Convergence de certaines classes de superprocessus vers des processus de Dawson-Watanabe

Bastien Mallein
sous la direction d'Edwin A. Perkins

8 septembre 2010
traduit le 7 juin 2011

Résumé

Nous étudions ici la convergence de certains processus de particules vers des super-processus de Dawson-Watanabe, en utilisant la convergence de leurs dérivées de Radon-Nikodým par rapport à la loi de la marche aléatoire branchante, comme l'ont fait Lalley et Zheng dans leur article [?] pour les processus SIR en dimension 2 et 3. Les processus que nous étudierons de cette manière sont les marches aléatoires branchantes avec dérive, les processus de contact, le modèle du voteur et les modèles de Lotka-Volterra.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce rapport, et en particulier Ed Perkins, qui m'a présenté ce sujet, pour la patience et le temps dont il a usé avec moi. Je remercie aussi Max Fathi pour sa relecture attentive, ainsi que Jean-François Le Gall, qui m'a offert cette opportunité de partir en stage à UBC.

Table des matières

1 Introduction

Les processus de particules que nous étudierons par la suite sont des processus de naissance et de mort de particules. Ce sont des processus qui peuvent évoluer de la façon suivante : chaque particule peut donner naissance à un certain nombre d'enfants en un site voisin du sien, ou mourir. Ces processus évoluent sur le réseau $\mathbb{Z}^d$. Le taux auquel une particule située sur le site x donne naissance ou meurt ne dépend que du nombre de particules situées en x et du nombre de particules dans un voisinage de x.

Nous allons maintenant introduire quelques notations et du vocabulaire que nous utiliserons tout au long de ce rapport. Pour commencer, précisons l'heuristique des processus de particules à travers deux définitions. Nous nous intéresserons en effet à la fois à des processus à temps continu et à temps discret, les problèmes se posant dans chacun des cas sont voisins, mais différents. Il est donc intéressant de dresser un parallèle entre ces deux types de processus.

Nous notons p un noyau de marche aléatoire symétrique irréductible sur $\mathbb{Z}^d$, vérifiant :

$$p(0) = 0 \text{ et } \sum_x x^i x^j p(x) = \delta_{i,j}\sigma^2 < +\infty,$$

qui représente la manière selon laquelle les particules se déplacent sur le réseau. Pour toute fonction bornée $\phi : Z^d \to \mathbb{R}$, nous notons $P\phi(x) = \sum_e p(e)\phi(x+e)$ la moyenne locale de ϕ par rapport à p.

Définition 1.1. Un système de particules à temps continu, de noyau p, taux de naissance b_t et taux de mort k_t est un processus de Markov $\xi_t : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$, tel que $\xi_t(x)$ représente le nombre de particules présentes en x à l'instant t. Cette population croit si un voisin produit un enfant en x, et décroit si une particule située en x meurt. Les deux taux $b_t(x)$ et $k_t(x)$ auxquels ces évènements se produisent sont des fonctions de $x, t, \xi_{t-}(x)$ et $V_{t-}(x) = \sum_e p(e)\xi_{t-}(x+e)$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{cases} \xi_t(x) \to \xi_t(x) + 1 \text{ à taux } V_t(x)b_t(x) \\ \xi_t(x) \to \xi_t(x) - 1 \text{ à taux } \xi_t(x)k_t(x). \end{cases}$$

Définition 1.2. Un système de particules à temps discret, de noyau p, et distribution du nombre d'enfants Π est une chaine de Markov $\xi_n : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$, tel que $\xi_n(x)$ représente le nombre de particules présentes en x à l'instant n. La probabilité $\Pi_{n,x}(.)$ sur $\mathbb{N}$ est une fonction de $n, x, \xi_n(x)$ et $V_n(x) = \sum_e p(e)\xi_n(x+e)$, et représente le nombre d'enfants produits à la génération n par les individus en x. Nous pouvons réécrire ceci de la manière suivante :

$$\xi_{n+1}(x) = k \text{ avec probabilité } \Pi_{n,x}(k).$$

Remarque 1.1. Il existe quelques différences dans nos définitions des modèles à temps continu ou à temps discret. Dans le premier cas, nous donnons deux taux différents qui jouent tous deux un rôle à la fois sur la vitesse à laquelle le processus évolue (doubler b_t et k_t revient à considérer $(\xi_{2t}, t \geq 0)$) ; et sur le nombre d'enfants d'un individu donné avant sa mort (grossièrement, si b_t et k_t restent constants durant toute la vie de la particule, le nombre d'enfants de celle-ci suit une loi géométrique de paramètre $\frac{b_t(x)}{b_t(x)+k_t(x)}$, donc doubler b_t et k_t ne change rien).

Dans le modèle à temps discret, nous ne tenons compte que du nombre d'enfants produit en chaque site, sous-entendu par les individus des sites voisins. Les variations de vitesse du processus peuvent être introduites par la suite, par mise à l'échelle, en considérant qu'une étape en position x à l'instant t correspond à un saut dans le temps de $\gamma_n \sim b_n + k_n$, à condition que cette quantité soit sensiblement la même à proximité de toutes les particules en vie à l'instant n.

