Surfaces branchues

Pierre Arnoux, Xavier Bressaud, Arnaud Hilion

27 octobre 2011

Abstract

L'objectif est de définir un objet sur lequel faire vivre simultanement un automorphisme de groupe libre et les deux actions (de pseudo-groupes) associées à ses arbres attractifs et répulsifs. Pas encore bien clair à quoi ça peut servir...

1 Le cas des surfaces

2 Présentation

Pour différentes raisons, on va s'intéresser à l'automorphisme :

$$\alpha : \begin{array}{ccc} a & \to & ab \\ b & \to & c \\ c & \to & a. \end{array}$$

Mais on espère que ce qu'on va dire peut s'adapter à un cadre plus large. C'est une substitution Pisot qu'on connait bien, dont le fractal de Rauzy est raisonnablement simple dont on a déjà étudié les arbres. En outre, il est parag\'eométrique : l'un de ses arbres est un intervalle ; l'autre est un arbre (mais pas un arbre fini). L'un des avantages de celui-ci est que son inverse :

$$\alpha^{-1} : \begin{array}{ccc} a & \to & c \\ b & \to & c^{-1}a \\ c & \to & b. \end{array}$$

est sous forme train track efficace sans qu'on ait besoin de changer d'alphabet. Les matrices sont les suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais pour l'inverse, le taux de croissance sur le train track est donné par :

$$|M^{-1}| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les polynomes sont $X^3 - X^2 - 1$, $X^3 + X - 1$ et $X^3 - X - 1$.

3 La translation d'intervalles

Soit α la racine réelle (inferieure à 1) de $X^3 + X - 1$. Sur $I = [0, 1]$, on considère les intervalles $I_{a^{-1}} = [0, \alpha^4]$, $I_{b^{-1}} = [0, \alpha^3]$, $I_{c^{-1}} = [0, \alpha^2]$ et $I_a = [1 - \alpha^4, 1]$, $I_b = [\alpha - \alpha^3, \alpha]$ et $I_c = [1 - \alpha^2, 1]$. On considère le système d'isométries reliant I_k à $I_{k^{-1}}$ par translation. Les translation en jeu sont $T_a = \pm(1 - \alpha^4)$, $T_b = \pm\alpha(1 - \alpha^2)$ et $T_c = \pm(1 - \alpha^2)$. Lorsqu'on induit sur $[0, \alpha]$, les choses se passent bien :

Il faudrait un petit dessin. Bon, on peut voir l'induction à la main. La bande a^{-1} partant de $[0, \alpha^4]$ se retrouve integralement au dela de $[0, \alpha]$. On decoupe alors la bande c qui nous ramène entre $0 + (1 - \alpha^4) - (1 - \alpha^2) = \alpha^2 - \alpha^4$ et α^2. La bande b^{-1} n'est pas touchée par cette induction. La bande c^{-1} revient partiellement dans $[0, \alpha]$ En effet sur $[0, \beta]$ on fait $+(1 - \alpha^2)$; ainsi si $\beta + 1 - \alpha^2 = \alpha$; donc $\beta = \alpha^2 + \alpha - 1 = \alpha^2 - \alpha^3 = \alpha^2(1 - \alpha) = \alpha^5$. Le reste de la bande est en partie utilisé (dans l'autre sens pour le retour de la bande a^{-1} et en partie envoyée dans la partie "vide" entre α et $1 - \alpha^2$; cette dernière partie "disparait" dans l'induction). Est-ce compréhensible ?

Ainsi le systeme induit est composé des bandes : $J_{a^{-1}} = [0, \alpha^5], J_a = [1 - \alpha^2, \alpha]$; $J_{b^{-1}} = [0, \alpha^4]$, $J_b = [\alpha^2 - \alpha^4, \alpha^2]$ et $J_{c^{-1}} = I_{b^{-1}}$, $J_c = I_b$. On se rappelle qu'il y a aussi une "bande morte" partant de $[\alpha^5, \alpha^2 - \alpha^4]$ qui ne "revient" pas dans $[0, \alpha]$. S'il n'y a pas de coquilles, hors cette bande, ce système est une copie retrécie d'un facteur α du système initial.

