Solution du devoir de calcul différentiel (L3 - Toulouse III)
Jean-Paul Calvi
11 avril 2007

Ce corrigé est disponible en ligne à l'adresse
http://www.picard.ups-tlse.fr/~calvi/ens.html.

1

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x) = (\phi_1(x),\phi_2(x),\phi_3(x))$ avec

$$\phi_1(x) = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2},\ \phi_2(x) = \frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \text{ et } \phi_3(x) = \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \quad x = (x_1,x_2). \tag{E1}$$

1.1. Montrer que ϕ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer le rang de l'application $D\phi(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}^2$. (On rappelle que le rang d'une application linéaire est par définition la dimension de son ensemble image.)

Solution. La fonction ϕ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ parce que ses composantes ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 le sont et elles le sont comme quotient de fonctions différentiables (polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour calculer le rang de l'application linéaire $d\phi(x) \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ nous utilisons sa matrice $J(x)$ dans la base canonique des espaces de départ et d'arrivée - c'est la matrice jacobienne de ϕ en x. Rappelons que le rang d'une application linéaire est toujours borné par le minimum des dimensions des espaces de départ et d'arrivée. Le rang maximal possible pour $d\phi(x)$ est donc 2. Le calcul des dérivées partielles conduit à

$$J(x) = \frac{2}{c(x)} \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 + 1 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & -x_2^2 + x_1^2 + 1 \end{pmatrix},$$

avec $c(x) = (1 + x_1^2 + x_2^2)^2$. Nous allons vérifier - en calculant des déterminants d'ordre 2 - que deux des trois vecteurs lignes sont toujours linéairement indépendants ce qui prouvera que le rang de $d\phi(x)$ est égal à 2 pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{vmatrix} -2x_1 & -2x_2 \\ x_2^2 - x_1^2 + 1 & -2x_1x_2 \end{vmatrix} = 2x_2(1 + x_1^2 + x_2^2)$$

qui montre les deux premières lignes sont indépendantes dès que $x_2 \neq 0$. De la même manière, on montre que la première et la troisième ligne sont indépendantes dès que $x_1 \neq 0$. Enfin, lorsque $x = (0,0)$ alors les deux dernières lignes de $J(x)$ sont $(1,0)$ et $(0,1)$ qui sont linéairement indépendantes. CQFD.

1.2. On désigne par S la sphère de centre $0 = (0,0,0)$ et de rayon 1,

$$S = \{y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\} \tag{E2}$$

et $P = (-1,0,0) \in S$. Montrer que pour tout $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x)$ est l'intersection de S avec la droite passant par P et le point M_x de coordonnées $(0,x_1,x_2)$ et montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $S \setminus \{P\}$ (la sphère privée du point P).

Solution. Cherchons l'intersection entre S et la droite $D(P, \overrightarrow{PM_x})$ passant par P et M_x ou encore passant par P et de vecteur directeur $\overrightarrow{PM_x}$. On a

$$\begin{aligned} & M = (\alpha,\beta,\gamma) \in S \cap D(P, \overrightarrow{PM_x}) \\ & \iff \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 & \\ (\alpha,\beta,\gamma) & = (-1,0,0) + t(0 - (-1),x_1,x_2) \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}^\star \\ & = (-1 + t,tx_1,tx_2) \end{array} \right. \end{aligned} \tag{E3}$$

De la condition $(t-1)^2 + t^2x_1^2 + t^2x_2^2 = 1$ on tire $t^2(1 + x_1^2 + x_2^2) - 2t = 0$, comme t est non nul, il vient $t = 2/(1 + x_1^2 + x_2^2)$. On en déduit l'unicité de t, donc de M et en reportant la valeur de t on trouve facilement $\alpha = \phi_1(x)$, $\beta = \phi_2(x)$ et $\gamma = \phi_3(x)$. Cela montre que $\phi(x)$ est l'intersection de S avec la droite passant par P et le point M_x.

