7). ■

Théorème III.19. Si $K(b - a) < 1$ alors il existe une constante positive $\rho < 1$ telle que

$$|s - x_n| = O\left(\rho^{((1+\sqrt{5})/2)^n}\right).$$

Démonstration. On démontre par récurrence qu'il existe deux λ et β tels que

$$v_n = \lambda \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ces deux réels sont déterminés en fonction de $v_0 = \log(K|s - a|)$ et $v_1 = \log(K|s - b|)$. Un calcul fastidieux donne

$$\alpha = \frac{(\sqrt{5} + 5)v_0 - 2\sqrt{5}v_1}{10}, \quad \beta = -\frac{(\sqrt{5} - 5)v_0 - 2\sqrt{5}v_1}{10}.$$

Ici il est important de noter que, grâce à l'hypothèse $K(b-a) < 1$, la seconde constante est négative. La première, α ne joue aucun rôle car $((1-\sqrt{5})/2)^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Finalement, nous avons

$$\frac{u_n}{((1+\sqrt{5})/2)^n} \rightarrow \beta < 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Choisissons β' entre β et 0, nous avons $\frac{u_n}{((1+\sqrt{5})/2)^n} \leq \beta' < 0$ pour n assez grand, disons $n \geq n_0$. En prenant l'exponentielle nous obtenons

$$K|s-x_n| \leq \exp\left(\beta'((1+\sqrt{5})/2)^n\right), \quad n \geq n_0$$

qui donne encore, en posant $\rho = \exp(\beta') < 1$,

$$|s-x_n| \leq \frac{1}{K} \rho^{((1+\sqrt{5})/2)^n}, \quad n \geq n_0$$

et ceci achève la démonstration du théorème. ■

§ 8. EXERCICES ET PROBLÈMES

73 Un exemple. Montrer que l'équation $x^4 + x^3 - 1 = 0$ admet une et une seule solution dans $[0, 1]$. Trouver une valeur approchée avec une décimale exacte en utilisant l'algorithme de dichotomie.

74 Un exemple. Montrer que l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ admet une et une seule solution r dans $[0, 1]$ et déterminer les deux premières décimales de r . Le candidat choisira une méthode différente de la dichotomie. Il devra clairement expliquer sa démarche. (UPS, L2, 2006)

75 Un exemple. On considère l'équation $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

- Montrer que l'équation admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$.
- Montrer en utilisant la méthode de dichotomie (en partant de $[a, b] = [0, 1]$) que $r \in]0, 5; 0, 75[$.
- On souhaite maintenant affiner l'approximation en utilisant la **méthode de Newton**. La suite de Newton est notée \bar{x}_n . Faut-il choisir $\bar{x}_0 = 0, 5$ ou $\bar{x}_0 = 0, 75$? Expliquer votre choix puis calculer les deux premières valeurs (\bar{x}_1, \bar{x}_2).
- Si on souhaite appliquer la méthode de la sécante dont la suite est notée x_n , faut-il choisir $x_0 = 0, 5$ ou $x_0 = 0, 75$? Expliquer votre choix puis calculer les trois premières valeurs (x_1, x_2, x_3).
- Déterminer r avec 2 décimales exactes en expliquant votre raisonnement.

(UPS, L2, 2004, sol. 11 p. 102.)

76 Un exemple. On souhaite trouver une valeur approchée de l'équation

$$\frac{e^{-x}}{x} = 1.$$

On définit la fonction f sur \mathbb{R} par $f(x) = x - e^{-x}$.

- Montrer que x est solution de (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
- Montrer, en étudiant la fonction f , que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans \mathbb{R} et que celle-ci se trouve dans l'intervalle $]0, 1[$.
- Montrer que f est concave sur $[0, 1]$ et en déduire le schéma de Newton approprié à l'approximation de r , la solution de $f(x) = 0$. (On pourra faire un schéma expliquant et illustrant le choix du point de départ x_0 .)

- (d) Calculer x_1, x_2, x_3 , où (x_n) désigne la suite de Newton de point de départ x_0 .
 (e) Montrer, en utilisant un argument de type "dichotomie" que les quatre premières décimales de x_3 sont aussi les quatre premières décimales de la racine r (autrement dit les quatre premières décimales de x_3 sont "correctes").

(UPS, L2, 2005, sol. 10, p. 102.)

77 Un exemple. On considère l'équation

$$x^5 - 7x + 4 = 0 \quad (8.1)$$

(a) Montrer que l'équation (8.1) admet une et une seule solution dans l'intervalle $[0, 1]$. Cette solution sera notée r .

(b) Donner une approximation de cette racine avec 4 décimales exactes en utilisant la méthode de Newton. Les détails des calculs devront figurer explicitement sur la copie et on devra justifier clairement les points suivants : (a) Pourquoi est-il légitime d'employer la méthode de Newton dans ce cas ? (b) Sur quoi se fonde votre choix du point de départ ? (c) Comment vous assurez-vous que les quatre décimales données sont bien celles de r ?

78 Une famille de schémas de Newton. Pour les équations $F(x) = 0$ suivantes, étudiez l'unicité des solutions et étudiez s'il est possible d'employer la méthode de Newton pour obtenir des solutions approchées (choix de l'intervalle, vérification des hypothèses sur la fonction, choix du point de départ). Le nombre a désigne toujours un nombre réel strictement positif.

- (a) $F(x) = 1/x - a$,
 (b) $F(x) = x^2 - a$.

NOTE. — La suite obtenue en (b) est connue depuis l'antiquité. La tradition l'a attribuée à Héron d'Alexandrie (1er siècle après JC).

79 Un résultat de convergence pour la suite de la sécante. on souhaite établir le résultat suivant que l'on comparera avec le théorème III.4.

Théorème. soit f une fonction continue strictement croissante et strictement convexe sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$. La suite de la sécante

$$\begin{cases} x_0 & = & a \\ x_{n+1} & = & \frac{x_n f(b) - b f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad (n \geq 1) \end{cases} \quad (\text{SCHÉMA DE LA SÉCANTE})$$

est bien définie et converge en croissant vers l'unique racine r de l'équation $f(x) = 0$.

Le schéma ci-après montre la construction des valeurs x_1 et x_2 de la suite. Rappelons que f strictement convexe signifie que pour tous x, y dans $[a, b]$ on a $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$ lorsque $t \in]0, 1[$.

(a) Trouver $t \in]0, 1[$ tel que $x_1 = ta + (1-t)b$. En déduire en utilisant la convexité de f que $f(x_1) < 0$ puis que $x_1 < r$.

(b) Montrer par récurrence sur n la propriété $P(n)$ définie par

$$P(n) : \quad a \leq x_n < x_{n+1} < r < b.$$

(c) En déduire la démonstration du théorème.

80 Une modification de la méthode de la sécante. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Pour approcher la racine $r \in]a, b[$ de l'équation $f(x) = 0$, on construit une suite x_k de la manière suivante $x_0 = a$, $x_1 = b$ et, pour $k \geq 2$ x_{k+1} est l'abscisse de l'intersection de la droite joignant les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ avec le droite $y = 0$.

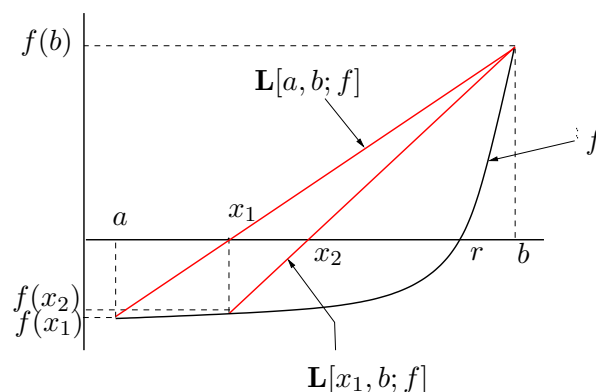


FIGURE 6 – Schéma de la sécante.

(a) Construire sur une figure les quatre premiers points de la suite lorsque f est une fonction convexe. La construction vous paraît-elle judicieuse lorsque f est décroissante convexe ?

(b) Donner l'équation exprimant x_{k+1} en fonction de x_k et x_{k-1} .

(c) Dans une autre variante, on construit x_{k+1} non à partir de x_k et x_{k-1} mais à partir de x_k et $x_{k'}$ où k' est le plus grand indice ($< k$) tel que $f(x_k)$ et $f(x_{k'})$ soient de signes opposés. Donner un exemple pour lequel cette nouvelle suite ne coïncide pas avec la précédente. Ecrire un algorithme calculant les n premières valeurs de la suite x_k .

81 Une modification de la méthode de Newton. Dans la méthode de Newton, ayant à disposition les points x_0, \dots, x_n , on construit x_{n+1} en prenant l'intersection de la tangente au graphe de f en x_n avec l'axe des abscisses. Dans la méthode de Newton modifiée, ayant construit x_0, \dots, x_n , on construit x_{n+1} en prenant l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par x_n et parallèle à la tangente au graphe de f en x_0 .

(a) On suppose que la fonction F est strictement croissante et strictement convexe sur $[a, b]$ avec une racine dans $]a, b[$. On prend $x_0 = b$. Faites un dessin faisant apparaître les quatre premières valeurs données par la méthode de Newton modifiée. Comparer avec le schéma correspondant pour la méthode de Newton ordinaire.

(b) Donner l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n .

(c) Selon vous quels sont les avantages pratiques de cette modification ? Ses inconvénients ?

82 Monotonie des suites d'approximations successives. Soit f une fonction contractante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et $a \in [0, 1]$. On construit la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ dont on sait, d'après le cours, qu'elle converge vers l'unique solution de $f(x) = x$.

(a) On suppose que f est croissante, étudier la monotonie de la suite (x_n) .

(b) On suppose que f est décroissante, étudier la monotonie des sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) .

83 Un exemple. On considère l'équation

$$x^3 - 3x - 1 = 0. \quad (8.2)$$

L'équation (8.2) possède une solution et une seule dans l'intervalle $[1, 2]$. Cette propriété est admise, on ne demande pas de la démontrer. On appelle r cette solution. On cherche à obtenir une valeur approchée

de r en utilisant le théorème du point fixe (la méthode des approximations successives). Pour cela on doit mettre l'équation sous la forme $x = f(x)$.

(a) Expliquer pourquoi le choix $f(x) = (x^3 - 1)/3$ n'est pas judicieux.

Dans la partie suivante on pose $f(x) = (3x + 1)^{1/3}$.

(b) Montrer que la fonction $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie toutes les hypothèses du théorème du point fixe (de telle sorte que toute suite x_n définie par $x_0 = a \in [1, 2]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \geq 0$) converge vers r).