Nous allons maintenant définir le type de processus limites que nous espérons pouvoir trouver, les super-processus de Dawson-Watanabe, comme processus à valeurs dans l'espace $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.3. Un super-processus de Dawson-Watanabe de taux de branchement $\gamma > 0$, de dérive $\theta_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, de coefficient de diffusion σ^2, issu de $X_0 \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ est un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, adapté et presque sûrement continu sur un espace de probabilité muni d'une filtration complète $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, qui résout le problème de martingales suivant :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d), M_t(\phi) = X_t(\phi) - X_0(\phi) - \int_0^t X_s(\gamma\frac{\sigma^2\Delta\phi}{2})ds - \int_0^t X_s(\theta_s\phi)ds \tag{1}$$

est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue issue de 0 et de variation quadratique :

$$\langle M(\phi)\rangle_t = \gamma\int_0^t X_s(\phi^2)ds.$$

L'existence et unicité en loi de la solution de ce problème de martingales est bien connue, posons $\mathbb{P}_{X_0}^{\gamma,\theta,\sigma^2}$ la loi de cette solution sur $\Omega_{X,D} = \mathcal{D}([0,+\infty[,\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d))$ l'ensemble des fonctions càdlàg à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.2. Un processus de Dawson-Watanabe sans dérive peut aussi être appelé super-mouvement Brownien.

Dans ce rapport, nous essaierons de prouver la convergence de certaines suites de processus de particules, convenablement renormalisées, vers des processus de Dawson-Watanabe de la manière suivante. Nous allons calculer la dérivée de Radon-Nikodým du processus de particules que nous étudions contre un autre processus de particules pour lequel la convergence vers un super-processus est connue. Nous nous intéresserons ensuite à la convergence de la suite de dérivées de Radon-Nikodým, et essaierons de prouver que la limite est la dérivée de Radon-Nikodým d'un super-processus de Dawson-Watanabe par rapport à un autre. Le lemme suivant nous permettra de finir les preuves.

Lemme 1.1. *Soit X_n, X des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique E toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, et soit L_n, L des variables aléatoires réelles positives sur ce même espace, de moyenne 1.*

On pose $\mathbb{Q}_n, \mathbb{Q}$ les probabilités sur $(\Omega,\mathcal{F})$ de dérivée de Radon-Nikodým respective L_n et L par rapport à X_n et X sous la loi $\mathbb{P}$, si on a :

$$(X_n, L_n) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} (X, L),$$

alors les $\mathbb{Q}_n$-distributions de W_n convergent faiblement vers la $\mathbb{Q}$-distribution de X.

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{C}_b(E)$, par définition on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}(\phi(X_n)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_n\phi(X_n)).$$

Comme $(X_n, L_n) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} (X, L)$, nous avons, pour tout $A > 0$,

$$\mathbb{E}((L_n \wedge A)\phi(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}((L \wedge A)\phi(X)).$$

De plus, comme $\mathbb{E}(L_n) = 1$, et $L_n \geq 0$, nous obtenons :

$$\mathbb{E}(|L_n \wedge A - L_n|) = \mathbb{E}((L_n - A)\mathbf{1}_{\{L_n > A\}}) = 1 - A - \mathbb{E}((L_n - A)\mathbf{1}_{\{L_n \leq A\}}),$$

converge vers $\mathbb{E}(|L \wedge A - L|)$ quand $n \to +\infty$. Nous pouvons donc calculer :

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n\to+\infty} |\mathbb{E}(L_n\phi(X_n) - L\phi(X))| \\
\leq \; & \limsup_{n\to+\infty} \|\phi\|_\infty \mathbb{E}(|(L_n \wedge A) - L_n| + |(L \wedge A) - L|) \\
\leq \; & 2\|\phi\|_\infty \mathbb{E}(|(L \wedge A) - L|).
\end{aligned}$$

On conclut en faisant tendre A vers $+\infty$. □

Nous avons maintenant besoin d'un processus de particules dont la limite est bien connue, que nous pourrons utiliser comme loi de référence par rapport à tous les autres processus. Le processus que nous choisirons sera la marche aléatoire branchante. Une marche aléatoire branchante est le plus simple des processus que nous avons défini plus haut. Pour le modèle continu, cela revient à prendre les taux de naissance et de mort tous deux égaux à une même constante γ.