Nous donnons une preuve géométrique de la bijectivité de ϕ de $\mathbb{R}^2$ sur $S \setminus \{P\}$. On pourrait évidemment directement travailler avec les expressions de ϕ.
Montrons d'abord que ϕ est injective. Si elle ne l'est pas, alors il existe deux points distincts M_x et $M_{x'}$ dans le plan $y_1 = 0$ qui donne le même point M dans $S \setminus \{P\}$. Dans ce cas les droites (PM_x) et $(PM_{x'})$ sont confondues et égales à la droite $(M_xM_{x'})$ qui est incluse dans le plan $y_1 = 0$ (puisque chacun des deux points y appartient). Il suit que P lui-même - qui appartient à la droite - appartient à ce plan ce qui est une contradiction puisque la première coordonnées de P est non nulle.
La preuve de la surjectivité est similaire. Etant donné $M(\alpha,\beta,\gamma)$ dans S, $M \neq P$, on doit établir que la droite (PM) rencontre le plan $y_1 = 0$. S'il n'en est pas ainsi, c'est que la droite (PM) est parallèle au plan (ou incluse). Dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{PM_x}$ doit aussi appartenir au plan (vectoriel) $y_1 = 0$ ce qui est impossible car $\alpha - (-1) \neq 0$ puisque $M \neq P$ (Si $\alpha = -1$, $M \in S$ entraîne $\beta = \gamma = 0$).

1.3. Soit Π la plan d'équation $x_1 = -1$ dans $\mathbb{R}^3$. On considère la fonction $\eta : \mathbb{R}^3 \setminus \Pi \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\eta(y_1,y_2,y_3) = \left(\frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_3}{1+x_1} \right). \tag{E4}$$

1.3.1. Etudier la différentiabilité de η.

Solution. Même argument que dans la première question. Noter que $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ (comme complémentaire d'un fermé) sur le lequel les dénominateurs des composantes de η ne s'annulent pas.

1.3.2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a $(\eta \circ \phi)(x) = x$.

Solution. Un simple calcul à partir des expressions de ϕ et η.

1.4. Trouver une fonction ϕ' et une fonction η' pour lesquelles le rôle précédemment joué par P est joué par $P' = (1,0,0)$.

Solution. Nous pouvons définir $\phi'(x)$ comme les coordonnées de l'unique point d'intersection $M = (\alpha',\beta',\gamma')$ entre la S et droite $(P'M_x)$. Le raisonnement suivant conduit au même résultat. Appelons, s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ définie par $s(y_1,y_2,y_3) = (-y_1,y_2,y_3)$ et posons $\phi' = s \circ \phi$. Puisque s est un isomorphisme linéaire, les propriétés de différentiabilité et de rang de ϕ s'étendent immédiatement à ϕ'. De plus

$$\phi'(\mathbb{R}^2) = s(\phi(\mathbb{R}^2)) = s(S \setminus \{P\}) = S \setminus \{P'\}$$

car $s(S) = S$ et $s(P) = P'$. Notons que ϕ' est une bijection (comme composée de deux bijections). La fonction η' n'est autre que $\eta \circ s$ et, puisque $s \circ s = Id$ on a bien

$$\eta' \circ \phi' = (\eta \circ s) \circ (s \circ \phi) = \eta \circ \phi = Id.$$

1.5. Soit $a \in S$, $a \notin \{P,P'\}$, et $x_a = \eta(a)$. Montrer que $f = \eta' \circ \phi$ est un difféomorphisme au voisinage de x_a.