(c) Montrer que la suite x_n est croissante ou décroissante suivant que $f(x_0) > x_0$ ou $f(x_0) < x_0$. Les deux cas peuvent-ils se produire ?

(d) Donner une approximation de r avec deux décimales exactes.

(e) Auriez-vous recommandé la méthode décrite dans cet exercice pour trouver une approximation de r ? Justifiez précisément votre réponse.

(Sol. 12 p. 103.)

84 Un exemple. Montrer que l'équation $\cos x + 1/10 = x$ admet une solution unique sur $[0, 3\pi/8]$ et donner — en justifiant mathématiquement votre réponse — une méthode (autre que la dichotomie) qui permettrait d'obtenir une approximation de cette solution. Donner une valeur approchée de la solution avec trois décimales exactes.



IV

Résolution des systèmes linéaires. Méthodes directes.

§ 1. RAPPEL SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES

1.1 Introduction

De nombreux phénomènes de physique ou d'économie se traduisent par des systèmes linéaires de plus ou moins grande dimension. Le problème de la grille illustré dans la figure 1 est un exemple typique. Les 20 extrémités de la grille que sont les points p_i, q_i, d_i et $g_i, i = 1, \dots, 5$, représentés par des disques de couleur blanche sur la figure, sont portés aux températures $t(p_i), t(q_i), t(d_i)$ et $t(g_i)$. Le problème est de déterminer la température aux noeuds $n_{i,j}$ représentés par des disques de couleur noire, sachant que la température en un noeud donné est égale à la moyenne des températures des autres noeuds auxquels il est connecté. Ainsi, par exemple, nous avons

$$t(n_{11}) = \frac{1}{4}(t(p_1) + t(g_1) + t(n_{12}) + t(n_{21})) \quad \text{et} \quad t(n_{23}) = \frac{1}{4}(t(n_{12}) + t(n_{22}) + t(n_{33}) + t(n_{24})).$$

Il y a 25 noeuds n_{ij} et 25 inconnues $t(n_{ij}), 1 \leq i, j \leq 5$, et, pour déterminer la température en ces 25 noeuds, nous disposons de 25 équations. Nous avons donc ici autant d'inconnues que d'équations. Nous nous limiterons à l'étude de ce type de systèmes. Signalons encore, que les systèmes linéaires n'interviennent pas uniquement dans les sciences appliquées. En mathématiques même, quantité de questions reposent *in fine* sur le résolution d'un système linéaire et pour ce qui est de l'analyse numérique, le phénomène est encore plus accentué car la plupart des techniques avancées nécessitent à un moment ou à un autre la résolution d'un système linéaire comportant un grand nombre d'inconnues. La résolution des systèmes linéaires est certainement un des rares problèmes fondamentaux des mathématiques. Malheureusement, ce cours voulant s'adresser à un auditoire n'ayant que des connaissances rudimentaires d'algèbre linéaire, nous ne pourrions que donner une très succincte introduction à la théorie à travers l'étude de la méthode de Gauss. Celle-ci est improprement attribuée à Gauss, elle était déjà connue des mathématiciens chinois de l'antiquité. Au reste, la technique d'élimination successive des inconnues est très naturelle et aisément compréhensible par des mathématiciens débutants.

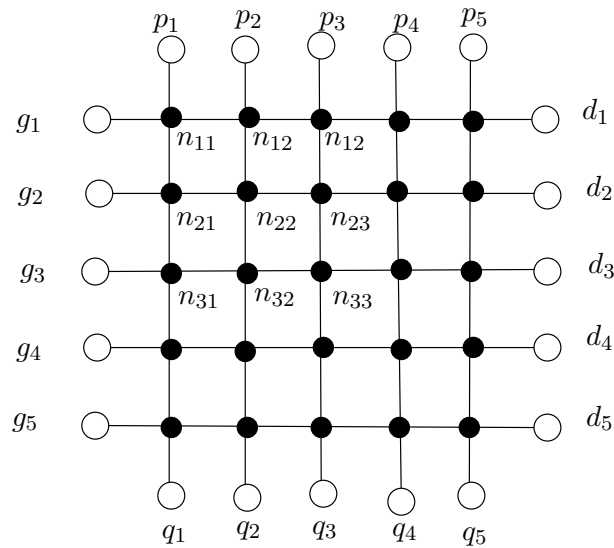


FIGURE 1 – Le problème de la grille

1.2 Le formalisme

Les nombres considérés sont des réels mais tout ce qui sera dit dans ce chapitre reste vrai avec des nombres complexes. Au reste, les techniques utilisées dans ce chapitre sont entièrement algébriques : elles ne font pas appel au concept de limite, et elles seraient également valables pour des systèmes dont les coefficients a_{ij} seraient des éléments d'un corps commutatif quelconque. Nous considérons le système de n équations à n inconnues suivant

$$\begin{array}{l} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_i \\ \vdots \\ \mathbf{L}_n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = c_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Les a_{ij} 's sont appelés les **coefficients** du système (1.1), les x_i 's sont les inconnues (ou les solutions) et les c_i 's forment le **second membre**. L'expression

$$\mathbf{L}_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = c_i \quad (1.2)$$

s'appelle la i -ième **ligne** du système. Le système (1.1) se représente aussi sous la forme compacte

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Au système linéaire (1.1) est associée l'**équation matricielle**

$$AX = C, \quad (1.4)$$

où la matrice A et les vecteurs X et C sont définis par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

La matrice A ayant n lignes et n colonnes est dite matrice carrée d'**ordre** n . Notons que dans a_{ij} , l'indice i désigne la ligne tandis que j désigne la colonne. Le vecteur colonne X est appelé le **vecteur inconnu** (ou **vecteur solution**) et C est le **vecteur second membre**. Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est habituellement noté $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mais, pour des raisons propres au calcul matriciel, lorsque nous lui appliquons une matrice A , nous avons intérêt à le représenter comme une colonne X . Dans la suite de ce chapitre, nous ne distinguerons plus, au niveau de la notation, le vecteur ligne x du vecteur colonne X . Indiquons toutefois que, à un niveau plus avancé, où tous les objets sont considérés comme des matrices, un vecteur x est une matrice à 1 ligne et n colonnes tandis que la colonne X est une matrice à n lignes et 1 colonne et il est alors essentiel de maintenir la distinction entre les deux.

Rappelons encore qu'une application linéaire \mathcal{A} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n est associée à la matrice A . Cette application est définie par la relation

$$\mathcal{A}(x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j \right), \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (1.6)$$

E 85 Rappeler les liens entre les des images des éléments de la base canonique de \mathbb{R}^n par l'application linéaire \mathcal{A} et les coefficients de la matrice A .

E 86 La matrice A associée au système linéaire du problème de la grille (voir 1.1) est une matrice carrée d'ordre 25. Elle contient donc 625 coefficients. Combien parmi eux sont-ils non nuls ?

1.3 Rappels des résultats fondamentaux

Théorème IV.1 (\dagger). *On ne modifie pas les solutions d'un système linéaire si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes. On écrit*

$$L_i \longleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j.$$

Il faut prendre garde à ne pas oublier d'effectuer la combinaison linéaire au niveau du second membre.

Théorème IV.2 (\dagger). *Pour que le système (1.1) admette une et une seule solution il faut et il suffit que $\det A \neq 0$. Dans ce cas la matrice A est inversible et l'unique solution est donnée par $X = A^{-1}(C)$.*

Lorsque le système (1.1) admet une et une seule solution, nous disons que c'est un **système régulier**.

E 87 Rappel les règles de calcul du déterminant d'une matrice.

La condition sur le déterminant de A est à son tour équivalente à des propriétés naturelles de l'application linéaire \mathcal{A} . De manière précise, si A est une matrice carrée d'ordre n d'application linéaire associée \mathcal{A} , nous avons

$$\det A \neq 0 \iff \mathcal{A} \text{ bijective} \iff \mathcal{A} \text{ surjective} \iff \mathcal{A} \text{ injective} \iff \ker \mathcal{A} = \{0\}. \quad (1.7)$$

Rappelons qu'ici l'équivalence entre bijective, surjective et injective est vraie uniquement parce que \mathcal{A} est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension.

E 88 Donner un exemple d'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 qui soit injective (mais pas surjective). Donner un exemple d'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 surjective mais non injective.

Théorème IV.3 (Formules de Cramer, †). Lorsque $\det A \neq 0$ la coordonnée x_j de la solution x du système (1.1) est donnée par la formule

$$x_j = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & c_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & c_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & c_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Pour obtenir x_j on doit donc calculer le déterminant obtenu à partir de A en substituant le vecteur C à la j -ième colonne de A .

Malheureusement les formules de Cramer nécessitent un nombre d'opérations trop grand et elles sont en pratique inutilisables, cf. exercice 91).

§ 2. LE CAS DES SYSTÈMES TRIANGULAIRES

2.1 L'analyse du cas $n = 3$

Exception faite des systèmes diagonaux (ceux dont la matrice est une matrice diagonale) qui se réduisent à n équations du type $a_{ii}x_i = c_i$, $i = 1, \dots, n$, les systèmes les plus simples sont les **systèmes triangulaires** c'est-à-dire ceux dont les matrices sont triangulaires : tous les coefficients au dessus (matrice triangulaire inférieure) de la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ou au dessous (matrice triangulaire supérieure) sont nuls. Dans cette partie, nous donnons les algorithmes élémentaires pour résoudre les systèmes linéaires triangulaires par substitutions successives et étudions la complexité de ces algorithmes. Nous verrons ensuite comment tout système régulier peut se réduire à un système triangulaire. Cela signifie qu'étant donné un système régulier quelconque $AX = C$, il est toujours possible de construire une matrice triangulaire (supérieure) U et un vecteur C' tel que $UX = C'$ a la même solution que $AX = C$.

Théorème IV.6. La résolution d'un système linéaire triangulaire (supérieur ou inférieur) de n équations à n inconnues par la méthode des substitutions successives nécessite n^2 opérations élémentaires (+, −, ×, ÷).

