

Curriculum Vitae

Renseignements personnels

Nom Prénom Buff Xavier

Date de naissance 16 décembre 1971

Nationalité Française

Adresse personnelle Lieu dit Roche, 31320 Aureville

Adresse professionnelle Université de Toulouse (UT3,CNRS,INSA,UT1,UT2)
Institut de Mathématiques de Toulouse
31062 Toulouse, France

Courrier électronique xavier.buff@math.univ-toulouse.fr

Formation

2008-... Professeur à l'université Paul Sabatier, Toulouse.

2006 Habilitation à diriger les recherches soutenue le 6 novembre 2006 à l'université Paul Sabatier, Toulouse: "Disques de Siegel et ensembles de Julia d'aire strictement positive".

1998-2008 Maître de conférences à l'université Paul Sabatier, Toulouse.

1997-1998 HC-Wang assistant professor à l'université de Cornell, Ithaca, USA.

1993-1996 Thèse de mathématiques pures obtenue avec les félicitations du jury le 16 décembre 1996 à l'université de Paris-Sud (Orsay) sous la direction d'Adrien Douady: "Points fixes de renormalisation".

1992-1993 DEA de mathématiques pures à l'université de Paris Sud.

1991-1992 Agrégation de mathématiques.

1990-1991 Licence et maîtrise de mathématiques à l'université de Paris VI (Jussieu).

1990 Reçu au concours d'entrée à l'École Normale Supérieure.

1988 Baccalauréat C Mention très bien.

- Depuis 2001, j'ai une Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche, renouvelée en 2005.
- Lauréat 2006 du prix Leconte de l'Académie des Sciences (conjointement avec Arnaud Chéritat).
- Je fais partie du projet ANR "Résonances" dont Laurent Stolovitch est le responsable.
- Avec Arnaud Chéritat et Pascale Roesch, nous avons monté un projet ERC Starting Grant. Ce projet a été classé puis financé par l'ANR.

Enseignement

2007-2008	Cours, TD, leçons en prépa agreg; cours en L2 section prépa-concours. UE d'ouverture sur le chaos déterministe.
2006-2007	Cours, TD, leçons en prépa agreg; cours en L2 section prépa-concours.
2005-2006	Cours, TD, leçons en prépa agreg (délégation au CNRS).
2004-2005	Cours de DEA sur les problèmes de petits diviseurs; Cours, TD, leçons en prépa agreg; cours de DEUG en sciences de l'ingénieur-prépa concours.
2003-2004	Cours, TD, leçons en prépa agreg; cours de DEUG en sciences de l'ingénieur-prépa concours.
2002-2003	TD en DEUG première année et en prépa concours
1999-2002	TD en licence (intégration, calcul différentiel, analyse complexe).
1998-1999	TD en DEUG première année (analyse, algèbre, statistiques).
1997-1998	(Université de Cornell) Graduate course: géométrie différentielle + dynamique holomorphe. Undergraduate course: analyse complexe et transformation de Fourier

J'ai également fait de nombreuses interventions auprès d'enseignants de collèges et de lycées au sein de l'IREM de Toulouse et dans le cadre de la formation continue des enseignants. Je m'occupe chaque année d'un atelier Maths En Jeans (il s'agit de proposer des problèmes de recherche à des lycéens) en collaboration avec des enseignants du lycée Ozenne de Toulouse et du lycée Pierre Paul Riquet de Saint Orens. Je participe à un projet sciences au collège de Saint Sulpice depuis 2004. Je participe à un club science et citoyen junior du CNRS depuis 2005. J'ai organisé la venue et l'animation de l'exposition "Un monde fractal" du 17 mars au 18 avril 2003.

En 2001 et en 2002, j'ai encadré des mémoires de maîtrise d'étudiants de l'université Paul Sabatier. En 2004, j'ai encadré le mémoire d'une étudiante en première année de l'ENS Lyon. En 2005-2006, j'ai encadré un mémoire de Master 2 (Christian Mouanda).

J'ai une prime d'encadrement doctoral et de recherche depuis 2001, renouvelée en 2005.