Définition 1.4. Une marche aléatoire à temps continu et taux γ et de noyau p est un processus de Markov $\xi_t : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ qui évolue de la manière suivante :

$$\begin{cases} \xi_t(x) \to \xi_t(x) + 1 \text{ à taux } \gamma V_t(x) \\ \xi_t(x) \to \xi_t(x) - 1 \text{ à taux } \gamma \xi_t(x). \end{cases}$$

Afin de prouver la convergence des processus de particules que nous étudierons vers des super-processus de Dawson-Watanabe, nous les renormaliserons en temps, espace et masse, et nous ne tiendrons compte que de la densité de particules au voisinage d'un point. Plus précisément, si ξ^N est une suite de marches aléatoires branchantes de taux γN, nous définissons la suite de processus à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ suivante :

$$X_t^N = \frac{1}{N} \sum_x \xi_t^N(x) \delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Le support de X_t^N est inclus dans le réseau renormalisé $Z_N^d = \frac{\mathbb{Z}^d}{\sqrt{N}}$. La convergence en loi de cette suite de processus à valeurs dans les espaces de mesure est étudiée dans le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Dawson-Watanabe)**.** *Si* $X_0^N \underset{N \to +\infty}{\Longrightarrow} \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ *alors :*

$$X^N \underset{N \to +\infty}{\Longrightarrow} X,$$

où X *est un super-mouvement Brownien de distribution initiale* μ *de taux* 2γ *et de diffusion* σ^2*. La convergence dans* $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ *est la convergence faible des mesures.*

On peut prouver le même type de résultat avec des marches aléatoires branchantes à taux discret.

Définition 1.5. Une marche aléatoire à temps discret de noyau p est une chaine de Markov $\xi_n : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ qui évolue de la manière suivante :

$$\xi_{n+1}(x) = k \text{ avec probabilité } e^{-V_n(x)} \frac{(V_n(x))^k}{k!}.$$

En d'autres termes, c'est un processus de particules à temps discret pour lequel à chaque étape, toutes les particules meurent en donnant naissance à un nombre d'enfants défini par la distribution suivante :

$$\Pi_{n,x}(k) = e^{-V_n(x)} \frac{(V_n(x))^k}{k!}.$$

Remarque 1.3. Nous avons ici choisi d'utiliser un modèle pour lequel la distribution des enfants suit une loi de Poisson pour simplifier les futurs calculs. D'autres lois peuvent néanmoins être utilisées, comme une distribution géométrique, plus proche du modèle à temps continu, mais les calculs deviennent alors plus complexe.

Soit ξ^N une suite de marches aléatoires à temps discret à taux 1, nous considérons le processus renormalisé accéléré d'un facteur γN suivant :

$$X_t^N = \frac{1}{N} \sum_x \xi_{\lfloor \gamma N t \rfloor}^N(x) \delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

On peut encore étudier la convergence de (X^N).

Théorème 1.2 (Dawson-Watanabe). *Si $X_0^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, alors on a :*

$$X^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} X,$$

où X est un super-mouvement Brownien de taux de branchement γ et de diffusion σ^2.

Remarque 1.4. La disparition du facteur 2 dans le taux de branchement du processus limite est naturel, si nous nous souvenons des règles de correspondance entre les processus à temps continu et discret. Une multiplication par γ des deux taux de naissance et de mort dans la marche aléatoire branchante à temps continu correspond à une accélération de taux 2γ dans son pendant à temps discret.

2 Dérivée de Radon-Nikodým des processus de particules

2.1 Sur les processus de particules à temps continu

2.1.1 Quelques notations utiles

Nous allons définir quelques quantités, valables pour tous ces systèmes de particules, qui nous seront utiles par la suite, quand nous voudrons calculer les dérivées de Radon-Nikodým.

Pour commencer, nous allons caractériser un processus de particules par un ensemble dénombrable de variables aléatoires dont la loi jointe sera facile à calculer.

Proposition 2.1. *Soit X_t un système de particules de taux de naissance b_t et de taux de mort k_t, nous notons :*

- $T_0 = 0$ *et* $T_{n+1} = \inf\{t > T_n | X_t \neq X_{T_n}\}$ *;*
- $t_n = T_{n+1} - T_n$ *;*
- $x_n \in \mathbb{Z}^d$ *tel que* $X_{T_{n+1}}(x_n) \neq X_{T_n}(x_n)$ *qui est unique presque sûrement ;*
- $\delta_n = X_{T_{n+1}}(x_n) - X_{T_n}(x_n) \in \{-1, 1\}$.

Dans ce cas, connaissant $\mathcal{F}_{T_n}$, la loi jointe de (t_n, x_n, δ_n) est donnée par

$$\mathbb{P}(t_n \in [t, t+dt[, x_n = x, \delta_n = 1 | \mathcal{F}_{T_n}) = \exp\left(-\int_{T_n}^t X_{T_n}(Pb_s + k_s) ds\right) P(X_{T_n})(x) b_{T_n+t-}(x) dt,$$

$$\mathbb{P}(t_n \in [t, t+dt[, x_n = x, \delta_n = -1 | \mathcal{F}_{T_n}) = \exp\left(-\int_{T_n}^{t} X_{T_n}(Pb_s + k_s)ds\right) X_{T_n}(x) k_{T_n+t-}(x)dt.$$

De plus, il existe une bijection continue entre $(X_{t\wedge T_n}, t \geq 0)$ *and* $(t_k, x_k, \delta_k, 0 \leq k < n)$.