Démonstration. Nous traitons seulement le cas d'un système triangulaire inférieur. Le calcul de x_1 requiert 1 opération tandis que pour x_i , $2 \leq i \leq n$, nous devons effectuer $i - 1$ (+ ou −) et i (× ou ÷) de sorte que le nombre total d'opérations N_n est donné par

$$\begin{aligned} N_n &= 1 + \sum_{i=2}^n (2i - 1) \\ &= 1 + 2 \sum_{i=2}^n i - (n - 1) \\ &= 1 + 2 \frac{n(n+1)}{2} - 2 - (n - 1) = n^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§ 3. L'ALGORITHME DE GAUSS

3.1 Description de l'algorithme dans le cas d'un système de 3 équations à 3 inconnues.

Notion de pivot

Soit à résoudre le système suivant que nous supposons régulier. Le déterminant de la matrice associée est donc supposé non nul.

$$S^{(0)} \quad \begin{cases} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(0)} \\ \mathbf{L}_3^{(0)} \end{cases} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

Etape 1. Elimination de x_1 dans $\mathbf{L}_2^{(0)}$ et $\mathbf{L}_3^{(0)}$.

$$\begin{cases} \mathbf{L}_2^{(0)} \leftarrow \mathbf{L}_2^{(0)} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_3^{(0)} \leftarrow \mathbf{L}_3^{(0)} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \mathbf{L}_1^{(0)} \end{cases}$$

Attention, Nous divisons par a_{11} . Cela n'est possible que si a_{11} est non nul. Nous arrivons à

$$S^{(1)} \quad \begin{cases} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(1)} \\ \mathbf{L}_3^{(1)} \end{cases} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 + (a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13})x_3 = c_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}c_1 \\ 0 + (a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12})x_2 + (a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13})x_3 = c_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}c_1 \end{cases}$$

que nous écrivons encore sous la forme

$$S^{(1)} \quad \begin{cases} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(1)} \\ \mathbf{L}_3^{(1)} \end{cases} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = c_3^{(1)} \end{cases}$$

Etape 2. Elimination de x_2 dans $\mathbf{L}_3^{(2)}$.

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{L}_3^{(1)} \leftarrow \mathbf{L}_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \mathbf{L}_2^{(1)}. \end{array} \right.$$

Attention, nous divisons cette fois par $a_{22}^{(1)}$. La condition $a_{22}^{(1)} \neq 0$ est nécessaire. Il vient

$$S^{(2)} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(1)} \\ \mathbf{L}_3^{(2)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + 0 + (a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{23}^{(1)})x_3 = c_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}c_2^{(1)} \end{array} \right.$$

que nous écrivons

$$S^{(2)} \quad \begin{array}{l} \mathbf{L}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(1)} \\ \mathbf{L}_3^{(1)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 = c_3^{(2)} \end{array} \right.$$

Ce dernier système est triangulaire supérieur, nous pouvons donc le résoudre rapidement par substitutions successives comme expliqué dans la partie précédente. Il reste à examiner si, et comment, nous pouvons modifier la méthode dans le cas où un des nombres par lesquels nous devons diviser s'avère être égal à 0. Supposons que $a_{11} = 0$. Nous avons alors $a_{21} \neq 0$ ou $a_{31} \neq 0$ sinon la première colonne de la matrice du système serait nulle et son déterminant vaudrait 0 ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons pour fixer les idées que $a_{22} \neq 0$, nous permutons alors les lignes $\mathbf{L}_1^{(0)}$ et $\mathbf{L}_2^{(0)}$ et commençons la méthode décrite ci-dessus à partir du système

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ 0 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{array} \right.$$

Dans la deuxième étape, si nécessaire, c'est-à-dire si $a_{22}^{(1)} = 0$, nous pouvons permuter les lignes $\mathbf{L}_2^{(1)}$ et $\mathbf{L}_3^{(1)}$ de telle sorte que nous diviserons à nouveau par un nombre non nul.

Les nombres par lesquels nous effectuons les divisions dans les diverses étapes de l'algorithme s'appellent les **pivots de Gauss**. Pour que l'algorithme fonctionne, ces nombres doivent être non nuls, et, pour la précision des calculs, il est préférable qu'il ne soit pas proche de 0. Cette question ne sera pas abordée ici (cf. exercices).

Dans la partie suivante nous décrivons l'algorithme de Gauss ci-dessus dans le cas d'un système à n équations et n inconnues. L'énoncé ne suppose pas que le système soit régulier. L'algorithme est muni d'une instruction d'arrêt pour le cas où $\det A = 0$.

E 89 Résoudre le système suivant en utilisant l'algorithme de Gauss

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{47}{60} \end{array} \right.$$

La solution est $(1, 1, 1)$.

3.2 Algorithme de Gauss (sans optimisation de pivot)

algorithme de Gauss

Algorithme IV.7 (Notation Ligne). On considère le système linéaire de matrice associée A

$$\left(\mathbf{L}_k : \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \right)$$

1 Pour $j = 1, \dots, n-1$ faire sauf ordre d'arrêt

1.1 **Si** $a_{ij} = 0$ pour tout $i \geq j$ alors ARRÊT. (A est non inversible.)

Sinon soit $i_o = \inf\{i, a_{ij} \neq 0\}$, faire

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_j &\leftarrow \mathbf{L}_{i_o} \\ \mathbf{L}_{i_o} &\leftarrow \mathbf{L}_j \end{aligned}$$

1.2 Pour $i > j$ faire

$$\mathbf{L}_i \leftarrow \mathbf{L}_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \mathbf{L}_j.$$

2 Résoudre le système (triangulaire) formé des (nouvelles) lignes L_i par la méthode des substitutions successives.

Algorithme IV.8 (Notation Coefficient). On considère le système linéaire de matrice associée A

$$\left(\mathbf{L}_k : \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \right)$$

1 Pour $j = 1, \dots, n-1$ faire sauf ordre d'arrêt

1.1 **Si** $a_{ij} = 0$ pour tout $i \geq j$ alors ARRÊT. (A est non inversible.)

Sinon soit $i_o = \inf\{i, a_{ij} \neq 0\}$, faire

$$\begin{aligned} a_{jl} &\leftarrow a_{i_o l} \quad \text{pour } l \geq j \\ a_{i_o l} &\leftarrow a_{jl} \quad \text{pour } l \geq j \\ c_j &\leftarrow c_{i_o} \\ c_{i_o} &\leftarrow c_j \end{aligned}$$

1.2 Pour $i > j$ faire

1.2.1

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \\ c_i &\leftarrow c_i - m_i c_j. \end{aligned}$$

1.2.2 pour $k > j$ faire

$$a_{ik} \leftarrow a_{ik} - m_i a_{jk}.$$

2 Résoudre le système (triangulaire)

$$\left(\sum_{i=k}^n a_{ki} x_i = b_k \quad k = 1, 2, \dots, n \right)$$

3.3 Coût de l'algorithme de Gauss

Théorème IV.9. Le nombre N_n d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un système linéaire à n équations et n inconnues (de déterminant non nul) par la méthode de Gauss est asymptotiquement égal à $2n^3/3$. On écrit $N_n \sim 2n^3/3$ et cela signifie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{2n^3/3} = 1$.

Démonstration. Il découle de l'algorithme (version coefficients) que

$$N_n = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^n (3 + \sum_{k=j+1}^n 2) \right)}_{\text{coût de } \boxed{1}} + \underbrace{n^2}_{\text{coût de } \boxed{2}}$$

où nous utilisons le théorème IV.6 pour déterminer le coût de $\boxed{2}$. Ensuite nous avons

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^n (3 + 2(n-j)) \right) + n^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (3 + 2(n-j))(n-j) + n^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (3 + 2j)(j) + n^2 \\ &= 3 \frac{n(n-1)}{2} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + n^2 \\ &= 3 \frac{n(n-1)}{2} + 2 \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

qui se démontre aisément par récurrence sur n . Nous avons donc

$$N_n = \frac{2}{3}n^3 + \boxed{?}n^2 + \boxed{?}n + \boxed{?}$$

où les $\boxed{?}$'s désignent des constantes dont la valeur n'importe pas ici. IL suit que

$$\frac{N_n}{\frac{2}{3}n^3} = 1 + \boxed{?} \frac{1}{\frac{2}{3}n} + \boxed{?} \frac{1}{\frac{2}{3}n^2} + \boxed{?} \frac{1}{\frac{2}{3}n^3}$$

d'où il résulte immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{\frac{2}{3}n^3} = 1.$$

■

§ 4. EXERCICES ET PROBLEMES

90 Calcul de la puissance k -ième d'une matrice. Toutes les matrices considérées dans cet exercice sont d'ordre n (i.e. dans $M_n(\mathbb{R})$).

(a) Calculer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer le produit AB de deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) Quel sera le nombre d'opérations pour calculer A^k , $k \geq 2$, par récurrence à partir de $A^k = A \cdot A^{k-1}$?

(c) On reprend le calcul de A^k . Pour simplifier, on se limite au cas $k = 7$. Calculer le nombre d'opérations si on écrit $A^7 = (A^2)^2 \cdot A^2 \cdot A$. Comment généraliser cette méthode pour k quelconque ?

91 Impraticabilité de la méthode de Cramer. Calculer (en fonction de n) le nombre d'opérations élémentaires (+, −, ×, ÷) nécessaires pour résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues en utilisant les formules de Cramer dans lesquelles on calcule les déterminants par la relation de récurrence

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in},$$

où A_{in} est la matrice obtenue en retirant de A la n -ième colonne et la i -ième ligne ?

Combien de temps prendrait la résolution d'un système linéaire à 50 inconnues et 50 équations si on utilisait un ordinateur capable d'effectuer 10^9 opérations à la seconde ?

92 Calcul de l'inverse d'une matrice triangulaire.

Soit U une matrice $n \times n$ triangulaire supérieure inversible : on a donc $u_{ij} = 0$ pour $i > j$ et $u_{ii} \neq 0$. On cherche un algorithme donnant la matrice U^{-1} .

(a) Montrer que la matrice U^{-1} est aussi triangulaire supérieure.

(b) On note v_{ij} le coefficient de U^{-1} à l'intersection de la i -ième ligne et j -ième colonne. D'après la première question on a $v_{ij} = 0$ dès que $i > j$. On note $v^{(j)}$ le vecteur $(v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{jj}) \in \mathbb{R}^j$. On connaît donc U^{-1} dès qu'on connaît les n vecteurs $v^{(1)} \in \mathbb{R}^1, v^{(2)} \in \mathbb{R}^2, \dots, v^{(n)} \in \mathbb{R}^n$. On note enfin $U^{(j)}$ la matrice formée des j premières lignes et colonnes de U . Montrer que $v^{(j)}$ est solution du système triangulaire $U^{(j)}X = e^{(j)}$ où $e^{(j)} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^j$.

(c) En déduire qu'on peut calculer l'inverse d'une matrice triangulaire avec un nombre d'opérations N_n équivalent à $\frac{n^3}{3}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

93 Exemple d'instabilité de la méthode Gauss. On considère le système suivant

$$\begin{cases} 2,28101x + 1,61514y = 2,76255 \\ 1,61514x + 1,14365y = 1,95611 \end{cases}$$

Résoudre ce système avec l'algorithme de Gauss en travaillant avec des nombres décimaux comportant un maximum de 8 décimales. La solution de ce système est $x = 9$ et $y = -11$. Que pensez vous de la précision du résultat ?