4 Construction

L'idée est la suivante :

On distingue un intervalle I vertical. Avec une action par translations (isométries partielles). Sur l'intervalle, trois intervalles I_a, I_b et I_c, respectivement envoyés sur $I_{a^{-1}}$, $I_{b^{-1}}$ et $I_{c^{-1}}$ (système de bandes). Partant d'un point x de cet intervalle, on peut regarder l'ensemble des suites d'actions qu'on peut appliquer à x (en évitant les retours en arrière). Cela forme un "arbre de Cayley" indexé par des mots réduits... Une des choses intriguantes : quels sont ces graphes à chaque "étage" x ? On pourrait expérimenter puisque dans certains cas on connait la dynamique. Mais je ne crois pas avoir vu de dessin. On a une idée de la "réunion de ces graphes" : ça ressemble à l'arbre réel qui va venir...

Remark 1 (Probablement imbittable sans précisions)**.** *On avait l'impression que certaines branches arrivent au meme endroit dans l'abelianisé et que donc elles devraient arriver à des hauteurs differentes. Mais ce n'est pas tout à fait ça (puisqu'evidemment si l'abelianisé est le meme, on a fait la meme chose dans la verticale). Donc pour que ces points soient distincts, il faut que les points de départ soient distincts i.e. que les branches en questions n'existent en entier qu'à des hauteurs distinctes.*

Sur l'horizontale, on a un arbre réel T (le coeur compact). Mais c'est un objet un peu "global" (pour le definir on a fait une sorte de quotient par la verticale). En tous cas sur cet objet on définit une dynamique : un échange de morceaux. On se rappelle bien sûr que cet arbre s'envoie assez naturellement sur le fractal de Rauzy.

On rappelle que l'automorphisme agit par homothétie sur les deux "arbres". Le rapport est lié aux diverses valeurs propres...

Ainsi on a envie de faire une sorte de produit de ces deux objets, la verticale et l'arbre réel. Pour l'instant, l'idée est de regarder la verticale munie à chaque étage de ce graphe G_x (arborescent) qui decrit l'action sur le point x. On peut pour visualiser les superposer astucieusement. Et accessoirement faire en sorte que les projections des aretes a, b et c

coincident avec le fractal (ou plutôt le pavage apériodique) en bas. Ceci peut facilement etre precisé. Cela aiderait si on voyait bien le pavage "en dessous" parce que ca nous dirait mieux comment "replier" proprement. Well, à chaque sommet du graphe, on peut mettre une copie de la verticale (revetement universel du systeme de bandes : si on identifie le point au bout de l'arete a de G_x avec le point $a.x$ de la verticale, on retrouve le systeme de bandes).

Bon, partant de là, qu'est-ce qu'on fait ? On veut plus ou moins induire. Pour l'instant la proposition est d'appliquer l'homothétie à l'intervalle I : on recupère un sous intervalle $\tilde{I}$ de taille $\alpha|I|$ autour du point fixe. On ne regarde que les graphes G_x pour $x \in \tilde{I}$. On a envie de "couper" ce graphe aux sommets qui "reviennent" dans $\tilde{I}$. Ce qui reste autour de l'origine est un arbre (puisque G_x en est un). Les branches "mortes" i.e. qui ne reviennent pas dans $\tilde{I}$ sont à garder ; elle correspondent à des actions qui arrivent dans la partie du systeme de bande avec une seule bande (peu importe). Normalement, on doit pouvoir contracter ce graphe de maniere a ramener ses bouts (ceux qui atteignent $\tilde{I}$) sur des sommets a distance 1 dans le graphe initial (?). Ou pas exactement. On veut appliquer l'automorphisme (son inverse ?) pour envoyer cette tranche sur le graphe initial. Il semble que ça devrait plus ou moins le recouvrir tout en lui "rajoutant" des branches mortes. On contracte l'horizontale et on dilate la verticale. Pour verifier que cette histoire se passe correctement, il faut faire un petit calcul formel. Dans un cas ou on connait tout ou abstraitement. Voire.