Preuve. Nous allons utiliser la propriété de Markov, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(t_n \in [t, t+dt[, x_n = x, \delta_n = \delta | \mathcal{F}_{T_n}) = \mathbb{P}^{X_{T_n}}(t_0 \in [t + T_n, t + T_n + dt[, x_0 = x, \delta_0 = \delta).$$

Ensuite, pour déterminer quand, où et de quel type est le premier évènement, il suffit d'utiliser le "Lemme des réveils".

La dernière affirmation est évidente. □

Nous connaissons maintenant une façon de construire un processus de particules de naissance et de mort. Il nous suffit de construire cet ensemble continu de variables aléatoires, les unes après les autres.

2.1.2 Dérivée de Radon-Nikodým des processus de particules à temps continu

Proposition 2.2. *Soit* $\mathbb{P}$ *la loi d'un système de particules de taux de naissance* b_t*, de taux de mort* k_t*, et* $\mathbb{Q}$ *la loi d'une modification de ce processus de particules avec taux* $b_t(1+\alpha_t)$ *et* $k_t(1+\beta_t)$*, où* α, β *sont des fonctions continues bornées sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}^d$*. La dérivée de Radon-Nikodým du processus jusqu'à l'instant* t *peut s'écrire :*

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}(X) &= \exp\left\{-\int_0^t X_s(P(b_s\alpha_s) + k_s\beta_s)ds)\right\} \\ &\quad \prod_{n|T_n<t}\left(1 + \mathbf{1}_{\{\delta_n=1\}}\alpha_{T_{n+1}-}(x_n) + \mathbf{1}_{\{\delta_n=-1\}}\beta_{T_{n+1}-}(x_n)\right).\end{aligned}$$

Preuve. Nous utilisons pour commencer la Proposition 2.1, pour calculer la dérivée de Radon-Nikodým L_n de $(X_{t\wedge T_n}, t \geq 0)$ sous les lois $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}L_n &= \exp\left\{\int_0^{T_n} X_s(P(b_s\alpha_s) + k_s\beta_s)ds)\right\} \\ &\quad \times \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \mathbf{1}_{\{\delta_k=1\}}\alpha_{T_{k+1}-}(x_k) + \mathbf{1}_{\{\delta_k=-1\}}\beta_{T_{k+1}-}(x_k)\right).\end{aligned}$$

Nous pouvons étendre cette égalité de la manière suivante, soit $n_t = \inf\{n > 0 | T_n > t\}$, nous pouvons calculer la dérivée de Radon-Nikodým jusqu'à l'instant t, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}\middle| \mathcal{F}_{T_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}\mathbf{1}_{\{n\leq n_t\}}\middle| \mathcal{F}_{T_n}\right) \\ &+ \mathbb{E}\left(\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}\mathbf{1}_{\{n> n_t\}}\middle| \mathcal{F}_{T_n}\right) \\ &= L_n\mathbf{1}_{\{n\leq n_t\}} + L_{n_t-1}\frac{\mathbb{Q}(T_{n_t} > t)}{\mathbb{P}(T_{n_t} > t)}\mathbf{1}_{\{n>n_t\}}.\end{aligned}$$

En effet, l'information que nous obtenons sur le processus entre les instants T_{n_t-1} et t est uniquement que $T_{n_t} > t$. Il suffit maintenant de faire tendre $n \to +\infty$ pour conclure.

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}(X) &= \exp\left\{-\int_0^t X_s(P(b_s\alpha_s)+k_s\beta_s)ds)\right\} \\ & \prod_{n|T_n<t}\left(1+\mathbf{1}_{\{\delta_n=1\}}\alpha_{T_{n+1}-}(x_n)+\mathbf{1}_{\{\delta_n=-1\}}\beta_{T_{n+1}-}(x_n)\right). \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant écrire cette dérivée de façon plus compacte. Dans ce but, nous allons rappeler l'expression de l'exponentielle d'une martingale càdlàg.

Définition 2.1. Soit M_t une martingale càdlàg (continue à droite avec des limites à gauche), l'exponentielle de M est la martingale notée $\mathcal{E}(M)$, définie par :

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}[M,M]_t^c\right)\prod_{s\leq t}(1+\Delta M_s)\exp(-\Delta M_s).$$

Si M est une martingale purement discontinue, alors on a :

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(M_t - \sum_{s\leq t}\Delta M_s\right)\prod_{s\leq t}(1+\Delta M_s).$$

Remarque 2.1. La martingale $\mathcal{E}(M)$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dM_s.$$

Soit (X_t) un processus de particules de loi $\mathbb{P}$, nous pouvons définir les processus de sauts suivants :

- Le processus de naissance $B_t(x) = \sum_{0<s\leq t}\Delta X_s(x)^+$;
- Le processus de mort $K_t(x) = \sum_{0<s\leq t}\Delta X_s(x)^-$.