94 Un exemple. Estimer le temps nécessaire pour résoudre un système de 10^3 équations avec la méthode de Gauss sur un ordinateur capable d'effectuer 10^6 opérations à la seconde.



95 Méthode de Gauss avec optimisation de pivot. Pour que l'algorithme de Gauss fonctionne, on a vu que les pivots (les nombres par lesquels on divise au moment de l'élimination des inconnues) doivent être non nuls. L'algorithme donné dans le cours choisit le premier pivot possible (il minimise le nombre de tests à effectuer). Or en analyse numérique, pour des questions d'erreurs d'arrondis (voir l'exercice précédent), on a intérêt à toujours diviser par les nombres les plus grands possibles (en valeur absolue).

Modifier l'algorithme de Gauss de telle sorte que le j -ème pivot soit choisi comme le plus grand nombre disponible sur la j -ième colonne.

96 Matrices triangulaires creuses On considère un système linéaire à n équations et n inconnues, $n \geq 4$, triangulaire supérieur, de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = c_2 \\ \dots \\ a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + a_{i,i+2}x_{i+2} = c_i \\ \dots \\ a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = c_{n-2} \\ \phantom{a_{n-2,n-2}x_{n-2}} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = c_{n-1} \\ \phantom{a_{n-2,n-2}x_{n-2}} \phantom{+ a_{n-1,n-1}x_{n-1}} + a_{nn}x_n = c_n \end{cases} \quad (4.1)$$

où les coefficients a_{ii} , $i = 1, \dots, n$ sont supposés non nuls.

(a) Ecrire l'algorithme de résolution par substitutions successives correspondant à ce cas particulier de matrice triangulaire.

(b) Déterminer, en fonction de n le nombre d'opérations élémentaires ($+$, $-$, \times , \div) employées pour la résolution du système (4.1).

(Sol. 13 p. 104.)

97 Aspect matriciel de l'algorithme de Gauss. On considère le système 3×3 suivant dont on suppose qu'il admet une et une seule solution

$$S^{(0)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

On rappelle que les systèmes $S^{(1)}$ (resp. $S^{(2)}$) obtenus après la première (resp. la seconde) étape de l'algorithme sont donnés par

$$S^{(1)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 + (a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13})x_3 = c_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}c_1 \\ 0 + (a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12})x_2 + (a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13})x_3 = c_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}c_1 \end{cases}$$

abrégé en

$$S^{(1)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = c_3^{(1)} \end{cases}$$

et

$$S^{(2)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + 0 + (a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{23}^{(1)})x_3 = c_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}c_2^{(1)} \end{cases}$$

abrégé en

$$S^{(2)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 = c_3^{(2)} \end{cases}$$

Hypothèse. On a supposé que les termes par lesquels on divise sont non nuls.

(a) On appelle $A = A^{(0)}$ la matrice du système $S^{(0)}$, $A^{(1)}$ la matrice du système $S^{(1)}$ et $A^{(2)}$ la matrice du système $S^{(2)}$. Ecrire les trois matrices $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$.

(b) Vérifier que

$$A^{(1)} = L_1 A^{(0)} \quad \text{et} \quad A^{(2)} = L_2 A^{(1)}$$

avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

(c) En déduire que l'algorithme de Gauss permet, sous réserve que l'hypothèse ci-dessus soit satisfaite, d'obtenir une factorisation de A de la forme $A = LR$ avec L une matrice triangulaire inférieure et R une matrice triangulaire supérieure.

(d) Expliquer comment on obtiendrait un résultat similaire en partant d'une matrice $n \times n$, $n \geq 2$. (On expliquera en particulier quelles matrices joueraient le rôle de L_1 et L_2 dans le cas n quelconque.)

(Sol. 14 p. 104.)

98 Systèmes tridiagonaux

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_2, b_3, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ trois suites finies de nombres réels.

Algorithme IV.10. Il calcule les deux suites $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n)$ comme suit :

(a) $\alpha_1 = a_1$,

(b) Pour $i = 2, \dots, n$ faire

$$(a) \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}$$

$$(b) \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}$$

On supposera les suites a , b et c données de telle sorte que α_i ne s'annule jamais.

(a) Déterminer en fonction de n le nombre d'opérations employées par l'algorithme ci-dessus pour obtenir les deux suites α et β .

On définit les matrices L et U à partir des suites α et β de la manière suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Tous les coefficients de L sont donc nuls excepté i) les coefficients diagonaux qui sont égaux à 1 et ii) les coefficients en dessous de la diagonale donnés par β . De la même manière, tous les coefficients de U sont nuls excepté i) les termes de la diagonales qui sont donnés par α et ii) les termes au dessus de la diagonales qui sont donnés par c .

(b) On note $A = LU$. Démontrer que

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

La matrice A est appelée **matrice tridiagonale**. (Tous les coefficients sont nuls excepté sur la diagonale, et juste au dessus et juste au dessous de la diagonale.)

(c) Montrer que résoudre le système $Ax = d$ (d'inconnue x où d est un vecteur quelconque) est équivalent à résoudre les systèmes $Ly = d$ (d'inconnue y) puis $Ux = y$ (d'inconnue x).

(d) Montrer que la résolution du système $Ly = d$ par substitutions nécessite $2(n-1)$ opérations.

(e) Montrer que la résolution du système $Ux = y$ par substitutions nécessite $3n-2$ opérations.

(f) En combien d'opérations en tout (en fonction de n) peut-on résoudre un système $Ax = d$ où A est une matrice tridiagonale à n lignes et n colonnes ?

(sol. 15 p. 105.)

99 Méthode de Cholesky pour les matrices tridiagonales symétriques. On considère une matrice carrée A d'ordre $p \geq 3$ à coefficients réels de la forme

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & & & \\ & c_2 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{p-2} & b_{p-1} & c_{p-1} \\ 0 & & & & c_{p-1} & b_p \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Tous les coefficients sont nuls excepté sur la diagonale, et juste au dessus et juste au dessous de la diagonale. On définit ensuite les réels d_j ($j = 1, \dots, p$) et f_j ($j = 1, \dots, p-1$) par les relations

$$d_1 = \sqrt{b_1}, \quad f_1 = c_1/d_1; \quad (4.4)$$

$$d_j = \sqrt{b_j - f_{j-1}^2}, \quad j = 2, \dots, p; \quad f_j = c_j/d_j, \quad j = 2, \dots, p-1. \quad (4.5)$$

Ici, on suppose que les nombres dont on prend les racines carrées sont positifs.

(a) Étude d'un exemple. (a) Calculer les nombres d_j et f_j lorsque $p = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que dans ce cas on a

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ f_1 & d_2 & 0 \\ 0 & f_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & 0 \\ 0 & d_2 & f_2 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$$

(c) En déduire une résolution rapide du système $AX = C$ où $C = (1, -3, -5)$.

(b) On traite maintenant le cas général où p est quelconque et A est comme dans l'équation (4.3).
 (a) Déterminer le nombre d'opérations nécessaires pour calculer tous les nombres d_j et f_j . Les opérations sont $+$, $-$, \times , \div et $\sqrt{\quad}$. (b) Démontrer que si S et tS sont les matrices

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & & & 0 \\ & d_2 & f_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{p-1} & f_{p-1} \\ 0 & & & & d_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tS = \begin{pmatrix} d_1 & & & & 0 \\ f_1 & d_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & f_{p-2} & d_{p-1} & \\ 0 & & & f_{p-1} & d_p \end{pmatrix}$$

alors

$$A = {}^tS \cdot S.$$

(c) En déduire une méthode simple pour résoudre les systèmes $AX = C$ et déterminer le nombre d'opérations utilisées par cette méthode.

100 Méthode de Jordan. On considère le système

$$S^{(0)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

La première étape est identique à celle de la méthode de Gauss et, sous réserve que $a_{11} \neq 0$ elle conduit au système

$$S^{(1)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = c_3^{(1)} \end{cases}$$

(a) Rappeler l'expression de $a_{32}^{(1)}$ en fonction des coefficients du système $S^{(0)}$.

(b) Montrer qu'en effectuant deux opérations sur les lignes et sous réserve que $a_{22}^{(1)} \neq 0$, le système $S^{(1)}$ est équivalent à un système $S^{(2)}$ de la forme

$$S^{(2)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + 0 + a_{13}^{(2)}x_3 = c_1^{(2)} \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = c_2^{(1)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 = c_3^{(2)} \end{cases}$$

et donner l'expression de $a_{33}^{(2)}$.

(c) Montrer qu'en effectuant à nouveau deux opérations sur les lignes et sous réserve que $a_{33}^{(2)} \neq 0$, le système $S^{(2)}$ est équivalent à un système $S^{(3)}$ diagonal de la forme

$$S^{(3)} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + 0 + 0 = c_1^{(3)} \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + 0 = c_2^{(3)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 = c_3^{(2)} \end{cases}$$

et donner l'expression de $c_2^{(3)}$.

(d) Quel est l'intérêt de cet algorithme ? Comment le modifier pour traiter le cas où l'une des hypothèses de coefficients $\neq 0$ n'est pas vérifiée ?

(e) Ecrire un algorithme (en notation ligne) effectuant le travail ci-dessus dans le cas d'un système linéaire de n équations et n inconnues.

101 Algorithme de Cholesky. On étudie une méthode de résolution directe des systèmes linéaires $Ax = b$ lorsque la matrice A peut s'écrire comme le produit d'une matrice triangulaire par sa transposée. Toutes les définitions et propriétés de la transposée qui pourront être utiles sont indiquées dans l'énoncé.

Si A est la matrice dont le coefficient (i, j) est a_{ij} , la matrice transposée de A , notée $T(A)$, est la matrice dont le coefficient (i, j) est a_{ji} , autrement dit $(T(A))_{ij} = a_{ji}$: on permute donc le rôle des lignes et des colonnes et la i -ème ligne de A devient la i -ème colonne de $T(A)$. Par exemple,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors } T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

On pourra librement utiliser les propriétés suivantes :

- (a) $T(A \cdot B) = T(B) \cdot T(A)$
- (b) $\det(T(A)) = \det(A)$
- (c) $T(T(A)) = A$.

On remarquera en outre que si D est une matrice diagonale alors $T(D) = D$. Plus généralement A et $T(A)$ ont toujours la même diagonale.

A) Soit L une matrice triangulaire inférieure c'est-à-dire de la forme

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients sur la diagonale et *en dessous* de la diagonale. Représenter la matrice $T(L)$. De quel type de matrice s'agit-il ? Que vaut le déterminant de L ?
[H] : *A partir de maintenant, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que (a) A est inversible et (b) $A = L \cdot T(L)$ où L est une matrice triangulaire inférieure.*

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES D'ALGÈBRE LINÉAIRE.

