Devoir : Fonctions holomorphes (L3 - Univ. Toulouse III)
Jean-Paul Calvi
26 Mars 2007

Ce texte est disponible en ligne à l'adresse **http://www.picard.ups-tlse.fr/~calvi/ens.html**.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit la fonction f_z sur $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ par

$$f_z(w) = \exp\left\{\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})\right\}. \tag{E1}$$

Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}^\star$, on note $J_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de son développement de Laurent en 0,

$$f_z(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, w^n \quad (|w| > 0). \tag{E2}$$

La fonction J_n est donc définie sur $\mathbb{C}$. On l'appelle la *fonction de Bessel* d'indice n. L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de ces fonctions. Les deux parties sont largement indépendantes.

1

1.1. Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$ on a $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) = J_n(-z)$.

Solution. Les expressions proviennent de l'unicité du développement de Laurent et des relations $f_{-z}(w) = f_z(-w) = f_z(1/w)$. En effet, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-z)w^n = f_{-z}(w) = f_z(-w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n J_n(z)w^n$ puis $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(z)\, w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)w^{-n} = f_z(1/w) = f_{-z}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n J_n(z)w^n$. On remarquera que pour $z = 0$ la fonction f_z est la fonction constante égale à 1 de sorte que $J_n(0) = 0$ pour $n \neq 0$ et $J_0(0) = 1$.

1.2. a) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $e^{iz\sin t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{int}$.

Solution. On applique (E2) avec $w = e^{it}$ en remarquant que $(z/2)(w - 1/w) = iz(e^{it} - e^{-it})/2i = iz\sin t$. Notons que la convergence dans (E2) étant uniforme (et même normale) sur tout compact de $\mathbb{C}^\star$, la série trouvée converge uniformément pour $t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire des développements en séries trigonométriques faisant intervenir des fonctions de Bessel d'indice positifs des fonctions $\cos(z\sin t)$ et $\sin(z\sin t)$. Quelle est la nature de la convergence de ces séries (pour z fixé et t variable) ?

Solution. En utilisant la formule d'Euler pour $\cos$, $\sin t = \sin(-t)$ et la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\cos(z\sin t) &= \frac{1}{2}(\exp(iz\sin t) + \exp(-iz\sin t))\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{int} + \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{-int}\right)\\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)\cos nt\\ &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)\cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(z)\cos(nt)\\ &= J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)(\cos nt + (-1)^n \cos nt)\\ &= J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos 2nt.\end{aligned}$$

A l'avant dernière ligne on a utilisé que $J_n(z) = (-1)^n J_n(z)$ et à la précédente le fait que $\cos$ est une fonction paire. Un calcul similaire donne

$$\sin(z\sin t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)t.$$

A cause de la remarque faire à la fin de la question précédente, la convergence dans les deux séries ci-dessus est uniforme pour $t \in \mathbb{R}$.

1.3. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$, on a

$$J_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{\mathcal{C}(0,r)} t^{-n-1}\exp\left\{t - \frac{z^2}{4t}\right\} dt, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{E3}$$

où $\mathcal{C}(0,r)$ désigne le chemin parcourant (une fois) le cercle de centre 0 et de rayon r dans le sens positif.

Solution. En appliquant la formule intégrale pour les coefficients de Laurent de f_z en prenant comme chemin d'intégration $\mathcal{C}(0,\rho)$, on obtient

$$J_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(0,\rho)} \frac{e^{\frac{z}{2}(w+\frac{1}{w})}}{w^{n+1}} dw.$$

Posant, pour $z \neq 0$, $t = wz/2$, on a $w = 2t/z$ et $dw = (2/z)dt$ et le changement de variable[1] donne

$$J_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{\mathcal{C}(0,\rho|z|/2)} \frac{e^{\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)}}{t^{n+1}} dt.$$

On obtient le résultat demandé en partant de $\rho = 2r/|z|$. La formule obtenue reste valable lorsque $z = 0$. En effet en faisant $z = 0$ dans le terme de droite de (E3) on trouve 0 lorsque $n > 0$ et, par la formule de Cauchy, on trouve $1 = \exp(0)$ lorsque $n = 0$.

b) En déduire en développant en série entière la partie sous l'intégrale que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$J_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (z/2)^{n+2s}}{s!(n+s)!} \quad z \in \mathbb{C}; \tag{E4}$$

et montrer que J_n est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1. On peut effectuer un changement de variable élémentaire après avoir transformé $\int_{\mathcal{C}(0,\rho)}$ en $\int_0^{2\pi}$.