Bien entendu, nous avons $X_t(x) - X_0(x) = B_t(x) - K_t(x)$. De plus, la propriété de Markov montre que le processus :

$$\widehat{B}_t(x) = B_t(x) - \int_0^t b_s(x)P(X_s)(x)ds \text{ et}$$

$$\widehat{K}_t(x) = K_t(x) - \int_0^t k_s(x)X_s(x)ds$$

sont des $\mathbb{P}$-martingales.

Dès lors, on a :

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(M)_t,$$

où on pose :

$$M_t = \sum_x(\alpha(x).\widehat{B}(x))_t + (\beta(x).\widehat{K}(x))_t.$$

2.2 Dérivée de Radon-Nikodým pour les processus de particules à temps discret

On note $\mathbb{P}$ la loi d'un processus de particules à temps discret de distribution du nombre d'enfants Π, et Q une modification de ce processus de particules avec distribution Π'.

Ces dérivées de Radon-Nikodým sont plus faciles à calculer, en utilisant l'indépendance du nombre d'enfants à l'instant $n+1$ sur chaque site, conditionnellement à $\mathcal{F}_n$. La dérivée de Radon-Nikodým peut alors s'exprimer comme un produit sur le temps et l'espace :

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_N}(X) = \prod_{n=0}^{N}\prod_{x} L_{n,x},$$

où on a noté :

$$L_{n,x} = \frac{\mathbb{Q}(\xi_{n+1}(x) = X_{n+1}(x))}{\mathbb{P}(\xi_{n+1}(x) = X_{n+1}(x))}.$$

En utilisant les définitions que nous avons donné des processus de particules à temps discret, nous pouvons écrire :

$$L_{n,x}(X) = \frac{\Pi'_{n,x}(X_{n+1})}{\Pi_{n,x}(X_{n+1})}.$$

3 Quelques calculs relatif à la marche aléatoire branchante

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous allons utiliser une marche aléatoire branchante comme loi de référence pour presque tous nos systèmes de particules. En d'autres termes, pour étudier la convergence des dérivées de Radon-Nikodým, nous étudierons des fonctionnelles de marches aléatoires branchantes (à l'exception du modèle de Lotka-Volterra, pour lequel il sera plus simple d'utiliser le modèle du voteur comme modèle de référence). Par conséquent, quelques résultats sur les méthodes de calcul des moments d'une marche aléatoire branchantes pourront être utiles par la suite.

3.1 Représentation de la marche aléatoire branchante à temps continu

Soient $\Lambda^n(x,y)$ et $\Lambda^n(x)$ des processus de Poisson continus d'intensité $\gamma p(x,y)$ et γ respectivement. Une marche aléatoire branchante ξ_t à taux γ est la seule solution forte du problème suivant :

$$\xi_t(x) = \xi_0(x) + \sum_{y,n}\int_0^t \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}(y)>n\}} d\Lambda_s^n(x,y) - \sum_n \int_0^t \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}(x)>n\}} d\Lambda_s^n(x).$$

Si Λ est un processus de Poisson d'intensité λ, nous noterons son processus compensé $\widehat{\Lambda}_t = \Lambda_t - \lambda t$, et pour toutes fonctions ϕ, on pose :

$$\xi_t(\phi) = \sum_x \phi(x)\xi_t(x) \text{ et}$$

$$\mathcal{L}_\gamma\phi(x) = \gamma(\mathbb{P}\phi(x) - \phi(x)).$$

Nous pouvons donc réécrire ξ de la façon suivante :

$$\xi_t(\phi) = \xi_0(\phi) + M_t(\phi) + A_t(\phi) \tag{2}$$

où nous avons posé

$$M_t(\phi) = \left[\sum_{x,y,n} \int_0^t \phi(x)\mathbf{1}_{\{\xi_{s-}(y)>n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y) - \sum_{x,n} \int_0^t \phi(x)\mathbf{1}_{\{\xi_{s-}(y)>n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y)\right] \text{ et}$$

$$A_t(\phi) = \int_0^t \xi_s(\mathcal{L}_\gamma \phi) ds.$$

$M_t(\phi)$ est une martingale, de variation quadratique :

$$\langle M(\phi)\rangle_t = \gamma \int_0^t \xi_s(\phi^2 + P(\phi^2)) ds.$$

3.2 Calcul des moments

Nous voulons étendre l'équation (2) à des fonctions $\phi(t,x) = \phi_t(x) \in \mathcal{C}^{1,3}([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$. D'après l'égalité de Riemann-Stieltjes, on a :

$$\xi_t(x)\phi_t(x) = \xi_0(x)\phi_0(x) + \int_0^t \xi_s\dot{\phi}_s(x)ds + \int_0^t \phi_s(x)d\xi_s(x).$$

Nous pouvons alors sommer sur tout $x \in \mathbb{Z}^d$, pour obtenir :

$$\xi_t(\phi_t) = \xi_0(\phi_0) + M_t(\phi) + A_t(\phi),$$

où on a noté :

$$M_t(\phi) = \left[\sum_{x,y,n} \int_0^t \phi_s(x)\mathbf{1}_{\{\xi_{s-}(y)>n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y) - \sum_{x,n} \int_0^t \phi_s(x)\mathbf{1}_{\{\xi_{s-}(y)>n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y)\right]$$

et

$$A_t(\phi) = \int_0^t \sum_x \xi_s(\mathcal{L}_\gamma\phi_s + \dot{\phi}_s)ds.$$

$M_t(\phi)$ est encore une martingale de variation quadratique :

$$\langle M(\phi)\rangle_t = \gamma \int_0^t \xi_s(\phi_s^2 + P(\phi_s^2)) ds.$$

Nous appelons M la mesure-martingale orthogonale de la marche aléatoire branchante.