B) Montrer que $T(A) = A$.

C) Montrer que, pour $k = 1, \dots, n$, on a $l_{kk} \neq 0$. (On rappelle que le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants des matrices).

D) Montrer que si D est une matrice diagonale avec uniquement des 1 ou des -1 sur la diagonale alors on a encore $A = L' \cdot T(L')$ avec $L' = L \cdot D$. En déduire que, sous l'hypothèse **H**, on peut toujours écrire $A = L' \cdot T(L')$ avec $L' = (l'_{ij})$ une matrice triangulaire inférieure telle que $l'_{kk} > 0$ pour $k = 1, \dots, n$.

E) Montrer que résoudre le système $Ax = b$ est équivalent à résoudre les deux systèmes $L(y) = b$ et $T(L)x = y$. En combien d'opérations ($+$, $-$, \times , \div) peut-on résoudre ces deux systèmes ?

F) Montrer que

$$\sum_{k=2}^n (n-k+1)(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

On pourra librement utiliser le fait que $\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

L'ALGORITHME.

Dans cette partie, toujours sous l'hypothèse **H**, nous étudions une méthode, dite de Cholesky, pour déterminer L telle que

$$A = L \cdot T(L) \quad \text{et} \quad l_{kk} > 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (4.6)$$

Les colonnes de L seront déterminées par récurrence.



- G) Montrer à l'aide de (4.6), que pour $j \leq i$ on a $a_{ij} = \sum_{s=1}^j l_{is}l_{js}$.
 H) En déduire que $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ puis $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$ pour $i = 2, \dots, n$.
 I) On suppose que l'on a construit les $k-1$ premières colonnes de L . Montrer, à l'aide de (G), que
 $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2}$.
 J) Montrer

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}l_{ks}}{l_{kk}} \quad (i = k+1, \dots, n).$$

- K) Appliquer la méthode décrite dans les trois questions précédentes pour trouver la matrice L dans le cas où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que pour la matrice L trouvée, on a bien $A = L \cdot T(L)$.

NOMBRE D'OPÉRATIONS.

On détermine le nombre d'opérations élémentaires $+$, $-$, \times , \div et aussi la racine carrée $\sqrt{\quad}$ employées par l'algorithme de Cholesky.

L) Déterminer le nombre de racines carrées puis le nombre de divisions employées par l'algorithme de Cholesky.

M) Montrer que le nombre d'additions-soustractions employées par l'algorithme est égal à $\frac{n(n^2-1)}{6}$.
 Montrer ensuite que le nombre de multiplications employées par l'algorithme est égal à $\frac{n(n^2-1)}{6}$.

N) La méthode de Cholesky pour résoudre le système $Ax = b$ sous l'hypothèse **H** consiste à déterminer une matrice L puis à utiliser la propriété établie ci-dessus (E). Cette méthode est-elle plus performante que la méthode de Gauss ?

(Sol. 16 p. 106.)



V

Solution des exercices

§ 1. SUR L'INTERPOLATION DE LAGRANGE

1 (← 12.) Appelons P le polynôme d'interpolation $\mathbf{L}[a_0, a_1, a_2; f]$. D'après la formule d'interpolation de Lagrange, on a

$$P(115) = 10 \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} + 11 \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} + 12 \frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} \\ \approx 10,722753.$$

D'après un théorème du cours, il existe $\zeta \in]100, 144[$ tel que

$$\sqrt{115} - P(115) = \frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!} (115 - 100)(115 - 121)(115 - 144).$$

Or $f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \implies f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} x^{-3/2} \implies f'''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} x^{-5/2}$. Il suit, en utilisant que $|f'''|$ est décroissante sur $[100, 144]$ que

$$|f'''(\zeta)| \leq \frac{3}{2^3} 100^{-5/2} = \frac{3}{8 \cdot 10^5}.$$

En reportant dans l'inégalité précédente on arrive à

$$\left| \sqrt{115} - P(115) \right| \leq \frac{3}{3! \cdot 8 \cdot 10^5} 15 \cdot 6 \cdot 29 = \frac{15 \cdot 6 \cdot 29}{16 \cdot 10^5} \approx 1,63 \cdot 10^{-3} < 1,8 \cdot 10^{-3}.$$

2 (← 31)

(a) Une application de la formule d'interpolation de Lagrange donne

$$\alpha = \mathbf{L}[0, 1/6, 1/4; f](1/5) = f(0) \frac{(1/5 - 1/6)(1/5 - 1/4)}{(-1/6)(-1/4)} \\ + f(1/6) \frac{(1/5 - 0)(1/5 - 1/4)}{(1/6 - 0)(1/6 - 1/4)} + f(1/4) \frac{(1/5 - 0)(1/5 - 1/6)}{(1/4 - 0)(1/4 - 1/6)}.$$

Après simplification,

$$\alpha = -24/600 + \sqrt{3} \times 72/200 + \sqrt{2} \times 48/300 = 0,8098\dots$$

La valeur exacte de $f(1/5) = \cos(\pi/5)$ est 0,80901.....

(b) En utilisant le théorème d'erreur du cours on a

$$|\cos(\pi/5) - \alpha| \leq \frac{\sup_{[0,1/4]} |f^{(3)}|}{3!} |1/5 - 0| \cdot |1/5 - 1/6| \cdot |1/5 - 1/4|.$$

Or, sur $[0, 1/4]$, on a $|f^{(3)}(x)| = \pi^3 \sin(\pi x) \leq \pi^3 \sin(\pi/4) = \pi^3 \sqrt{2}/2$. On en déduit que

$$|\cos(\pi/5) - \alpha| \leq \pi^3 \sqrt{2}/(2 \cdot 3!) \times (1/5)(1/20)(1/30) \approx 1,22 \cdot 10^{-3}.$$

On remarquera que l'erreur réelle est sensiblement plus petite.

3 (← 32.)

(a) On a $q(\lambda) = 0$ donc λ est racine de q donc le polynôme $r(x)$ divise $q(x)$ c'est-à-dire $q(x) = r(x)T(x)$ avec T polynôme avec $\deg(T) = \deg(q) - 1 = \deg w - 1 = d$. Il suit que $f_\lambda = \frac{1}{w(\lambda)}T$ est un polynôme de degré d .

(b) Puisque a_i est racine de w on a

$$f(a_i) = \frac{w(\lambda) - w(a_i)}{w(\lambda)(\lambda - a_i)} = \frac{1}{\lambda - a_i}.$$

On a donc que f_λ est un polynôme de degré d qui prend les mêmes valeurs que $g_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda - t}$ pour $t = a_i$, $i=0, \dots, d$. Il suit $f_\lambda = \mathbf{L}[a_0, \dots, a_d; g_\lambda]$.

4 (← 23). On cherche $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ (les inconnues sont les coefficients c_0, c_1 et c_2) tel que

$$\begin{cases} p(a) = \alpha \\ p'(b) = \beta \\ p''(c) = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 + c_1a + c_2a^2 = \alpha \\ c_1 + 2c_2b = \beta \\ 2c_2 = \gamma \end{cases}$$

Ce système admet une et une seule solution si son déterminant est non nul. Or ce déterminant est donné par

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

5 (← 29.)

(a) Puisque X contient n points on a $\mathbf{L}[X; f/q] \in \mathcal{P}_{n-1}$ et on a aussi $q \in \mathcal{P}_m$. Il suit que $q \cdot \mathbf{L}[X; f/q] \in \mathcal{P}_{m+n-1}$. On montre de la même manière que $p \cdot \mathbf{L}[Y; f/p] \in \mathcal{P}_{m+n-1}$ d'où il résulte que $R_f \in \mathcal{P}_{m+n-1}$ comme somme de deux polynômes de \mathcal{P}_{m+n-1} .

(b) Puisque $x_i \in X$ on a $\mathbf{L}[X; f/q](x_i) = f(x_i)/q(x_i)$ et $p(x_i) = 0$ donc

$$R_f(x_i) = q(x_i) \cdot \mathbf{L}[X; f/q](x_i) + 0 \cdot \mathbf{L}[Y; f/p](x_i) = q(x_i) \frac{f(x_i)}{q(x_i)} = f(x_i).$$

On montre de même que $R_f(y_j) = f(y_j)$.

(c) Les deux questions précédentes montrent que R_f satisfait les deux conditions caractéristiques de $\mathbf{L}[X \cup Y; f]$. On a donc $R_f = \mathbf{L}[X \cup Y; f]$.

6 (← 35.)

A) Puisque x est compris entre a et a_0 , la distance entre x et a_0 est plus petite que $a_0 - a$ c'est-à-dire $|x - a_0| \leq h_0$. Ensuite $|x - a_i| \leq |x - a_0| + |a_0 - a_1| + \dots + |a_{i-1} - a_i| \leq h_0 + h_1 + \dots + h_i$. On en déduit un majorant chacun des facteurs de $|w_A(x)| = |x - a_0||x - a_1||x - a_2||x - a_3||x - a_4|$ que

$$|w_A(x)| \leq h_0 \times (h_0 + h_1) \times (h_0 + h_1 + h_2) \times (h_0 + h_1 + h_2 + h_3) \times (h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4).$$

Il découle immédiatement

$$|w_A(x)| \leq 5!h^5$$

puisque $h_0 + \dots + h_i \leq (i+1)h$.

B) Lorsque $x \in]a_0, a_1[$ on a à la fois $|x - a_0| \leq h_1$ et $|x - a_1| \leq h_1$ tandis que $|x - a_2| \leq |x - a_1| + |a_1 - a_2| \leq h_1 + h_2$ et plus généralement pour $i > 1$, $|x - a_i| \leq h_1 + \dots + h_i$ de sorte que

$$|w_A(x)| \leq h_1 \times h_1 \times (h_1 + h_2) \times (h_1 + h_2 + h_3) \times (h_1 + h_2 + h_3 + h_4).$$

La déduction $|w_A(x)| \leq 4!h^5$ se déduit immédiatement comme dans la question précédente.

C) Les quatre inégalités demandées se traitent de manière similaire. Nous donnerons les détails de la démonstration de la troisième : si $x \in]a_3, a_4[$ alors $|w_A(x)| \leq 1! \cdot 4! \cdot h^5$. On remarque d'abord que, puisque $x \in]a_3, a_4[$, $|x - a_3| \leq h_4$ et $|x - a_4| \leq h_4$. Il reste à majorer $|x - a_0|$, $|x - a_1|$ et $|x - a_2|$. On a $|x - a_2| \leq |x - a_3| + |a_3 - a_2| \leq h_4 + h_3$. De même $|x - a_1| \leq h_2 + h_3 + h_4$ et $|x - a_0| \leq h_1 + h_2 + h_3 + h_4$. On en tire facilement l'inégalité demandée sur $w_A(x)$.