Solution. En utilisant le développement en série entier de la fonction $\exp z$ on obtient

$$\exp\left\{t-\frac{z^2}{4t}\right\}=e^t\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{z^2}{4t}\right)^s\frac{1}{s!}.$$

Cette série est normalement (donc uniformément) convergente pour $t\in\mathcal{C}(0,r)$ de sorte que $\int_{\mathcal{C}(0,r)}\sum s=\sum_s\int_{\mathcal{C}(0,r)}$ et la formule trouvée précédemment pour J_n donne

$$J_n(z)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{z^n\cdot z^{2s}}{2^n\cdot 2^{2s}\cdot s!}\;\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(0,r)}\frac{e^t}{t^{s+n+1}}dt.$$

Une formule de Cauchy donne ensuite

$$\int_{\mathcal{C}(0,r)}\frac{e^t}{t^{s+n+1}}dt=\frac{1}{(s+n)!}\left.\frac{d^{s+n}\exp}{dz^{s+n}}\right|_{z=0}=\frac{1}{(s+n)!},$$

ce qui, ajouté à la ligne précédente, donne le développement demandé. On vérifiegénérale que le rayon de convergence de la série obtenue est $+\infty$. La fonction J_n est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1.4. Dans cette partie on obtient une majoration du module des fonctions J_n. On suppose $n>0$.

(1) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $r>0$ on a

$$|J_n(z)|\le r^{-n}e^{(|z|/2)(r+r^{-1})}. \tag{E5}$$

Solution. C'est une conséquence de la représentation intégrale de $J_n(z)$ sur le chemin $\mathcal{C}(0,r)$ déjà utilisée précédemment en remarquant que $|w|=r$ entraîne

$$\begin{aligned}|f_z(w)|&=\left|\exp\left\{\frac{z}{2}\big(w-\frac{1}{w}\big)\right\}\right|\\&\le\exp\left|\frac{z}{2}\big(w-\frac{1}{w}\big)\right|\le\exp\frac{|z|}{2}\big(|w|+\frac{1}{|w|}\big)=e^{(|z|/2)(r+r^{-1})}.\end{aligned} \tag{E6}$$

(2) Montrer que la meilleure majoration (c'est-à-dire celle pour laquelle le terme de droite est le plus petit) est obtenue en choisissant $r=(1/|z|)(n+\sqrt{n^2+|z|^2})$ (pour $z\neq 0$).

Solution. Ecrivons $|z|=\rho>0$. Nous devons trouver le minimum sur $]0,\infty|$ de la fonction h définie $h(r)=\frac{1}{r^n}e^{(\rho/2)(r+r^{-1})}$. En calculant la dérivée de h on obtient que

$$h'(r)=0\iff\frac{\rho}{2}r^n(1-\frac{1}{r^2})-nr^{n-1}=0$$

d'où l'on tire facilement $r=\frac{1}{\rho}(n+\sqrt{n^2+\rho^2})$ (l'autre solution, négative, étant à écarter). Il s'agit bien d'un minimum (la dérivée passe de $-$ à $+$ autour de cette valeur).

(3) En déduire

$$|J_n(z)|\le\left(\frac{|z|e}{2n}\right)^n e^{|z|},\quad z\in\mathbb{C}. \tag{E7}$$

Solution. En prenant pour r la valeur $(1/\rho)(n+\sqrt{n^2+|z|^2})$, $|z|=\rho$, on trouve

$$r+\frac{1}{r}=\frac{n+\sqrt{n^2+|z|^2}}{\rho}+\frac{\rho}{n+\sqrt{n^2+|z|^2}}=\frac{2\sqrt{n^2+\rho^2}}{\rho}.$$

En reportant dans l'inégalité (E5), on trouve

$$|J_n(z)|\le\frac{\rho^n}{(n+\sqrt{n^2+\rho^2})^n}e^{\sqrt{\rho^2+n^2}}.$$

L'inégalité demandée s'en déduit en remarquant que $\sqrt{\rho^2+n^2} \leq \rho + n$ et $n + \sqrt{n^2+\rho^2} \geq 2n$. On remarquera que puisque $n > 0$, l'inégalité obtenue demeure valable pour $z = 0$.