Définition 3.1. Soit ξ_t une marche aléatoire à taux γ, la martingale-mesure orthogonale de ξ est le processus M_t à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ vérifiant pour tout $\phi \in \mathcal{C}^{1,3}([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$:

$$M(\phi)_t = \xi_t(\phi) - \xi_0(\phi) - \int_0^t \sum_x \xi_s(\mathcal{L}_\gamma\phi_s + \dot{\phi}_s)ds.$$

Notons P_t le semigroupe de la marche aléatoire continue B^γ sur $\mathbb{Z}^d$ qui saute à taux γ vers l'un de ses voisins selon la distribution p. En d'autres termes,

$$P_t(\phi)(x) = \mathbb{E}(\phi(x + B_t^\gamma)).$$

Si nous appliquons l'équation précédente à la fonction $\phi_s(x) = P_{t-s}\phi(x)$, on a $A_t(\phi) = 0$, dès lors :

$$\mathbb{E}(\xi_t(\phi)) = \xi_0(P_t(\phi)),$$

De plus, nous pouvons ainsi calculer les autres moments par récurrence, en utilisant la formule d'Itô. Ainsi, pour le deuxième moment, nous avons :

$$\mathbb{E}(\xi_t(\phi)\xi_t(\psi)) = \xi_0(P_t(\phi))\xi_0(P_t(\psi)) + \int_0^t \mathbb{E}(\xi_s(P_{t-s}\phi P_{t-s}\psi))ds.$$

On peut « lire »cette formule de la manière suivante, pour $\phi = \mathbf{1}_{\{x\}}$ et $\psi = \mathbf{1}_{\{y\}}$: la probabilité qu'il y ait une particule en x et une autre en y est égale à la probabilité que deux particules issues de deux particules initiales différentes se retrouvent aux bons endroits, plus celle que la particule en position x et celle en position y descendent d'un même ancêtre commun à l'instant s, puis se soient déplacées de manière indépendante pendant un temps $t - s$ pour se retrouver dans la bonne position.

La formule étendue s'en déduit par linéarité.

3.3 Calculs pour la marche aléatoire branchante à temps discret

Le même genre de calculs peuvent s'étendre aux marches aléatoires branchantes à temps discret. En fait, nous pouvons aisément prouver par récurrence que :

$$\mathbb{E}(\xi_n(\phi)) = \xi_0(P_n(\phi)),$$

$$\mathbb{E}(\xi_n(\phi)\xi_n(\psi)) = \xi_0(P_n(\phi))\xi_0(P_n(\psi)) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(\xi_k(P_{n-k}(\phi)P_{n-k}(\psi))),$$

où on a posé $P_n(\phi)(x) = \mathbb{E}(\phi(x + B_n))$, avec B_n une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de noyau p.

4 Convergence de la marche aléatoire branchante avec dérive

Dans cette section, nous mettrons en valeur l'une des difficultés qui peut apparaitre lorsqu'on s'intéresse aux marches aléatoires à temps continu, difficulté qui disparait lorsqu'on s'intéresse aux marches aléatoires branchantes à temps discret. Dans ce but, nous étudierons l'une des modifications les plus simples de la marche aléatoire branchante. Nous ajoutons uniquement un dérive, une différence entre la probabilité de naissance et de mort pour chaque particule.

4.1 Marche aléatoire branchante à temps continu avec dérive symétrique θ

Pour commencer, nous étudions un modèle dans lequel le dérive est distribué de façon symétrique sur les taux de naissance et de mort. Avec ce modèle, on peut prouver la convergence de la dérivée de Radon-Nikodým, sans difficultés.

Définition 4.1. Une marche aléatoire branchante à temps continu avec dérive symétrique $\theta \in \mathcal{C}_b([0,+\infty[\times\mathbb{Z}^d)$ est un processus de particules dans lequel chaque particule a un taux ne naissance accéléré et un taux de mort ralenti du même facteur. Ce système de particules évolue de la façon suivante :

$$\begin{cases} \xi_t(x) \to \xi_t(x)+1 \text{ à taux } V_t(x)(1+\theta(x,t)) \\ \xi_t(x) \to \xi_t(x)-1 \text{ à taux } \xi_t(x)(1-\theta(x,t)) \end{cases}$$

Une suite de tels processus, convenablement renormalisée, convergera vers un super-processus de Dawson-Watanabe de la manière suivante. On note θ^N une suite de fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^+ \times \frac{\mathbb{Z}^d}{\sqrt{N}}$, que nous étendons par interpolation à des fonctions $\mathcal{C}_b\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d\right)$. Nous supposons que θ^N converge uniformément vers θ.