D) Pour déduire

$$\max_{x \in [a, b]} |w_A(x)| \leq 5!h^5$$

il suffit de remarquer que les inégalités précédentes nous permettent de majorer $|w_A(x)|$ sur $[a, a_0] \cup]a_0, a_1[\cup \dots \cup]a_4, b]$ donc sur $[a, b]$ — au points de passages a_i la fonction w_A s'annule — par le plus mauvais des majorants trouvés qui n'est autre que $5!h^5$.

La formule d'erreur pour l'interpolation de Lagrange donne pour toute fonction f de classe C^5 sur $[a, b]$ et tout $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathbf{L}[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; f](x)| &\leq \frac{\sup_{x \in [a, b]} |f^{(5)}|}{5!} \cdot |w_A(x)| \\ &\leq \frac{\sup_{x \in [a, b]} |f^{(5)}|}{5!} \cdot 5!h^5 = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(5)}| \cdot h^5. \end{aligned}$$

E) Soit $i \in \{0, \dots, 3\}$. La fonction $p(x) = (x - a_i)(x - a_{i+1})$ est négative sur $[a_i, a_{i+1}]$ et p' s'annule au point $m_i = (a_i + a_{i+1})/2$ qui est un minimum, avec

$$p(m_i) = -\left(\frac{a_{i+1} - a_i}{2}\right)^2 = -h_{i+1}^2/4.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} |(x - a_i)(x - a_{i+1})| &= \sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} -p(x) \\ &= -\inf_{x \in [a_i, a_{i+1}]} p(x) = -p(m_i) = h_{i+1}^2/4. \end{aligned}$$

F) Soit $x \in [a_0, a_1]$. Pour majorer $|w_A(x)|$ on majore d'abord le facteur $|(x - a_0)(x - a_1)|$ puis les facteurs $|x - a_2|$, $|x - a_3|$ et $|x - a_4|$. Pour le premier, on utilise l'inégalité obtenue à la question précédente $|(x - a_0)(x - a_1)| \leq h_1^2/4$ tandis que les trois autres termes sont majorés comme dans la première partie, par exemple $|x - a_2| \leq |x - a_1| + |a_1 - a_2| \leq h_1 + h_2$ puisque $x \in [a_0, a_1]$. Au total on a

$$|w_A(x)| \leq \frac{h_1^2}{4} \times (h_1 + h_2) \times (h_1 + h_2 + h_3) \times (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \leq 4! \frac{h^5}{4}.$$

G) Les inégalités obtenues sur les autres intervalles $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$ et $[a_3, a_4]$ utilisent la même technique. Il faut simplement faire attention au “facteur double” que l’on va garder : si $x \in [a_i, a_{i+1}]$ on majore le facteur double $|(x - a_i)(x - a_{i+1})|$ en utilisant un résultat ci-dessus. En réunissant les 4 inégalités on obtient une inégalité sur $[a, b]$ en prenant comme majorant le plus mauvais des quatre qui est cette fois $4!/4h^5$ de sorte que $\max_{x \in [a, b]} |w_A(x)| \leq 4! \frac{h^4}{4}$. En le portant dans la formule d’erreur pour l’interpolant de Lagrange on arrive à

$$|f(x) - \mathbf{L}[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; f](x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f^{(5)}| \cdot \frac{h^5}{4 \times 5}.$$

H) Toutes les majorations s’étendent facilement au cas où $A = \{a_0, \dots, a_n\} \subset [a, b]$ avec $a_i < a_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, n-1$. On continue à définir $h_i = a_{i+1} - a_i$ avec les valeurs particulières h_0 et h_n . Par exemple si $x \in [a, a_0]$ alors on a $|x - a_0| \leq h_0$ et

$$|x - a_i| \leq |x - a_0| + |a_1 - a_0| + \dots + |a_{i-1} - a_i| \leq \sum_{j=0}^i h_j \leq (i+1)h, \quad i = 1, \dots, n.$$

On en déduit $|w_A(x)| \leq h(2h)(3h) \dots ((n+1)h) = (n+1)!h^{n+1}$. En examinant les autres intervalles on se rend compte que cette majoration est la plus grossière et $|w_A(x)| \leq (n+1)!h^{n+1}$ sur $[a, b]$ d’où encore pour toute fonction de classe C^{n+1} ,

$$|f(x) - \mathbf{L}[a_0, a_1, \dots, a_n; f](x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}| \cdot h^{n+1}.$$

Les autres questions se généralisent suivant les mêmes lignes.

§ 2. CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES

7 (← 54.)

(a) L’inégalité à démontrer est

$$\frac{1}{ta + (1-t)b} \leq \frac{t}{a} + \frac{1-t}{b}.$$

En réduisant au même dénominateur, on montre que cette inégalité est équivalente à

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{ta + (1-t)b} &\leq \frac{t}{a} + \frac{1-t}{b} \\ \Leftrightarrow ab &\leq (tb + (1-t)a)(ta + (1-t)b) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq [t^2 + (1-t)^2 - 1]ab + t(1-t)(b^2 + a^2) \end{aligned}$$

On vérifie ensuite aisément que le terme de droite n’est autre que $t(1-t)(a-b)^2$ qui est bien positif puisque les trois facteurs sont positifs.

(b) Puisque $a \leq x \leq b$ on a $b-x \geq 0 \Rightarrow \frac{b-x}{b-a} \geq 0$. D’autre part,

$$x \geq a \Rightarrow -x \leq -a \Rightarrow b-x \leq b-a \Rightarrow \frac{b-x}{b-a} \leq 1.$$

Prenant $t = \frac{b-x}{b-a}$ dans (5.2) on obtient en tenant compte que $(1-t) = 1 - \frac{b-x}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$,

$$f\left(a \cdot \frac{b-x}{b-a} + b \cdot \frac{x-a}{b-a}\right) \leq f(a) \frac{b-x}{b-a} + f(b) \frac{x-a}{b-a}.$$



Le terme de droite est la formule d'interpolation de Lagrange pour $L[a, b; f](x)$ tandis que l'argument de f dans le premier membre est égal à x . On a donc montré

$$f(x) \leq L[a, b; f](x).$$

(c) On travaille avec les intervalles $[1, 3/2]$ et $[3/2, 2]$. L'approximation est donnée par

$$\frac{1}{4}(f(1) + 2f(3/2)) + f(2) = \frac{1}{4}(1 + 4/3 + 1/2) = 17/24 \approx 0,708.$$

(d) On abrège valeur exacte en VE et valeur approchée en VA. Dans la méthode des trapèzes combinée on a en utilisant une inégalité prouvée ci-dessus

$$VE = \int_1^2 f(x) dx = \sum \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx \leq \sum \int_{a_i}^{a_{i+1}} L[a_i, a_{i+1}; f](x) dx = VA.$$

(e) L'erreur commise en subdivisant en n sous-intervalles est majorée par

$$\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \sup_{[a,b]} f^{(4)}.$$

Ici, $b-a=1$ et, puisque $f(x) = 1/x$, on a $f'(x) = -x^{-2}$, $f^{(2)}(x) = 2x^{-3}$, $f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$ et $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$ d'où l'on déduit

$$\sup_{[a,b]} |f^{(4)}| = 24.$$

Pour commettre une erreur inférieure ou égale à 10^{-10} il suffit de choisir n tel que

$$\frac{24}{2880n^4} \leq 10^{-10}.$$

La plus petite valeur acceptable est $n = 96$. (La valeur trouvée est en réalité très pessimiste.)

8 (\leftarrow 56)

(a) D'après le cours, on a

$$|I - A(n, f)| \leq \frac{1}{2880n^4} \sup_{[0,1]} |f^{(4)}|.$$

Calculons les dérivées de $f(x) = e^{x^2}$. On a $f'(x) = 2xf(x)$ puis $f''(x) = 2f(x) + 4x^2f(x) = 2(1+2x^2)f(x)$. Ensuite $f^{(3)}(x) = 2(4x)f(x) + 2(1+2x^2)2xf(x) = (12x+8x^3)f(x)$. Finalement, $f^{(4)}(x) = (12+24x^2)f(x) + (24x^2+16x^4)f(x) = (12+48x^2+16x^4)f(x)$. Il suit que

$$\sup_{[0,1]} |f^{(4)}| \leq (12+48+16) \cdot e = 76 \cdot e.$$

Pour avoir la propriété demandée il suffit donc d'avoir

$$\frac{1}{2880n^4} 76 \cdot e \leq 10^{-3}.$$

On vérifie immédiatement que $n = 3$ est la plus petite valeur de n satisfaisant la condition.

(b) D'après le cours on

$$A(n, f) = \frac{h_n}{6} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih_n) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{2i+1}{2} h_n\right) \right\}$$

où $a = 0$, $b = 1$ et $h_n = \frac{b-a}{n}$. De même,

$$A(n, \tilde{f}) = \frac{h_n}{6} \left\{ \tilde{f}(a) + \tilde{f}(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{f}(a + ih_n) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}\left(a + \frac{2i+1}{2} h_n\right) \right\}$$

d'où l'on déduit

$$A(n, f) - A_n(\tilde{f}) = \frac{h_n}{6} \left[(f - \tilde{f})(a) + (f - \tilde{f})(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (f - \tilde{f})(a + ih_n) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} (f - \tilde{f})\left(a + \frac{2i+1}{2} h_n\right) \right]$$

puis, en utilisant que la valeur absolue d'une somme est majorée par la somme des valeurs absolues

$$|A(n, f) - A_n(\tilde{f})| \leq \frac{h_n}{6} \left[\varepsilon + \varepsilon + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon + 4 \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon \right] = (b-a) \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

(c) On a

$$|I - A(\mathbf{v}, \tilde{f})| \leq |I - A(\mathbf{v}, f)| + |A(\mathbf{v}, f) - A(\mathbf{v}, \tilde{f})| \leq 10^{-3} + \varepsilon.$$

(d) Le résultat fourni par la calculatrice est $A(\mathbf{v}, \tilde{f})$ avec $\varepsilon = 10^{-12}$. Le résultat obtenu vérifie donc $|I - A(\mathbf{v}, \tilde{f})| \leq 10^{-3} + 10^{-12}$. La perte de précision de 10^{-12} due au calcul est négligeable devant l'erreur de 10^{-3} due à la méthode.

9 (← 57.)