Solution. Remarquons d'abord que x_a est bien défini grâce au fait que $a \neq P$ et comme $a \neq P'$ on a $x_a \neq 0$. Ensuite, pour $x = (x_1,x_2) \neq 0$,

$$f(x) = (\eta' \circ \phi)(x) = (\eta \circ s \circ \phi)(x) = \eta(-\phi_1(x),\phi_2(x),\phi_3(x)) = \left(\frac{\phi_2(x)}{1-\phi_1(x)}, \frac{\phi_3(x)}{1-\phi_1(x)} \right).$$

En remplaçant par les expressions des ϕ_i on arrive a

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

D'après le théorème d'inversion locale, pour s'assurer que f est un difféomorphisme local au voisinage de x_a, il suffit d'établir que f est différentiable en x_a et que $Df(x_a)$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$. La différentiabilité est claire (toujours les mêmes arguments) dès lors que $x_a \neq 0$. La matrice de $Df(x_a)$ dans la base canonique est

$$\frac{1}{\|x\|^4}\begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Mais

$$\begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{vmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2)^2$$

qui est différent de 0 pour $x = x_a$ puisque $x_a \neq 0$. CQFD

2

2.1. Soit f est une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et α une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
On pose $g = f \circ \alpha$. On suppose que $x_0 \in \mathbb{R}^N$ est tel que $\alpha(x_0) \in I$.

2.1.1. Montrer que g est définie sur un voisinage ouvert de x_0.

Solution. La fonction g est définie sur $\alpha^{-1}(I)$ qui contient x_0. Comme I est ouvert et α est continue, $\alpha^{-1}(I)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et donc un voisinage ouvert de x_0.

2.1.2. Montrer que si f est d fois dérivable au point $\alpha(x_0)$ alors g est d fois différentiable au point x_0 et

$$D^d g(x_0)(h_1, h_2, \cdots, h_d) = f^{(d)}(\alpha(x_0))\, \alpha(h_1) \cdots \alpha(h_d) \tag{E5}$$

où $f^{(d)}(x_0)$ désigne la d-ème dérivée de f. Que dire des dérivées partielles de g?

Solution. D'abord g est d fois différentiable au point x_0 parce qu'elle est la composée d'une fonction d-fois différentiable en $\alpha(x_0)$ et d'une forme linéaire (donc de classe c^∞) en x_0. Rappelons que f étant d fois dérivable en $\alpha(x_0)$ elle est $d-1$ fois dérivable sur un voisinage de x_0 de sorte que g est $d-1$ différentiable dans un voisinage de $\alpha(x_0)$.

Nous établissons la relation (E5) par récurrence sur d.
Lorsque $d = 1$, il s'agit de la relation usuelle pour la différentielle d'une composée en tenant compte du fait que $D\alpha(x_0)(h) = \alpha(h)$.
Supposons la relation démontrée lorsque $d = k$ et établissons-la pour $d = k + 1$. Nous devons déterminer la différentielle en x_0 de la fonction

$$\Psi : \alpha^{-1}(I) \to f^{(k)}(\alpha(x))\alpha^{\otimes k} \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

où $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des formes k-linéaires sur $(\mathbb{R}^n)^k$ et $\alpha^{\otimes k}$ la forme k-linéaire définie par

$$\alpha^{\otimes k}(h_1, \ldots, h_k) = \alpha(h_1) \cdots \alpha(h_k), \quad (h_i \in \mathbb{R}^n).$$

Maintenant, on a $\Psi = \psi \circ G$ où $G(x) = f^{(k)}\big(\alpha(x)\big)$ et ψ est l'application linéaire $t \in \mathbb{R} \to t\alpha^{\otimes k} \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. La formule de différentiation d'une fonction composée donne alors

$$D\Psi(x_0) = D\psi\big(G(x_0)\big) \circ DG(x_0) = \psi \circ DG(x_0)$$

d'où

$$D\Psi(x_0)(h_{k+1}) = f^{(k+1)}\big(\alpha(x_0)\big)\alpha(h_{k+1})\alpha^{\otimes k}$$

d'où l'on déduit la formule demandée dans le cas $d = k + 1$ ce qui achève la démonstration par récurrence.
Pour ce qui concerne les dérivées partielles, nous savons que si $k = i_1 + i_2 + \ldots i_n$,

$$\frac{\partial^k g}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(x_0) = D^k(g)(x_0)(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{i_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{i_n \text{ fois}})$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $\alpha(e_i) = \alpha_i$, on déduit de (E5) que

$$\frac{\partial^k g}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_n^{i_n}.$$

Naturellement, on peut retrouver ces formules en calculant directement les dérivées partielles de g.