Fonctions d'intérêt collectif

En 2008	J'ai co-organisé une session spéciale lors du congrès franco-canadien qui a eu lieu à Montréal.
En 2008	J'ai co-organisé la conférence internationale à la mémoire d'Adrien Douady qui a eu lieu à l'IHP à Paris.
Depuis avril 2008	Je suis directeur de l'IREM de Toulouse.
Depuis septembre 2007	J'encadre la thèse d'Alexandre Dezotti.
Depuis novembre 2006	J'encadre la thèse de Kuntal Banerjee.

2005-2006	J'ai accueilli Kingshook Biswas en post-doctorat dans le cadre d'une bourse du ministère.
En 2004	J'ai co-organisé une session spéciale lors du congrès franco-canadien qui a eu lieu à Toulouse.
Depuis 2004	Je suis membre du conseil de l'Institut de Mathématiques de Toulouse et du conseil scientifique de l'UFR MIG.
Depuis 2004	Je suis correspondant de la SMF à Toulouse.
2001-2003	J'ai accueilli Christian Henriksen en post-doctorat à Toulouse dans le cadre d'une bourse européenne Marie Curie.
En 2001	J'ai co-organisé une session spéciale lors du congrès franco-américain qui a eu lieu à l'ENS Lyon.
Depuis 2000	Je suis membre de la commission de spécialistes de Toulouse, section 25.

- J'ai fait des rapports sur des articles soumis à des journaux tels que *Inventiones Mathematicae*, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, *Proceedings of the AMS*, *Journal of the AMS*, *Annales Scientifiques de l'ENS*, *Annales de l'institut Fourier*, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*.
- J'ai fait de nombreuses interventions auprès d'enseignants de collèges et de lycées au sein de l'IREM de Toulouse et dans le cadre de la formation continue des enseignants.
- Je m'occupe chaque année d'un atelier Maths En Jeans (il s'agit de proposer des problèmes de recherche à des lycéens) en collaboration avec des enseignants du lycée Ozenne de Toulouse et du lycée Pierre-Paul Riquet de Saint-Orens ainsi que des collèges de Pamiers et de Tournefeuille.
- Je participe à un projet sciences au collège de Saint-Sulpice depuis 2004.
- Je participe à un club science et citoyen junior du CNRS depuis 2005.
- J'ai organisé la venue et l'animation de l'exposition "Un monde fractal" du 17 mars au 18 avril 2003.
- J'ai participé à l'organisation d'une projection d'images fractales sur l'Hôtel-Dieu à Toulouse lors du Printemps de septembre 2005.

Conférences et séminaires auxquels j'ai été invité à faire un exposé

1998	Colloque sur les systèmes dynamiques holomorphes à Luminy. Séminaire d'analyse, Yale University (USA). Séminaire de dynamique holomorphe, SUNY at Stony Brook (USA).
1999	Euroconférence in Mathematics in Crete; Holomorphic Dynamics; Anogia, Crete. Séminaire à l'université de Barcelone. Séminaire de dynamique holomorphe, Orsay.