Théorème 4.1. *Soit ξ_t^N une suite de marches aléatoires branchantes à taux N avec dérive symétrique $\dfrac{\theta^N}{N}$ sur le réseau renormalisé d'un facteur $\sqrt{N}$, on pose :*

$$X_t^N = \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \xi_t^N(x)\delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Si $X_0^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} \mu$, où $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, alors nous avons :

$$X^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} X,$$

où X est un super-processus de Dawson-Watanabe avec taux de branchement 2, diffusion σ^2 et dérive θ.

Preuve. Soit P_θ la loi du processus X^N, et P^N la loi de la marche aléatoire branchante à taux N, renormalisée de la même manière, que nous noterons aussi X^N. La dérivée de Radon-Nikodým pour ces processus renormalisés est égal à celle des systèmes de particules dont ils sont tirés :

$$\left.\frac{dP_\theta^N}{dP^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(\frac{1}{N}M^N(\theta^N))_t,$$

où M^N est la mesure-martingale orthogonale de la marche aléatoire branchanteξ^N.

Nous utilisons des approximations $\phi_\varepsilon^N \in \mathcal{C}_b^{1,3}\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d\right)$ de θ^N vérifiant $\|\phi_\varepsilon^N - \theta^N\|_\infty \leq \varepsilon$. De la même façon, on note ϕ_ε une approximation de θ.

De plus, nous savons que la séquence de marches aléatoires branchantes à taux N, renormalisées en espace par $\sqrt{N}$ et en masse par N, converge en loi vers le super-mouvement Brownien.

Dès lors, nous avons simplement à prouver la convergence en loi jointe avec la dérivée de Radon-Nikodým. On a, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_b^{1,3}\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d\right)$:

$$M_t^N(\phi) = \xi_t^N(\phi) - \xi_0^N(\phi) - \int_0^t \xi_s^N(\mathcal{L}_N\phi)ds - \int_0^t \xi_s^N(\dot{\phi}_s)ds.$$

De la même manière, on a :

$$[M^N(\phi)]_t = \sum_{x,y,n} \int_0^t \phi_{s-}(x)^2 \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^N(y)>n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y) + \sum_{x,n} \phi_{s-}(x)^2 \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^N(x)>n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x),$$

on voit donc que $[\frac{1}{N}M^N(\phi)]_t - \int_0^t X_s^N(\phi_s^2 + P^N(\phi_s^2))ds$ est une martingale de variation quadratique tendant vers 0, donc

$$[\frac{1}{N}M^N(\phi)]_t \underset{n\to+\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} 2\int_0^t X_s(\phi_s^2)ds.$$

De plus, la fonction :

$$X \in D([0,+\infty[,\mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)) \mapsto \int_0^t X_s(\phi)ds$$

est continue, donc en posant ϕ^n un ensemble dénombrable de fonctions dans $\mathcal{C}_b^{1,3}\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d\right)$, on a :

$$\left(X^N, \left(\frac{1}{N}M_t^N(\phi^n)\right), \left(\frac{1}{2N^2}\left[M^N(\phi^n)\right]_t\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \left(X, \left(M_t(\phi^n)\right), \int_0^t X_s({\phi^n}_s^2)ds\right).$$

Nous utilisons ensuite ce résultat pour l'ensemble dénombrable $\left(\phi_\varepsilon^N\right)_{N\in\mathbb{N},\varepsilon\in\mathbb{Q}}$ des approximations de θ^N, ce qui nous permet de prouver la convergence jointe :

$$\left(X^N, \frac{1}{N}M_t^N(\theta^N), \frac{1}{2N^2}\left[M^N(\theta^N)\right]_t\right) \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} \left(X, M_t(\theta), \int_0^t X_s(\theta_s^2)ds\right).$$

Cette convergence jointe nous donne en particulier la convergence jointe de X^N et de la dérivée de Radon-Nikodým, on en conclut la convergence de P_θ^N vers P^{2,θ,σ^2}. $\square$

Étudions maintenant le même genre de convergence pour des processus à temps discret.

4.2 Marche aléatoire branchante avec dérive, modèle à temps discret

Définition 4.2. Une marche aléatoire branchante à temps discret avec dérive $\theta \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ est un système de particules dans lequel chaque particule a un nombre d'enfants augmenté en moyenne d'un facteur θ. Ce processus de particule évolue de la manière suivante :

$$\xi_{n+1}(x) = k \text{ avec probabilité } e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

où on a posé $\lambda = \lambda_n(x) = (1+\theta_n(x))V_n(x)$.