2.1.3. Déterminer, à l'aide du résultat précédent, les différentielles en 0 de la fonction

$$\mathcal{E} : x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to \exp(x_1 + \cdots + x_n) \in \mathbb{R}. \tag{E6}$$

Retrouver ce résultat en utilisant les propriétés particulières de la fonction exponentielle.

Solution. L'application est immédiate :

$$D^d\mathcal{E}(0)(h_1, \ldots, h_d) = \prod_{j=0}^{k}(h_{1j} + \cdots + h_{nj}).$$

On peut retrouver ce résultat en remarquant que $\mathcal{E}(x) = e^{x_1} \ldots e^{x_n}$ et en utilisant la formule sur la différentielle d'un produit. Par exemple, notant $f_i(x) = e^{x_i}$, on a

$$D\mathcal{E}(0)(h) = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i\neq j} f_i(0)Df_j(0)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j.$$

Le résultat correspondant à (E5) peut être établi par récurrence. Le résultat sur les dérivées partielles par contre est immédiat car

$$\frac{\partial^k \mathcal{E}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(0) = \left.\frac{d^{i_1} \exp x}{dx^{i_1}}\right|_{x=0} \cdots \left.\frac{d^{i_n} \exp x}{dx^{i_n}}\right|_{x=0} = 1 \times \cdots \times 1 = 1.$$

2.2. Soit, plus généralement, A un application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ c'est-à-dire une application de la forme $A(x) = L(x) + v$ où $v \in \mathbb{R}^m$ et L est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

2.2.1. Quelles sont les différentielles (de tout ordre) de A en $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

Solution. Puisque la différentielle d'une fonction constante est nulle, on a $DA = DL$ de sorte que $DA(x) = L$ et les différentielles d'ordre supérieur sont toutes nulles.

2.2.2. Sous quelles hypothèses sur f et sur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la fonction $g = f \circ A$ sera-t-elle d fois différentiable au point x_0 ?

Solution. Il suffit que f soit (définie sur un voisinage ouvert de $A(x_0)$ et) d-fois différentiable au point $A(x_0)$. On utilise ensuite la composition de d et A comme il est fait dans une question précédente.

Dans la suite on suppose que ces hypothèses sont vérifiées. Nous supposons aussi que toutes les fonctions f sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2.3. Donner une relation entre les différentielles d'ordre d de f et celles de g, puis une relation entre les dérivées partielles de f et de g.

Solution. Nous montrons que

$$D^d(g)(x_0) = D^d(f)(A(x_0))(L(h_1),\ldots,L(h_d)). \tag{E7}$$

La démonstration s'effectue par récurrence comme dans le cas de (E5). Lorsque $d = 1$, c'est la formule pour la différentielle d'une fonction composée.
Supposons la relation démontrée lorsque $d = k$ et établissons-la pour $d = k+1$. Nous devons déterminer la différentielle en x_0 de la fonction

$$\Psi : x \to D^k f(A(x))\big(L(\cdot),\ldots,L(\cdot)\big) \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$$

où $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ désigne l'espace des formes k-linéaires sur $(\mathbb{R}^n)^k$. Appelons ψ l'application qui à un élément $u \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ fait correspondre $\psi(u) \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ défini par $\psi(u)(h_1,\ldots,h_k) = u\big(L(h_1),\ldots,L(h_k)\big)$. Cette application est linéaire et pour x dans un voisinage de x_0 on a