Essayons. Je regarde un $x \in I$. J'appelle $y = \sigma^{-1}(x) \in \tilde{I}$. On lui assoicie tous les trajets qu'il peut faire : G_x. On regarde la même chose pour y, G_y. A priori il y a un rapport entre les deux. Genre $G_y = \sigma^{-1}(G_x)$. Je veux dire quelque chose sur les mots dans ces graphes (c'est more or less l'application Q, mais comment ça agit sur les mots finis ?) J'ai l'impression que si on regarde les mots finis de G_x, leur image par σ^{-1} doit etre un mot de G_y, (a priori) plus long. Ici on doit pouvoir se contenter des mots de une lettre. Si c'est OK, il faut comprendre que les images (par les σ^{-1}(lettre)) de y doivent elles aussi être dans $\tilde{I}$. Donc ca va bien gazer avec l'induction. Et ce qu'on fait c'est qu'on ramene les branches mortes autour de ces bouts d'orbites de retour à $\tilde{I}$ autour des branches qui partaient de x.

Plus loin il faut aller. On itère la procédure. Est-ce que ça va converger vers quelque chose. Est-ce que les problemes de non fermeture du $\widetilde{\Omega}$ vont poser problème ? Ou au contraire est-ce que ça va bien s'emmancher ? Normalement, l'objet limite devrait être invariant par l'opération d'induction/renormalisation. L'objet qu'on recupère est-il un peu "continu" ou pas du tout. Comment est "le" cantor correspondant à Ω ? Que dire du "flot" vertical ? A priori on a pas de verticale continue partout. Le recollage est-il naturel ? Aurait-on pu faire la construction à l'envers ?

Autour de x on a superposé tous les arbres autour des $\sigma^{-n}(x)$ mais renormalisés par σ^{-n} qui contracte dans ce sens là. .

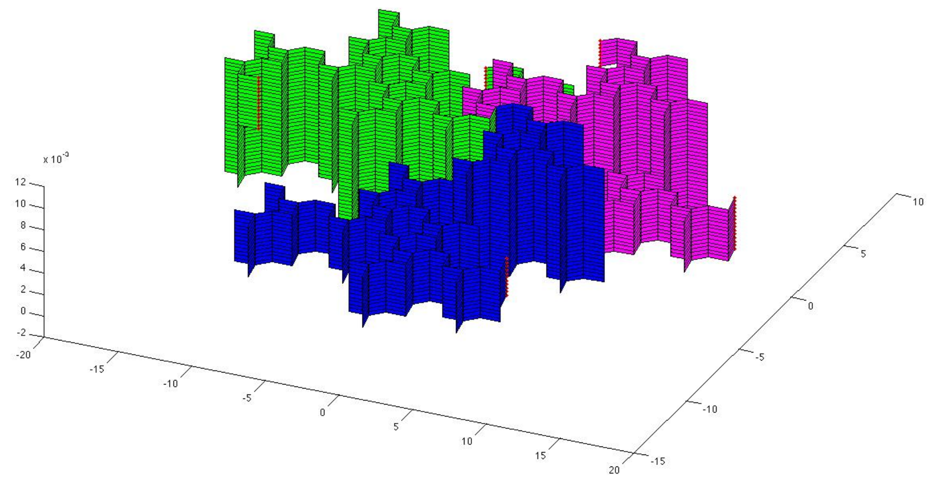

FIGURE 1 – Branches correspondant à l'induction sur $\tilde{I} = [0, \alpha^{12}]$. Les couleurs correspondent à la branche de dpart. Le rouge au retours dans $\tilde{I}$.

