Devoir : Fonctions holomorphes (L3 - Univ. Toulouse III)
Jean-Paul Calvi
26 Mars 2007

Le devoir est à remettre au plus tard le **Lundi 16 avril à 12h00** au secrétariat. Les copies remises en retard, quelle que soit la raison du retard, ne seront pas corrigées. Ce texte est disponible en ligne à l'adresse **http://www.picard.ups-tlse.fr/~calvi/ens.html** et le corrigé y sera accessible dans l'après-midi du 16 avril[1].

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit la fonction f_z sur $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ par

$$f_z(w) = \exp\left\{\frac{z}{2}\big(w - \frac{1}{w}\big)\right\}. \tag{E1}$$

Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}^\star$, on note $J_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de son développement de Laurent en 0,

$$f_z(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, w^n \quad (|w| > 0). \tag{E2}$$

La fonction J_n est donc définie sur $\mathbb{C}$. On l'appelle la *fonction de Bessel* d'indice n. L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de ces fonctions. Les deux parties sont largement indépendantes.

1

1.1. Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}$ on a $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) = J_n(-z)$.

1.2. a) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $e^{iz\sin t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{int}$.
b) En déduire des développements en séries trigonométriques faisant intervenir des fonctions de Bessel d'indice positifs des fonctions $\cos(z \sin t)$ et $\sin(z\sin t)$. Quelle est la nature de la convergence de ces séries (pour z fixé et t variable) ?

1.3. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$, on a

$$J_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{\mathcal{C}(0,r)} t^{-n-1} \exp\left\{t - \frac{z^2}{4t}\right\} dt, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{E3}$$

où $\mathcal{C}(0,r)$ désigne le chemin parcourant (une fois) le cercle de centre 0 et de rayon r dans le sens positif.
b) En déduire en développant en série entière la partie sous l'intégrale que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$J_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (z/2)^{n+2s}}{s!(n+s)!} \quad z \in \mathbb{C}; \tag{E4}$$

et montrer que J_n est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1.4. Dans cette partie on obtient une majoration du module des fonctions J_n. On suppose $n > 0$.

(1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$ on a

$$|J_n(z)| \le r^{-n} e^{(|z|/2)(r+r^{-1})}. \tag{E5}$$

(2) Montrer que la meilleure majoration (c'est-à-dire celle pour laquelle le terme de droite est le plus petit) est obtenue en choisissant $r = (1/|z|)(n + \sqrt{n^2+|z|^2})$ (pour $z \neq 0$).

(3) En déduire

$$|J_n(z)| \le \left(\frac{|z|e}{2n}\right)^n e^{|z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{E6}$$

---

1. Les étudiants qui pensent identifier une erreur dans l'énoncé doivent d'abord s'assurer que celle-ci n'a pas déjà été signalée (et corrigée) sur la page **http://www.picard.ups-tlse.fr/~calvi/ens.html** et, si non, me contacter par courrier électronique à calvi@picard.ups-tlse.fr.

1.5. Montrer en dérivant convenablement (et en justifiant ces dérivations) l'expression (E2) que les fonctions J_n satisfont les relations suivantes

(1) $J_n' = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})$,

(2) $J_n(z) = \frac{z}{2n}(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z))$, $(n \neq 0)$.

1.6. Montrer que $z^2 J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2 - n^2)J_n(z) = 0$.

2

On note $H(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{H} = \{h_s\ :\ s \in \mathbb{N}\} \subset H(\mathbb{C})$. On dit que $\mathcal{H}$ est une *famille totale* pour $H(\mathbb{C})$ si pour tout $f \in H(\mathbb{C})$, il existe une suite (f_n) qui converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$ avec f_n dans l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{H}$, autrement dit, f_n est une combinaison linéaire d'un nombre (fini) d'éléments de $\mathcal{H}$.

2.1. Montrer que $\mathcal{P} = \{z \to z^s\ :\ s \in \mathbb{N}\}$ est une famille totale pour $H(\mathbb{C})$. C'est l'exemple le plus simple et le plus important.

2.2. On se propose de montrer que $\mathcal{E} = \{z \to e^{\alpha z}\ :\ \alpha \in \mathbb{Q}\}$ est une famille totale pour $H(\mathbb{C})$.

(1) Soit f_n définie par $f_n(z) = n\big(e^{z/n} - 1\big)$. Montrer que f_n converge uniformément sur tout compact vers une fonction à déterminer.

(2) En déduire, pour tout $k \geq 1$, une suite de fonctions $f_{k,n}$ dans l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{E}$ et convergeant vers $z \to z^k$ lorsque $n \to \infty$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(3) Démontrer que $\mathcal{E}$ est une famille totale pour $H(\mathbb{C})$.

2.3. Soit maintenant $\mathcal{B} = \{J_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

(1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ la fonction $z \to \exp(\alpha z)$ est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$ d'une suite de fonctions formées de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{B}$. (On pourra appliquer (E2) en choisissant convenablement w.)

(2) Démontrer que $\mathcal{B}$ est une famille totale pour $H(\mathbb{C})$.

Note. Les fonctions de Bessel ont des applications à la résolution de certains équations aux dérivées partielles. La première étude systématique, motivée par des questions d'astronomie, et due à Bessel (1784-1846), remonte à 1824. L'ensemble des propriétés discutée dans ce problème sont connues, sous des formulations différentes, au moins depuis 1870.