- 2000 “First American Mathematical Society-Scandinavian International Mathematics Meeting”, Odense, Denmark.
 “Main speaker” à une conférence européenne: PhD Euro-conference on Complex Analysis and Holomorphic Dynamics, Platja d’Aro (Catalunya), Espagne.
 Séminaire de dynamique holomorphe, Orsay.
- 2001 Conférence “Holomorphic Dynamics and Related Topics”, Orléans.
 Séminaire de Systèmes Dynamiques de Jussieu, Paris.
 Conference: “One dimensional complex dynamics and related topics”, RIMS, Kyoto.
 Ecole Thématique du CNRS “Chirurgie holomorphe”, Institut Henri Poincaré.
- 2004 Séminaire d’analyse géométrique, Toulouse.
 Séminaire de Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques, LAGA, Université Paris 13.
 Complex Dynamics: Twenty-Five Years After the Appearance of the Mandelbrot Set, AMS-IMS-SIAM meeting at Snowbird, Utah, USA.
 5th AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, CalPoly, Pomona, Los Angeles, USA.
 Premier congrès Canada-France des sciences mathématiques.
 Séminaire de Systèmes Dynamiques de Jussieu, Paris.
 Séminaire Nicolas Bourbaki, Paris.
- 2005 Exposé dans le cadre de l’ACI jeunes chercheurs “Petits diviseurs et sommabilité dans les structures géométriques”, Toulouse.
 Conformal Dynamics, Hyperbolic Geometry, and Continued Fractions, CIRM, Marseille.
 Workshop on Holomorphic vector fields and quadratic differentials in complex dynamics, Holbaek, Danemark.
 Séminaire et Colloquium à l’université de Cornell (USA).
- 2006 Séminaire et Colloquium à l’Institut de mathématiques de Jussieu.
 Holomorphic dynamics Workshop, Fields Institute, Toronto, Canada.
 Séminaire Géométrie - Topologie - Dynamique, université Paris-Sud (Orsay)
 Conférence en l’honneur des 70 ans d’Adrien Douady : Disques de Siegel, implosion parabolique et aire des ensembles de Julia, Cergy.
- 2007 Conférence “Renormalization, small divisors, continued fractions and geodesic flows” au centre de recherche mathématiques Ennio de Giorgi à Pise.
 Mini-cours sur les ensembles de Julia de mesure positive dans le cadre d’une conférence organisée par le réseau européen CoDy (conformal geometry and dynamics).

- Exposé à Paris dans le cadre de l'ANR "Résonances".
- Février 2008 Journée thématique sur les espaces de teichmuller et l'itération de l'algorithme de Thurston à Cergy. Conférence sur les "Groups generated by automata" au centre Stefano Francini à Zurich.
Conférencier plénier dans le cadre du week-end de la Société Européenne de Mathématiques à l'université de Copenhague.
- Mars 2008 Co-organisateur de l'Arbeitsgemeinschaft d'Oberwolfach.
- Avril 2008 Conférence "Dynamical Systems and Topology" Tossa de Mar, Catalunya, Espagne.
- Juin 2008 Exposé dans le cadre de la session de systèmes dynamiques complexes du second congrès franco-canadien qui aura lieu à Montréal.
- Octobre 2008 Conférence "Trends and Developments in Complex Dynamics" à Oberwolfach.

Liste des publications

- [1] Xavier Buff and Adam Epstein.
From local to global analytic conjugacies.
Erg. Th. and Dyn. Sys., 27(4):1073–1094, 2007.
- [2] Xavier Buff and Tan Lei.
Dynamical convergence and polynomial vector fields.
Journ. Diff. Geom., 77(1):1–41, 2007.
- [3] Xavier Buff and Arnaud Chéritat.
How regular can the boundary of a quadratic Siegel disk be?
Proc. Amer. Math. Soc., 135(4):1073–1080, 2007.
- [4] Xavier Buff and Arnaud Chéritat.
The Yoccoz function continuously estimates the size of Siegel disks.
Annals of Math, 164(1):265–312, 2006.
- [5] Xavier Buff and Johannes Rueckert.
Virtual immediate basins of Newton maps and asymptotic values.
IMRN, Article ID 65498:1–18, 2006.
- [6] Xavier Buff, Nuria Fagella, Lukas Geyer, and Christian Henriksen.
Herman rings and Arnold disks.
Journal of the London Math. Soc., 72(2):689–716, 2005.
- [7] Xavier Buff.
La mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $P^k(C)$ [d'après Briend et Duval].
Séminaire Nicolas Bourbaki, (939), 2004.
- [8] Xavier Buff and Arnaud Chéritat.
Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive.