(a) Immédiat : il suffit de calculer

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((a_i + a_{i+1})x^2 + (b_i + b_{i+1})x + (c_i + c_{i+1})) dx \right\}.$$

(b) On a en utilisant à la troisième ligne sur le théorème sur l'erreur entre le polynôme d'interpolation et la fonction interpolée

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - Q_i(f) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) - \mathbf{L}[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f](x) dx \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) - \mathbf{L}[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f](x) dx \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - \mathbf{L}[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f](x)| dx + \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - \mathbf{L}[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f](x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f^{(3)}| \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x - x_{i-1}| |x - x_i| dx + \frac{1}{2} \sup_{[x_i, x_{i+2}]} |f^{(3)}| \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x - x_i| |x - x_{i+1}| dx \\ &\leq C_i \cdot \sup_{[x_{i-1}, x_{i+2}]} |f^{(3)}| \end{aligned}$$

avec

$$2C_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x - x_{i-1}| |x - x_i| dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x - x_i| |x - x_{i+1}| dx.$$

(c) Si f est un polynôme de degré 2 alors $L[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; f] = f$. On en déduit facilement que $Q_i(f) = \frac{2}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$. La même relation vaut pour les premier et dernier termes de $Q(f)$ et l'égalité demandée est alors conséquence immédiate de la relation de Chasle pour les intégrales.

(d) Il suffit d'additionner les erreurs trouvées dans la partie A) en prenant soin que les premier et dernier termes de la somme sont différents (plus simples).

§ 3. SOLUTIONS APPROCHÉES DES ÉQUATIONS

10 (← 76.)

(a) On a $\frac{e^{-x}}{x} = 1 \iff x = e^{-x} \iff x - e^{-x} = 0$.

(b) La fonction f est (indéfiniment) dérivable sur \mathbb{R} . On a $f'(x) = 1 + e^{-x} > 1 > 0$ ($x \in \mathbb{R}$) donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} . La fonction f est donc injective et l'équation $f(x) = 0$ admet au plus une solution. Comme $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0,5 > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f admet une racine (unique) dans $]0, 1[$.

(c) On a $f''(x) = -e^{-x} < 0$ donc la fonction est concave (sur \mathbb{R}). Comme elle est aussi croissante, on prendra donc comme point de départ dans la suite de Newton, l'extrémité gauche de l'intervalle i.e. $x_0 = 0$ (cfr l'exercice 15 du dossier d'exercices).

(d) La suite de Newton est définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \geq 0$. On trouve $x_1 = 0,5$, $x_2 = 0,56631\dots$ et $x_3 = 0,56714\dots$

(e) On a $f(0,5671) = -6,78428E - 05 < 0$ et $f(0,56719) = 7,32E - 05 > 0$ dont d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $r \in]0,5671; 0,56719[$. Il suit que les quatre première décimales de r sont bien 5671.

11 (← 75.)

(a) Considérons la fonction polynomiale f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. On a $f'(x) = 4x^3 + 4x > 0$ pour $x \in]0, 1[$. Donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$ et définit une bijection de $[0, 1]$ sur $f([0, 1]) = [-1, 2]$. Puisque $0 \in [-1, 2]$, il existe un et un seul $r \in [0, 1]$ tel que $f(r) = 0$. Il est utile de noter pour la suite que $f''(x) = 12x^2 + 4 > 0$, donc f est convexe.

(b) $f(0,5) = 1/16 - 1/2 < 0$ et $f(1) = 2 > 0$ donc $r \in]0,5; 1[$. Ensuite $f(0,75) = (3/4)^4 + 18/16 - 1 > 0$ et $f(0,5) < 0$ donc $r \in]0,5; 0,75[$.

(c) La fonction étant strictement croissante convexe, on est directement dans le cas d'application du théorème du cours et le point de départ doit être pris à droite de la racine (faire un schéma.) On prendra donc $\bar{x}_0 = 0,75$. La suite de Newton est donnée par la formule

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)} = \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n^4 + 2\bar{x}_n - 1}{4\bar{x}_n^3 + 4\bar{x}_n}.$$

On trouve $\bar{x}_1 = 0,655\dots$ et $\bar{x}_2 = 0,6437\dots$

(d) Comme précédemment, on est directement dans le cas d'application du théorème du cours et le point de départ doit être pris à gauche de la racine (faire un schéma.) On prendra donc $\underline{x}_0 = 0,5$. La suite de la sécante est donnée par la formule

$$\underline{x}_{n+1} = \frac{\underline{x}_n f(0,75) - 0,75 f(\underline{x}_n)}{f(0,75) - f(\underline{x}_n)}$$

On trouve $\underline{x}_1 = 0,624\dots$, $\underline{x}_2 = 0,636\dots$ et $\underline{x}_3 = 0,6409\dots$

(e) On sait (cours) que, f étant strictement croissante convexe, la suite de la sécante croît vers r tandis que la suite de Newton décroît vers r . On a donc $\underline{x}_0 \leq \underline{x}_1 \leq \underline{x}_2 \leq \underline{x}_3 \leq r \leq \bar{x}_2 \leq \bar{x}_1 \leq \bar{x}_0$. En particulier $0,6409\dots \leq r \leq 0,647\dots$ de sorte que l'approximation de r avec deux décimales exactes est 0,64.



12 (← 83)

(a) La fonction $f(x) = (x^3 - 1)/3$ ne laisse pas stable l'intervalle $[1, 2]$ (c-a-d $f([1, 2]) \not\subset [1, 2]$) car $f(2) = 7/3 > 2$) donc on ne peut pas lui appliquer le théorème du point fixe. On peut aussi remarquer que $\max_{[1,2]} |f'(x)| = \max_{[1,2]} |3x^2 - 3| = 9 \gg 1$.

(b) Pour s'assurer que f vérifie toutes les hypothèses du théorème du point fixe, nous devons montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$ puis que f est une contraction sur $[1, 2]$ ce que nous ferons en montrant que sa dérivée est en valeur absolue bornée par un nombre $K < 1$ sur $[1, 2]$.

Voyons le premier point. On a

$$f'(x) = (1/3) \cdot 3 \cdot (3x + 1)^{-2/3} > 0 \quad \text{sur } [1, 2]$$

donc f est strictement croissante et définit une bijection de $[1, 2]$ sur $f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [4^{1/3}; 7^{1/3}]$. Comme $4^{1/3} \approx 1,587 > 1$ et $7^{1/3} \approx 1,913 < 2$ on a bien $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

Pour le second point, on remarque que

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq 2 &\implies 4 \leq 3x + 1 \leq 7 \\ &\implies 1/7 \leq (3x + 1)^{-1} \leq 1/4 \implies (1/7)^{2/3} \leq f'(x) \leq (1/4)^{2/3}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Comme f' est positive, on a

$$\max_{[1,2]} |f'(x)| = \max_{[1,2]} f'(x) \leq (1/4)^{2/3} \approx 0,3968503 < 1.$$

Cela montre que f vérifie toutes les conditions du théorème du point fixe (de telle sorte que toute suite x_n définie par la $x_0 = a \in [1, 2]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \geq 0$) converge vers r).

(c) Montrons que si $f(x_0) > x_0$ alors (x_n) est croissante. Pour cela nous devons montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $x_{n+1} \geq x_n$. Nous utilisons une démonstration par récurrence. Puisque $f(x_0) = x_1$, l'inégalité est vraie pour $n = 0$ par hypothèse et cela donne l'initialisation de la récurrence. Pour l'hérédité, supposant que $x_{n+1} > x_n$, nous montrons que $x_{n+2} > x_{n+1}$. La conclusion se déduit immédiatement de l'hypothèse de récurrence car f croissante et $x_{n-1} < x_n$ entraînent $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ soit $x_{n+2} < x_{n+1}$. Le cas $f(x_0) < x_0$ se traite de manière similaire. Les deux cas peuvent évidemment se produire. Si $x_0 = 1$ alors $f(x_0) = 4^{1/3} > 1 = x_0$ et si $x_0 = 2$ alors $f(x_0) = 7^{1/3} < 2 = x_0$.

(d) Le tableau ci-dessous donne les valeurs des suites x_n lorsque $x_0 = 1$ (suite croissante vers r) $x_0 = 2$ (suite décroissante vers r).

| | $x_0 = 1$ | | $x_0 = 2$ |
|---------|-----------|---------|-----------|
| $n = 1$ | 1,5874011 | $< r <$ | 1,9129312 |
| $n = 2$ | 1,7927904 | $< r <$ | 1,8888351 |
| $n = 3$ | 1,8545417 | $< r <$ | 1,8820569 |
| $n = 4$ | 1,8723251 | $< r <$ | 1,8801413 |
| $n = 5$ | 1,8773842 | $< r <$ | 1,8795993 |

On en déduit que $r = 1,87$ avec deux décimales exactes. Naturellement, on aurait pu calculer une seule suite et s'assurer qu'on avait les bonnes décimales en utilisant la même idée que dans l'exercice précédent.

(e) La convergence des suites précédentes est très lente (d'après le cours, l'erreur à la k -ième itération est majorée par une constante multipliée par $(1/0,39)^k$ ce qui donne une convergence à peine plus rapide que la dichotomie. Ici, posant simplement, $g(x) = x^3 - 3x - 1$, on avait $g'(x) = 3x^2 - 3 > 0$ sur $]1, 2]$ et $g''(x) = 6x > 0$ sur $[1, 2]$, de sorte que la fonction était strictement croissante convexe et on pouvait appliquer la méthode de Newton avec $x_0 = 2$ (on prend l'extrémité supérieure : "schéma des 4 cas"). De manière précise, on trouve les valeurs suivantes :

| | |
|-------|-----------|
| x_0 | 2 |
| x_1 | 1,8888889 |
| x_2 | 1,8794516 |

La valeur x_2 est en réalité précise avec 3 décimales.

Deux itérations suffisent donc à obtenir le résultat obtenu en 5 itérations avec la méthode précédente.

§ 4. RÉOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES. MÉTHODES DIRECTES

13 (← 96)

(a) Le système se résout immédiatement par substitutions successives (de “bas en haut”) comme suit

$$\begin{cases} x_1 = \frac{c_1 - a_{13}x_3 - a_{12}x_2}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{c_2 - a_{24}x_4 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ \dots \\ x_i = \frac{c_i - a_{i,i+2}x_{i+2} - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} \\ \dots \\ x_{n-2} = \frac{c_{n-2} - a_{n-2,n-1}x_{n-1} - a_{n-2,n}x_n}{a_{n-2,n-2}} \\ x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n = \frac{c_n}{a_{nn}} \end{cases} \quad (4.1)$$

(b) Pour le nombre d’opérations

| x_k | opérations |
|-----------------------|---------------------------|
| $k = n$ | 1 div. |
| $k = n - 1$ | 1 soust., 1 mult., 1 div. |
| $1 \leq k \leq n - 2$ | 2 soust., 2 mult., 1 div |

On a un total de

$$N = 1 + 3 + \sum_{k=1}^{n-2} 5 = 4 + 5(n-2) = 5n - 6.$$

14 (← 97.)