1.5. Montrer en dérivant convenablement (et en justifiant ces dérivations) l'expression (E2) que les fonctions J_n satisfont les relations suivantes

(1) $J_n' = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})$,

Solution. L'inégalité obtenue au dessus montre que la série (E2) est normalement convergente en z sur tout compact de $\mathbb{C}$ pour w fixé. En effet Si K est un compact inclus dans le disque $\{|z| \leq R\}$ alors pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\max_{z\in K} |J_n(z)w^n| \leq \max_{|z|\leq R} |J_n(z)w^n| \leq e^R (Re|w|/2n)^n$$

et le terme de droite est le terme général d'une série convergente. Le cas des n négatifs est similaire. Nous pouvons donc dériver terme à terme par rapport à z la série (E2). On trouve

$$\frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) e^{\frac{z}{2}(w-1/w)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(z)w^n.$$

Mais on a aussi

$$\frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) e^{\frac{z}{2}(w-1/w)} = \frac{1}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)w^n.$$

La formule s'obtient en identifiant les coefficients de w^n dans les deux expressions (qui sont des séries de Laurent convergentes).

(2) $J_n(z) = \frac{z}{2n}(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z))$, $(n \neq 0)$.

Solution. La série (E2) étant normalement convergente en w sur tout compact de $\mathbb{C}^\star$ (propriété des séries de Laurent) on peut la dériver par rapport à w terme à terme. On obtient

$$\frac{z}{2}\left(1 - \frac{1}{w^2}\right) e^{\frac{z}{2}(w-1/w)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(z)w^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(z)w^{n-1}.$$

D'autre part,

$$\frac{z}{2}\left(1 - \frac{1}{w^2}\right) e^{\frac{z}{2}(w-1/w)} = \frac{z}{2}\left(1 - \frac{1}{w^2}\right) \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)w^n.$$

La formule s'obtient à nouveau en identifiant les coefficients de w^n dans les deux expressions.

1.6. Montrer que $z^2 J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2 - n^2)J_n(z) = 0$.

Solution. L'expression peut s'obtenir à partir des développements en série entière des fonctions J_n. On remarquera qu'il suffit de vérifier la relation pour $n \in \mathbb{N}$ (à cause des relations entre J_n et J_{-n}. Pour $n \geq 2$ le coefficient de z^{n+2s} dans $z^2 J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2 - n^2)J_n(z)$ est donné par

$$\frac{(-1)^s(n+2s)(n+2s-1)}{2^{n+2s}s!(n+s)!} + \frac{(-1)^s(n+2s)}{2^{n+2s}s!(n+s)!} + \frac{(-1)^s(-n^2)}{2^{n+2s}s!(n+s)!} + \frac{(-1)^{s-1}}{2^{n+2(s-1)}(s-1)!(n+s-1)!}.$$

Le résultat provient alors, en réduisant au même dénominateur, de la relation algébrique

$$(n+2s)(n+2s-1) + (n+2s) - n^2 - 4s(n+s) = 0.$$

Des vérification similaires pour les coefficients de x^0 et x^1.

2

On note $H(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{H} = \{h_s : s \in \mathbb{N}\} \subset H(\mathbb{C})$. On dit que $\mathcal{H}$ est une *famille totale* pour $H(\mathbb{C})$ si pour tout $f \in H(\mathbb{C})$, il existe une suite (f_n) qui converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$ avec f_n dans l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{H}$, autrement dit, f_n est une combinaison linéaire d'un nombre (fini) d'éléments de $\mathcal{H}$.

2.1. Montrer que $\mathcal{P} = \{z \to z^s : s \in \mathbb{N}\}$ est une famille totale pour $H(\mathbb{C})$. C'est l'exemple le plus simple et le plus important.

Solution. Soit $f \in H(\mathbb{C})$. Nous savons que $f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s$ avec $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ et la convergence de la série est uniforme sur tous les compacts de $\mathbb{C}$. Définissant f_n par $f_n(z) = \sum_{s=0}^{n} a_s z^s$ on a bien que f_n converge vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$ et f_n est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{P}$.

2.2. On se propose de montrer que $\mathcal{E} = \{z \to e^{\alpha z} : \alpha \in \mathbb{Q}\}$ est une famille totale pour $H(\mathbb{C})$.

(1) Soit f_n définie par $f_n(z) = n\big(e^{z/n} - 1\big)$. Montrer que f_n converge uniformément sur tout compact vers une fonction à déterminer.

Solution. Nous montrons que la suite f_n converge uniformément vers l'identité ($I(z) = z$) uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Observons d'abord que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f_n(z) - z = n\left(\exp\frac{z}{n} - 1 - \frac{z}{n}\right) = n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}(z/n)^k = n(z/n)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}(z/n)^k.$$

On en déduit, en remarquant que $1/(n^k \cdot (k+2)!) \leq 1/k!$, que

$$|f_n(z) - z| \leq n(|z|/n)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k = n(|z|/n)^2 e^{|z|}.$$

Soit maintenant K un compact quelconque de $\mathbb{C}$. prenons $R > 0$ tel que K est inclus dans le disque de centre l'origine et de rayon R, l'inégalité précédente donne

$$\max_{z\in K}|f_n(z) - z| \leq \max_{|z|\leq R}|f_n(z) - z| \leq n(R/n)^2 e^R \to 0\ (n \to \infty).$$

Ceci montre l'uniforme convergence de f_n vers I sur K et achève la démonstration.