$$\Psi(x) = \psi \circ D^k(f) \circ A.$$

En différentiant cette expression on obtient

$$\begin{aligned} D\Psi(x_0)(h) &= \psi\Big(D^{k+1} f\big(A(x_0)\big)(L(h))\Big) \\ &= D^{k+1} f(A(x_0))(L(h))\big(L(\cdot),\ldots,L(\cdot)\big) \\ &= D^{k+1} f(A(x_0))\big(L(\cdot),\ldots,L(\cdot),L(h)\big), \end{aligned}$$

où on utilise, pour la dernière égalité, l'identification habituelle entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$ et $\mathcal{L}_{k+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ (une autre identification donnerait le même résultat puisque les différentielles sont des formes multilinéaires symétriques). En particulier, revenant à la définition de ψ,

$$Dg^{k+1}(x_0)(h_1,\ldots,h_k,h) = D^{k+1} f\big(A(x_0)\big)\Big(L(h_1),\ldots,L(h_k),L(h)\Big)$$

ce qui achève la preuve de la formule pour $d = k+1$.
Pour les dérivées partielles, on raisonne comme dans la solution de la question 2.1.2.

2.4. On désigne, lorsqu'il existe, par $\mathbf{T}_d(h,a)$ le polynôme de Taylor de la fonction h au point a à l'ordre d. Avec les notations précédentes, montrer que

$$\mathbf{T}_d(f \circ A,x_0) = \mathbf{T}_d(f,A(x_0)) \circ A. \tag{E8}$$

Solution. En notant $g = f \circ A$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_d(f \circ A,x_0) &= \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{j!} D^j(g)(x_0)(x-x_0,\ldots,x-x_0) \\ &= \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{j!} D^j(f)(A(x_0))(L(x-x_0),\ldots,L(x-x_0)) \\ &= \sum_{j=0}^{d} \frac{1}{j!} D^j(f)(A(x_0))(A(x)-A(x_0)),\ldots,A(x)-A(x_0)) \\ &= \mathbf{T}_d(f,A(x_0))(A(x)). \end{aligned}$$

La première égalité est la définition du polynôme de Taylor, la seconde résulte du résultat démontré précédemment sur les différentielles de g, la troisième utilise le fait que $L(x-x_0) = L(x) - L(x_0) = (L(x)+v) - (L(x)+v) = A(x) - A(x_0)$.

2.5. Application. Montrer que si $f = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ *symétrique* alors tous ses polynômes de Taylor à l'origine sont aussi des polynômes symétriques.
On rappelle que f symétrique signifie que pour toute permutation σ de $\{1,2,\ldots,n\}$ et tout $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}). \tag{E9}$$

Solution. Notons A_σ l'isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$A_\sigma(x_1,\ldots,x_n) = (x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

La symétrie de f se traduit par $f \circ A_\sigma = f$. On a alors en utilisant la question précédente et $A_\sigma(0) = 0$,

$$\mathbf{T}_d(f,0) = \mathbf{T}_d(f \circ A_\sigma,0) = \mathbf{T}_d(f,A_\sigma(0)) \circ A_\sigma = \mathbf{T}_d(f,0) \circ A_\sigma.$$

L'égalité $\mathbf{T}_d(f,0) = \mathbf{T}_d(f,0) \circ A_\sigma$ valide pour toute permutation σ assure la symétrie de $\mathbf{T}_d(f,0)$.

2.6. Les propriétés démontrées s'étendent-elles au cas où $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont remplacés par des espaces de Banach quelconques.

Solution. Exceptés ceux sur les dérivées partielles, les résultats s'étendent immédiatement aux cas où $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont remplacés par des espaces de Banach quelconques E et F (et même une fonction f à valeurs dans un espace de Banach G). Notons toutefois qu'il est alors nécessaire - lorsque E est de dimension infinie - de supposer l'application affine A continue ou, ce qui revient au même, sa partie linéaire L. La continuité de A entraîne ensuite sa différentiabilité.