- C. R. Acad. Sci. Paris*, 341(11):669–674, 2005.
- [9] Artur Avila, Xavier Buff, and Arnaud Chéritat.
Siegel disks with smooth boundaries.
Acta Math., 193:1–30, 2004.
- [10] Xavier Buff and Arnaud Chéritat.
Upper bound for the size of quadratic Siegel disks.
Inv. Math., 156(1):1–24, 2003.
- [11] Xavier Buff and Christian Henriksen.
On König’s root-finding algorithms.
Nonlinearity, 16(3):989–1015, 2003.
- [12] Xavier Buff.
Virtually repelling fixed points.
Publ. Mat., 47(1):195–209, 2003.
- [13] Xavier Buff.
On the Bieberbach conjecture and holomorphic dynamics.
Proc. Amer. Math. Soc., 131(3):755–759 (electronic), 2003.
- [14] Xavier Buff and Adam L. Epstein.
A parabolic Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality.
Fund. Math., 172(3):249–289, 2002.
- [15] Xavier Buff.
On the zeros and critical points of a rational map.
Int. J. Math. Math. Sci., 28(4):243–246, 2001.
- [16] Xavier Buff, Christian Henriksen, and John H. Hubbard.
Farey curves.
Experiment. Math., 10(4):481–486, 2001.
- [17] Xavier Buff and Christian Henriksen.
Julia sets in parameter spaces.
Comm. Math. Phys., 220(2):333–375, 2001.
- [18] Xavier Buff.
Fibonacci fixed point of renormalization.
Ergodic Theory Dynam. Systems, 20(5):1287–1317, 2000.
- [19] Adrien Douady and Xavier Buff.
Le théorème d’intégrabilité des structures presque complexes.
In *The Mandelbrot set, theme and variations*, volume 274 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 307–324. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [20] Adrien Douady, Xavier Buff, Robert L. Devaney, and Pierrette Sentenac.
Baby Mandelbrot sets are born in cauliflowers.
In *The Mandelbrot set, theme and variations*, volume 274 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 19–36. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [21] Xavier Buff.
Geometry of the Feigenbaum map.
Conform. Geom. Dyn., 3:79–101 (electronic), 1999.

- [22] Xavier Buff and Christian Henriksen.
Scaling ratios and triangles in Siegel disks.
Math. Res. Lett., 6(3-4):293–305, 1999.
- [23] Xavier Buff, Jérôme Fehrenbach, Pierre Lochak, Leila Schneps, and Pierre Vogel.
Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs,
volume 7 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*.
Société Mathématique de France, Paris, 1999.
- [24] Xavier Buff.
Ensembles de Julia de mesure positive (d’après van Strien et Nowicki).
Astérisque, (245):Exp. No. 820, 3, 7–39, 1997.
Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.

Programme de recherche

Une bonne partie de mes travaux de recherche porte sur les problèmes de petits diviseurs et de linéarisation en dynamique à une variable complexe. Étant donnée une perturbation holomorphe d'une rotation, il s'agit de comprendre si les orbites restent bornées ou si au contraire, des comportements chaotiques apparaissent. Ces questions ont été abordées par Cremer, Siegel, Brjuno dans la première moitié du 20ème siècle. Dans les années 1980, Yoccoz a fait progresser de manière spectaculaire les résultats dans ce domaine, laissant en suspens quelques problèmes non résolus.

A. Bord des domaines de linéarisation

En 2001, j'ai démontré avec Artur Avila et Arnaud Chéritat [9] qu'il existe des polynômes quadratiques $P_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z + z^2$ ayant un domaine de linéarisation dont le bord est C^∞ . Puis, Arnaud Chéritat et moi [3] avons montré que l'on peut quasiment prescrire n'importe quelle régularité. Par exemple, pour tout $n \geq 0$, il existe des domaines de linéarisation dont le bord est C^n mais pas C^{n+1} .