(a)

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}) & (a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}) \\ 0 & (a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}) & (a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}) \end{pmatrix}$$

et

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & (a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{23}^{(1)}) \end{pmatrix}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} L_1 A^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11} + a_{21}) & (-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} + a_{22}) & (-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} + a_{23}) \\ (-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{11} + a_{31}) & (-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} + a_{32}) & (-\frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} + a_{33}) \end{pmatrix} = A^{(1)} \end{aligned}$$

(d)

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = d_1 \\ \beta_2 x_1 + x_2 = d_2 \\ \vdots \\ \beta_n x_{n-1} + x_n = d_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_i = d_i - \beta_i x_{i-1} \quad i = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Le nombre N d'opérations est donné par $N = (n-1) \cdot (1(-) + 1(\times)) = 2(n-1)$.

(e)

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 x_1 + c_1 x_2 = y_1 \\ \alpha_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = y_{n-1} \\ \alpha_n x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \frac{y_n}{\alpha_n} \\ x_{n-i} = \frac{(y_{n-i} - c_{n-i} x_{n-i+1})}{\alpha_{n-i}} \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Le nombre N' d'opérations est donné par $N' = 1(\div) + (n-1) \cdot (1(\div) + 1(-) + 1(\times)) = 3n-2$.

(f) On commence à effectuer la décomposition $A = LU$ ce qui revient à utiliser l'algorithme et donc coûte $3n-3$ op. puis on résout $Ly = d$ pour $2n-2$ op. et finalement on résout $Ux = y$ pour $3n-2$ op. Au total le nombre d'op. est $8n-7$.

16 (\leftarrow 101.)

A)

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow T(L) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & l_{nn-1} \\ 0 & \dots & 0 & l_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice $T(L)$ est triangulaire supérieure. Puisque L est triangulaire, son déterminant est égal au produit des coefficients sur la diagonale soit $\det(L) = l_{11} \cdots l_{nn}$.

B) En utilisant les propriétés de la transposée rappelées dans l'énoncé, on a $T(A) = T(LT(L)) = T(T(L))T(L) = LT(L) = A$.

C) $A = L \cdot T(L) \Rightarrow \det(A) = \det(L) \det(T(L))$ mais puisque $\det(T(L)) = \det L$, on a $\det A = (\det L)^2 = l_{11}^2 \cdots l_{nn}^2$. Comme $\det A \neq 0$ les l_{kk} sont non nuls.

D) On a $L' \cdot T(L') = LDT(LD) = LDT(D)T(L) = LD^2 T(L)$ car puisque D est diagonale, $T(D) = D$. D'autre part puisque D n'a que des 1 et des -1 sur sa diagonale, $D^2 = I$ et finalement $L' \cdot T(L') = LT(L) = A$. Sous l'hypothèse **H**, on peut toujours écrire $A = L' \cdot T(L')$ avec $L' = (l'_{ij})$ une matrice triangulaire inférieure telle que $l'_{kk} > 0$ pour $k = 1, \dots, n$. En effet partant de la matrice L donnée par l'hypothèse **H**, d'après ce qui précède, il suffit de prendre $L' = LD$ avec $D = (d_{ij})$ la matrice diagonale telle que $d_{ii} = \text{signe}(l_{ii})$.

E) $Ax = b \Leftrightarrow (LT(L))(x) = b \Leftrightarrow L(T(L)x) = b \Leftrightarrow Ly = b$ et $T(L)x = b$. Chacun des deux systèmes se résout par substitutions successives en n^2 opérations (voir cours). Au total il faut donc $2n^2$ opérations.

F) On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (n-k+1)(k-1) &= n \sum_{k=2}^n (k-1) - \sum_{k=2}^n (k-1)^2 \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= n \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= n(n-1) \frac{3n - (2n-1)}{6} = n(n-1) \frac{n+1}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6}. \end{aligned}$$

G) D'après l'hypothèse, pour $j \leq i$, on a $a_{ij} = \sum_{s=1}^n L_{is} T(L)_{sj} = \sum_{s=1}^n l_{is} l_{js}$. Mais, comme L est triangulaire inférieure, pour $s > j$ on a $l_{js} = 0$, il reste donc $a_{ij} = \sum_{s=1}^j l_{is} l_{js}$.

H) En particulier on a $l_{11}^2 = a_{11}$ puis $l_{11} l_{i1} = a_{i1}$ pour $i = 2, \dots, n$ d'où l'on déduit immédiatement les formules demandées.

I) D'après (G), en prenant $i = j = k$, on obtient $a_{kk} = \sum_{s=1}^k l_{ks}^2$ d'où, en séparant l'indice $s = k$, $a_{kk} = l_{kk}^2 + \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2$, d'où l'on déduit en utilisant la positivité de l_{kk} la relation $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2}$.

J) Ici en employant (G) avec $j = k$ on obtient $a_{ik} = \sum_{s=1}^k l_{is} l_{ks}$. En séparant l'indice $s = k$, il vient $a_{ik} = l_{ik} l_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} l_{ks}$ d'où l'on tire

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} l_{ks}}{l_{kk}} \quad (i = k+1, \dots, n).$$

On remarque que la division par l_{kk} est permise car il a été montré que l_{kk} est non nul.

K) Correspondant à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L) Il y a n racines carrées. Ensuite il y a $n-1$ divisions pour la première colonne ($k=1$) puis $n-2$ pour la suivante ($k=2$) etc. Au total on trouve $\sum_{k=1}^n (n-k) = n(n-1)/2$ divisions.

M) Le calcul pour les additions-soustractions et les multiplications est presque identique. Nous nous limitons au cas des additions-soustractions. Les additions-soustractions apparaissent à partir de $k=2$. le calcul de l_{kk} en emploie $k-1$ et celui de l_{ik} pour $i \geq k+1$ aussi $k-1$ au total le nombre est $\sum_{k=2}^n (k-1)(n_k+1)$ le $n-k+1$ correspondant au nombre d'indices i tel que $i \geq k$. On trouve le résultat demandé grâce à la question préliminaire d'arithmétique.

N) En ajoutant les opérations nécessaires au calcul de L puis celles nécessaires à la résolution des systèmes triangulaires (voir 2.2 (4)) on arrive à un nombre d'opération asymptotiquement égal à $n^3/3$ contre $2n^3/3$ pour la méthode de Gauss. La méthode de Cholesky est par conséquent plus économique mais, bien sûr, elle ne s'applique qu'aux matrices A vérifiant l'hypothèse **H**.

Index

- affine par morceaux (*fonction*), 20
- algorithme de bisection, 53
- Algorithme de Cholesky., 94
- algorithme de dichotomie, 53
- algorithme de Gauss, 87–91
- algorithme de substitutions successives, 84

- coefficient dominant (*d'un polynôme*), 1
- coefficients (*d'un polynôme*), 1
- coefficients (*d'un système linéaire*), 81
- complexité (*d'un algorithme*), 9
- continuité uniforme, 26
- contractante (*fonction*), 65
- contraction, 65
- convergence uniforme, 18, 24, 26
- coût (*d'un algorithme*), 9, 85, 88

- degré (*d'un polynôme*), 1

- erreur d'arrondi, 11

- fonction de Runge, 18
- fonction interpolée, 5
- formule d'interpolation de Lagrange, 6, 7
- formule de Lagrange barycentrique, 29, 30
- formule de Leibniz, 32
- formule de Newton (*pour l'intégration approchée*), 48
- formule de quadrature composée, 43
- formule de quadrature, 37
- formule de Simpson, viii, 28, 39, 42, 50
- formule de Taylor, 40, 59, 60, 70, 72
- formule du point milieu, 38, 50
- formule du trapèze, 39, 50
- formules de Cramer, 4, 83, 89

- interpolation de Lagrange, 5, 17, 22, 38

- ligne (*d'un système linéaire*), 81

- module de continuité, 26
- monôme, 1
- multiplicité (*d'une racine d'un polynôme*), 2
- méthode de la sécante, 53, 61, 62, 64, 66, 72, 76
- méthode de Newton, 53, 56, 57, 66, 73
- méthode de Simpson, 38, 48
- méthode des approximations successives, 53
- méthode des cordes, 72
- méthode des trapèzes, 38
- méthode du point fixe, 53
- méthode du point milieu, 38

- noeuds d'interpolation, 5

- ordre (*d'une formule de quadrature composée*), 43
- ordre (*d'une formule de quadrature*), 37
- ordre (*d'une matrice*), 82
- ordre (*d'une méthode d'approximation des solutions des équations*), 61

- partition (*associée à une subdivision*), 19
- pivots de Gauss, 86
- points d'interpolation, 5, 13, 17
- points de Chebyshev, 17, 18, 30
- points équidistants, 7, 11, 13, 18, 20, 24
- polyligne (*et formule des trapèzes composées*), 44
- polyligne, 20
- polynôme d'interpolation de Lagrange, 29
- polynôme de Taylor, 40, 56
- polynôme fondamental de Lagrange, 5, 23, 37
- polynôme, 1
- polynômes de Chebyshev, 30
- Principe d'addition des erreurs, 43

- second membre (*d'un système linéaire*), 81
- seconde formule de Simpson, 48
- seconde méthode de la sécante, 73
- stabilité, 10
- subdivision de longueur d , 18

substitutions successives, 84
support (*des bases b_i de polyligne*), 25
système régulier, 82
systèmes triangulaires, 83

théorème de Heine, 26
théorème de Rolle, 15, 51
théorème des accroissements finis, 14, 23, 63, 65
théorème des valeurs intermédiaires, 41, 53, 67

valeurs d'interpolation, 5, 13
valeurs interpolées, 5
vecteur inconnu, 82
vecteur second membre, 82
vecteur solution, 82

écart (*d'une subdivision*), 19
équation matricielle, 81
équivalence (*de deux suites*), 9





Bibliographie

- [1] M Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris, 1984.
- [2] B. Démidovitch and I. R. Maron. *Eléments de calcul numérique*. Mir, Moscou, 1979. Traduit du russe.
- [3] G. H. Hardy. *A course of pure mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952. Dixième édition (première édition, 1908).
- [4] A. Paterson. *Differential equations and numerical analysis*. Cambridge university press, Cambridge, 1991.
- [5] R. Sacco Quarteroni, A. and F. Salai. *Matematica Numerica*. Springer-Verlag, Milano, 1998.
- [6] M. Sibony and J. C. Mardon R. *Analyse numérique (2 tomes)*. Hermann, Paris, 1982.