(2) En déduire, pour tout $k \geq 1$, une suite de fonctions $f_{k,n}$ dans l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{E}$ et convergeant vers $z \to z^k$ lorsque $n \to \infty$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Solution. En effet, en gardant la même notation que pour la question précédente, on a f_n^k qui converge uniformément vers $I^k : z \to z^k$ cela résulte de l'application répétée du fait que si u_n et v_n sont des suites de fonctions convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers respectivement u et v alors $u_n v_n$ converge dans les mêmes conditions vers uv. Nous indiquons brièvement comment cette propriété s'établit. A partir de l'inégalité triangulaire

$$|u_n v_n(z) - u(z)v(z)| \leq |u_n(z) - u(z)| \cdot |v_n(z)| + |v_n(z) - v(z)| \cdot |u(z)|$$

on tire

$$\max_{z\in K}|u_n(z)v_n(z) - u(z)v(z)| \leq \Delta_1 \max_{z\in K}|u_n(z) - u(z)| + \Delta_2 \max_{z\in K}|u_n(z) - u(z)|,$$

où $\Delta_2 = \max_{z\in K}|u(z)|$ et $\Delta_1 = \max_{n\in\mathbb{N}}\max_{z\in K}|v_n(z)|$. Le fait que Δ_1 soit un nombre fini résulte de l'uniforme convergence de v_n. De l'inégalité ainsi établie on déduit rapidement l'uniforme convergence de $u_n v_n$ vers

uv sur K à l'aide de l'uniforme converge de u_n vers u et de v_n vers v.

Il reste à vérifier que les fonctions f_n^k sont bien des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{E}$: c'est une conséquence de la formule du binôme de Newton.

(3) Démontrer que $\mathcal{E}$ est une famille totale pour $H(\mathbb{C})$.

Solution. Nous montrons d'abord que tout polynôme est limite uniforme sur tout compact d'une suite formée de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{E}$. En effet, si $p(z) = \sum_{j=0}^k a_j z^j$ alors, d'après la question précédente, la fonction $F_n \in \mathcal{E}$ définie par $F_n(z) = \sum_{j=0}^k a_j f_n^j(z)$ converge uniformément vers p sur tout compact de $\mathbb{C}$. (On utilise que la somme (finie) de suites uniformément convergentes converge uniformément vers la somme des limites.)

Soit maintenant $f \in H(\mathbb{C})$. D'après la question 2.1, il existe une suite de polynôme qui converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$. Considérant le compact $\{|z| \leq n\}$, nous pouvons affirmer qu'il existe un polynôme, que nous noterons p_n, tel que $\max_{|z|\leq n} |f - p_n| \leq 1/n$. Maintenant d'après la question précédente, il existe une fonction F_n, combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $\max_{|z|\leq n} |F_n(z) - p_n(z)| \leq 1/n$. Nous montrons que la suite F_n converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Soit K un tel compact. Il existe n_0 tel que $K \subset \{|z| \leq n_0\}$. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned}
\max_{z\in K} |f(z) - F_n(z)| &\leq \max_{|z|\leq n_0} |f(z) - F_n(z)| \\
&\leq \max_{|z|\leq n} |f(z) - F_n(z)| \\
&\leq \max_{|z|\leq n} |f(z) - p_n(z)| + \max_{|z|\leq n} |p_n(z) - F_n(z)| \\
&\leq 2/n,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit la convergence uniforme de F_n vers f sur le compact K. Ceci achève la démonstration.

2.3. Soit maintenant $\mathcal{B} = \{J_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

(1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ la fonction $z \to \exp(\alpha z)$ est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$ d'une suite de fonctions formées de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{B}$. (On pourra appliquer (E2) en choisissant convenablement w.)

Solution. En prenant $w = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$ dans la relation (E2), on a

$$e^{\alpha z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})^n.$$

Il suit que $e^{\alpha z}$ est limite uniforme de la suite

$$f_n(z) = \sum_{s=-n}^{\infty} J_s(z)(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})^s$$

et la conconclusion suit en utilisant la relation liant J_n et J_{-n}.

(2) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une famille totale pour $H(\mathbb{C})$.

Solution. Même raisonnement que dans la solution du point (3) de la question (2.2).