- A1) Avec Artur Avila, je pense savoir généraliser les résultats obtenus pour la famille quadratique à toute famille de germes qui fixent l'origine et dont la partie linéaire est une rotation d'angle α , sous certaines hypothèses très raisonnables. La difficulté principale consiste à étudier le comportement d'applications holomorphes qui sont des perturbations de rotations dont l'angle n'est pas un nombre de Brjuno.
- A2) Je voudrais comprendre ce qui persiste de ces résultats lorsque l'on considère des difféomorphismes du cercle à la place des polynômes quadratiques. Les domaines de rotations sont alors des anneaux, et j'ai déjà obtenu des résultats partiels avec Nuria Fagella, Lukas Geyer et Christian Henriksen. Il s'agirait en partie de compléter ces travaux. Par exemple, parmi les fractionnelles

$$f_{a,b}(z) = bz \frac{1 - az}{1 - a/z}$$

l'ensemble des paramètres (a, b) pour lesquels $f_{a,b}$ possède un anneau de Herman fixe de nombre de rotation α donné est soit vide, soit isomorphe à un disque [6]. Nous lui avons donné le nom de "disque d'Arnold". Je voudrais étudier la régularité du bord des disques d'Arnold dans l'espace des paramètres et montrer que certains disques ont un bord C^∞ , tandis que d'autres ont un bord C^n mais pas C^{n+1} . Je pense savoir démontrer qu'il existe des disques d'Arnold à bord C^∞ , tels que chaque fraction rationnelle dans le bord d'un tel disque admet une courbe de Jordan invariante de classe C^∞ , la réunion de ces courbes de Jordan formant un tore de classe C^∞ .

- A3) Dans le même cadre que précédemment, je voudrais comprendre à quoi ressemble la limite d'une suite de disques d'Arnold. Peut-on trouver des hérissos dans l'espace des paramètres en utilisant des techniques similaires à celles développées par Pérez-Marco pour montrer l'existence de

hérissons (ce sont des compacts connexes totalement invariants non triviaux) pour certains polynômes quadratiques.

- A4) Les conjectures suivantes ne sont pas résolues. Soit Δ le disque de Siegel d'un polynôme quadratique. Tout voisinage de $\overline{\Delta}$ contient-il un cycle périodique pour le polynôme quadratique ? Le point critique est-il dans le bord de Δ si et seulement si le nombre rotation est un nombre satisfaisant la condition dite de Herman ? Le bord du disque de Siegel est-il toujours une courbe de Jordan ?

Afin d'étudier ces questions, je propose l'étude d'un système dynamique fibré :

$$\begin{pmatrix} z \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \left\| \frac{1}{\alpha} \right\| \log \frac{1 + 2\pi\alpha e^z}{1 + 2\pi\alpha} \\ \left\| \frac{1}{\alpha} \right\| \end{pmatrix}$$

où $\|1/\alpha\| \in [0, 1/2]$ désigne la distance de $1/\alpha$ à \mathbb{Z} . Ici, l'application est définie sur

$$\left\{ (z, \alpha) \mid \alpha \in]0, 1/2[\setminus \mathbb{Q} \text{ et } \frac{1 + 2\pi\alpha e^z}{1 + 2\pi\alpha} \in \mathbb{D} \right\}.$$

Pour chaque α , on peut étudier l'ensemble des (z, α) dont l'orbite est infinie. Si cet ensemble contient un demi-plan supérieur, la composante connexe de l'intérieur de cet ensemble qui contient le demi-plan joue un rôle analogue à celui du revêtement universel d'un disque de Siegel. Il est légitime de se poser des questions analogues aux conjectures mentionnées ci-dessus. Répondre à ces questions devrait être plus élémentaire que de traiter directement le cas des disques de Siegel des polynômes quadratiques.

- A5) Je voudrais également comprendre ce que l'on peut obtenir lorsque l'on considère des applications qui préservent l'aire au lieu de considérer des applications holomorphes. Combinant les deux, on peut étudier des applications birationnelles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ qui se restreignent à des difféomorphismes préservant l'aire dans le tore $S^1 \times S^1$, par exemple:

$$(z, w) \mapsto \left(wz \frac{1 - az}{1 - a/z}, w \frac{1 - az}{1 - a/z} \right)$$

qui pour a proche de 0 est une perturbation de l'application $(z, w) \mapsto (wz, w)$ qui induit la rotation $z \mapsto wz$ sur le cercle $w = \text{cste}$. Un cas dégénéré correspondant à $a = 0$ après changement d'échelle est l'application :

$$F(z, w) = (wz(1 + z), w(1 + z))$$

qui est déjà très riche en problèmes à étudier. Dans ce contexte, est-il possible de trouver des cercles invariants sur lesquels la dynamique est conjuguée à une rotation, la conjugaison étant de classe \mathbb{C}^∞ sans être \mathbb{R} -analytique ?