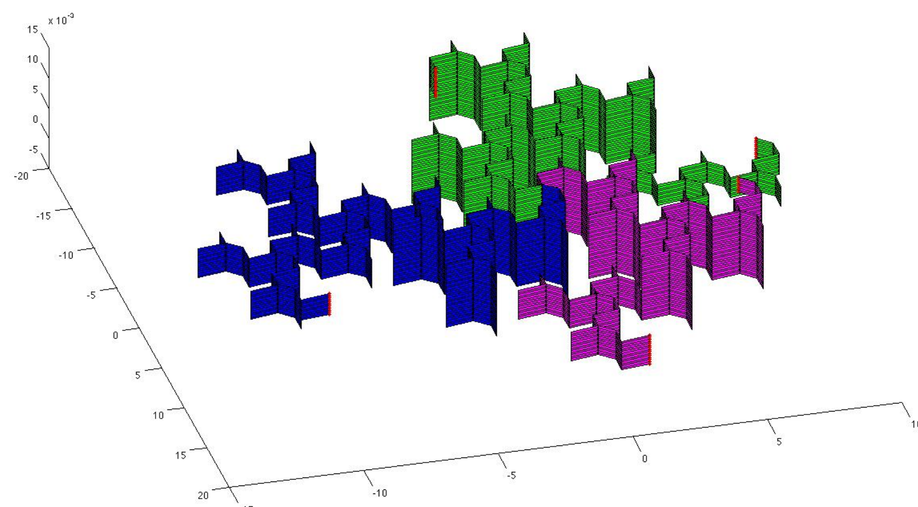

FIGURE 2 – Autre angle

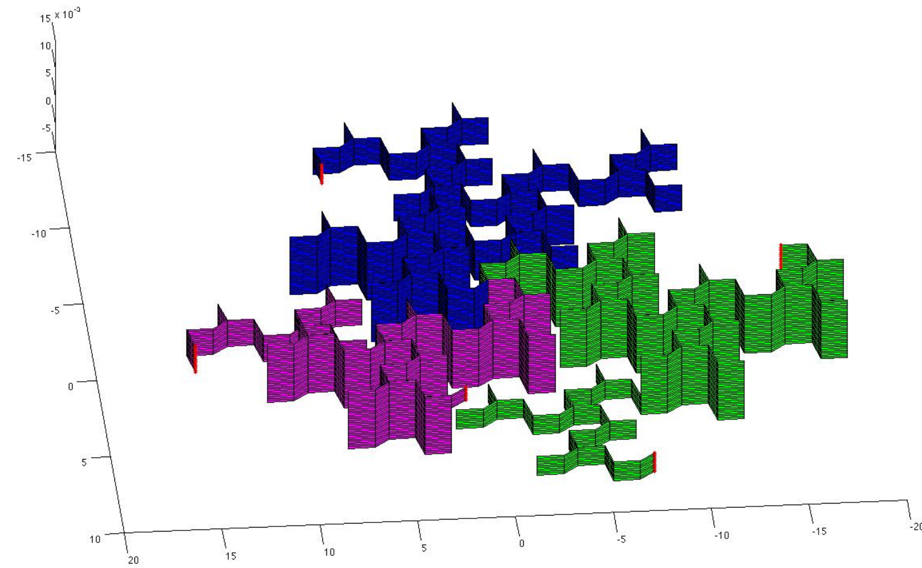

FIGURE 3 – Autre angle

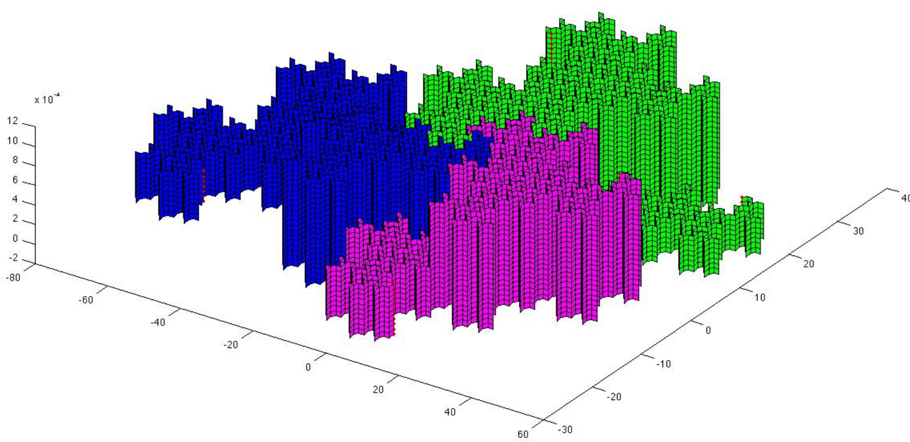

FIGURE 4 – Branches correspondant à l'induction sur $\tilde{I} = [0, \alpha^{18}]$