B. Taille des domaines de linéarisation

En 2002, j'ai résolu avec Chéritat une conjecture de Yoccoz concernant la taille des domaines de linéarisation des polynômes quadratiques $P_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z + z^2$. Yoccoz avait donné une minoration de la taille de ces domaines en fonction des propriétés arithmétiques de α . Plus précisément, Yoccoz a introduit une fonction $\Phi(\alpha)$ définie à partir de la décomposition en fractions continues de α , et il a montré que si on note $r(\alpha)$ le rayon de convergence de la série formelle qui conjugue la rotation d'angle α au polynôme quadratique, alors $\Phi(\alpha) + \log r(\alpha) > C_0$ pour une constante universelle C_0 . Yoccoz conjecturait que cette minoration était optimale et nous avons montré [10] qu'en effet, $\Phi(\alpha) + \log r(\alpha) < C_1$ pour une constante universelle C_1 . En 2003, nous avons affiné notre résultat [4], répondant à une conjecture de Marmi: la fonction $\Phi(\alpha) + \log r(\alpha)$ est uniformément continue.

- B1) Nous étudions actuellement une conjecture de Marmi-Moussa-Yoccoz qui dit que la fonction $\Phi(\alpha) + \log r(\alpha)$ est Hölder d'exposant $1/2$. Arnaud Chéritat et moi pensons savoir démontrer que pour tout $\delta > 1/2$, cette fonction n'est Hölderienne d'exposant δ sur aucun intervalle. De même, elle n'est à variation bornée sur aucun intervalle.
- B2) En m'inspirant de travaux de Yoccoz et de Pérez-Marco, dans ma thèse d'habilitation, je donne une démonstration élémentaire du résultat suivant. Si $P(z) = e^{2i\pi\alpha}z + z^2$ a un disque de Siegel, alors toute application f univalente dans le disque unité, fixant 0 avec dérivée $e^{2i\pi\alpha}$ a un disque de Siegel dont le rayon conforme $r(f)$ vérifie $r(f) \geq \frac{1}{10}r(P)$. Les techniques présentées permettent de contrôler le rayon conforme des disques de Siegel pour d'autres familles de polynômes, par exemple, la famille des polynômes $z^d + c$ avec $c \in \mathbb{C}$ (et d un entier ≥ 2).

- B3) Dans la famille

$$f_{a,t}(z) = e^{2i\pi t} z \frac{1 - az}{1 - a/z}$$

on peut étudier pour a et t réels, les langues d'Arnold. Pour chaque nombre de rotation p/q , et pour chaque $a > 0$, l'ensemble des $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour lesquels $f_{a,t} : S^1 \rightarrow S^1$ a nombre de rotation p/q , est un intervalle de longueur $\ell_{p/q}(a)$. Lorsque $a \rightarrow 0$, $\ell_{p/q}(a) \sim C_{p/q} a^q$ et je voudrais comprendre comment se comporte la constante $C_{p/q}$ en fonction de p/q . Je pense qu'il y a un lien très fort avec la taille des domaines de linéarisation des polynômes quadratiques. Je voudrais également comprendre comment se comporte $\ell_{p_n/q_n}(a)$ pour a fixé, lorsque p_n/q_n sont les réduites d'un nombre irrationnel α . Je pense que si $f_{a,t}$ a un anneau de Herman de nombre de rotation α , les longueurs $\ell_{p_n/q_n}(\alpha)$ décroissent exponentiellement vite, la décroissance exponentielle étant contrôlée par le module de l'anneau de Herman.

C. Implosion parabolique

Une autre partie de mes travaux porte sur l'étude des perturbations de germes tangents à l'identité: l'implosion parabolique. Il est à noter que ces travaux ne sont pas disjoints des travaux cités ci-dessus.

- C1) J'ai obtenu récemment en collaboration avec Tan Lei [2] des résultats qui permettent de généraliser partiellement des travaux de McMullen sur la continuité de la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Julia de fractions rationnelles au voisinage d'une fraction rationnelle *géométriquement finie* ayant des points périodiques paraboliques. Nous généralisons un résultat de McMullen dans le cas des perturbations *radiales*. J'aimerais comprendre si on peut généraliser les résultats de McMullen dans le cas des perturbations *horocycliques*.
- C2) Toujours dans le domaine de l'implosion parabolique, je suis actuellement en train de travailler en collaboration avec Adam Epstein pour comprendre certains résultats d'Écalle. Ce que nous essayons de faire, c'est de traduire les travaux d'Écalle dans le langage de l'implosion parabolique utilisé par des chercheurs tels que Douady, Hubbard, Shishikura, etc... Nous expliquons notamment comment se comporte le développement en série de Fourier des applications de cornes de $f_A(Z) = Z + 1 + A/Z$ lorsque $A \rightarrow 0$. Chaque coefficient de Fourier est une fonction entière de A , d'ordre 1, dont le développement en série entière par rapport à A s'exprime de manière complètement explicite en fonction des coefficients de Fourier de $\cot(\pi Z)$ et de ses dérivées ainsi que des fonctions multizetas

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_p) := \sum_{0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_p^{s_p}}.$$

Ces techniques devraient permettre de démontrer des résultats concernant certains enrichissement dans l'espace de paramètres des fractions rationnelles quadratiques. Par exemple, la limite au sens de Hausdorff, lorsque $q \rightarrow +\infty$, des lieux de bifurcations pour les fractions rationnelles

$$f_{A,q}(Z) = e^{2i\pi/q} \cdot (Z + 1 + A/Z).$$

D. Aire des ensembles de Julia

Avec Arnaud Chéritat, nous avons montré [8] qu'il existe des polynômes quadratiques ayant des ensembles de Julia de mesure de Lebesgue strictement positive. Ces exemples apparaissent en particulier dans la famille des polynômes :

$$P_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha} z + z^2 \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Un problème qui se pose maintenant est de savoir s'il existe des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que P_α ne soit pas linéarisable et tels que la mesure de Lebesgue de l'ensemble de Julia $J(P_\alpha)$ soit nulle. John H. Hubbard a posé les deux questions suivantes qui sont liées à ce problème.

- D1) Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel la mesure de Lebesgue de l'ensemble de Julia rempli $K(P_\alpha)$ est nulle ?
- D2) Existe-t-il une constante $c > 0$ minorant la mesure de Lebesgue de $K(P_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$?
- D3) Je souhaiterais également comprendre si la fonction qui à $\alpha \in \mathbb{R}$ associe la mesure de Lebesgue de $K(P_\alpha)$ est continue aux $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dans sa thèse, Arnaud Chéritat montre qu'elle n'est pas continue aux $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Projet

A court terme, je dois rédiger plusieurs résultats que je pense savoir démontrer:

- A1) avec Artur Avila
- A2) avec Chéritat, Fagella et Henriksen
- B1) et B2) avec Chéritat
- C2) avec Adam Epstein.

Je vais parachever la rédaction de l'existence d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue non nulle avec Chéritat. J'ai fait une première rédaction dans ma thèse d'habilitation. Nous sommes en train de "nettoyer" cette rédaction, et nous pensons pouvoir soumettre un article pour publication dans les mois qui viennent.

A moyen terme, je souhaite étudier

- A3) avec Pascale Roesch,
- A4) avec Kingshook Biswas (qui était post-doctorant à Toulouse l'an dernier) et
- B3) avec Kuntal Banerjee (qui fait sa thèse sous ma direction).

A plus long terme, je souhaite étudier A5), C1), D1), D2), D3). J'ai quelques idées pour débloquer la situation, mais une plus longue réflexion est nécessaire.