Comme dans le cas précédent, on considère une suite θ^N de fonctions continues bornées sur $\frac{\mathbb{N}}{N} \times \frac{\mathbb{Z}^d}{\sqrt{N}}$, que nous étendons par interpolation à des fonctions de $\mathcal{C}_b\left(R^+ \times \mathbb{R}^d\right)$. On suppose que θ^N converge uniformément vers θ. On peut alors prouver le même type de résultats :

Théorème 4.2. *Soit ξ^N une suite de marches aléatoires branchantes à temps discret sur la matrice renormalisée, avec dérive $\frac{\theta^N_{\frac{n}{N}}}{N}$. On pose :*

$$X_t^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \xi^N_{\lfloor Nt \rfloor}(x) \delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Si $X_0^N \underset{n \to +\infty}{\Longrightarrow} \mu$ où $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, alors on a :

$$X^N \underset{n \to +\infty}{\Longrightarrow} X,$$

où X est un super-processus de Dawson-Watanabe avec taux de branchement 1, diffusion σ^2 et dérive θ.

Preuve. Nous supposons dans un premier temps que les dérives θ^N et θ sont dans $\mathcal{C}_b^{1,3}\left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\right)$, et que la convergence est uniforme en espace.

Comme précédemment, nous étudions la dérivée de Radon-Nikodým de nos processus. On pose $\mathbb{P}_\theta^N$ la loi de $(X_t^N)_{t \geq 0}$ et $\mathbb{P}^N$ la loi de la marche aléatoire branchante sans dérive, renormalisée de la même manière. Dans le modèle à temps discret, on a :

$$\left.\frac{dP_\theta^N}{dP^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \prod_{k=0}^{\lfloor Nt \rfloor} \prod_x L_{n,x},$$

où on a posé :

$$L_{n,x} = e^{-\frac{1}{N} V_n^N(x) \theta^N_{\frac{n}{N}}(x)} \left(1 + \frac{\theta^N_{\frac{n}{N}}(x)}{N}\right)^{\xi^N_{n+1}(x)}.$$

On peut maintenant réécrire

$$\left.\frac{dP_\theta^N}{dP^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = (1 + o_P(1)) \exp\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\lfloor Nt \rfloor} \xi^N_{n+1}\left(\theta^N_{\frac{n}{N}}\right) - \xi_n^N(P\theta^N_{\frac{n}{N}}) + \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{\lfloor Nt \rfloor} \xi^N_{n+1}({\theta^N_{\frac{n}{N}}}^2))\right].$$

On étudie la convergence de chaque partie de la dérivée de Radon-Nikodým, on commence par

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{\lfloor Nt \rfloor} \xi^N_{n+1}\left({\theta^N_{\frac{n}{N}}}^2\right) = \int_0^t X_s^N\left({\theta_s^N}^2\right) ds + o(1),$$

et de la même manière que précédemment, nous obtenons la convergence jointe avec celle du processus.

Nous nous intéressons ensuite à :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\lfloor Nt\rfloor}\xi_{n+1}^N(\theta_{\frac{n}{N}}^N)-\xi_n^N(P\theta_{\frac{n}{N}}^N)\\
= &\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\lfloor Nt\rfloor}\left[\xi_{n+1}^N(\theta_{\frac{n+1}{N}}^N)-\xi_n^N(\theta_{\frac{n}{N}}^N)\right]-\left[\xi_{n+1}^N(\theta_{\frac{n+1}{N}}^N)-\xi_{n+1}^N(\theta_{\frac{n}{N}}^N)\right]-\left[\xi_n^N(P^N\theta_{\frac{n}{N}}^N)-\xi_n^N(\theta_{\frac{n}{N}}^N)\right]\\
= &X_{\lfloor Nt\rfloor}^N(\theta_{\frac{\lfloor Nt\rfloor}{N}}^N)-X_0^N(\theta_0^N)-\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{\lfloor Nt\rfloor}\xi_{n+1}^N(\dot\theta_{\frac{n}{N}}^N)+\xi_n^N(\mathcal{L}_N(\theta_{\frac{n}{N}}^N))+o(1)\\
= &X_{\lfloor Nt\rfloor}^N(\theta_{\frac{\lfloor Nt\rfloor}{N}}^N)-X_0^N(\theta_0^N)-\int_0^t X_s^N(\dot\theta_s^N+\mathcal{L}_N\theta_s^N)ds+o(1).
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient la loi jointe du processus et de sa dérivée de Radon-Nikodým.

Nous utilisons ensuite une suite d'approximations de θ par des fonctions régulières pour compléter la preuve. □

Remarque 4.1. Cette preuve de la convergence du processus à temps discret est très proche de celle de la convergence de la marche aléatoire à dérive symétrique. Ici l'espérance du nombre d'enfants de chaque particule est égal à $\frac{1+\theta_t(x)}{2}$, ce qui nous amène à considérer une dérive $\frac{\theta}{2}$ pour le processus à temps discret. De plus, le taux de branchement du processus limite vaut 2 dans le cas de la marche aléatoire branchante à dérive symétrique, au lieu de 1 dans le modèle à temps discret.

Mais s'intéresser à $\tilde X_t^N=\dfrac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\xi_{\lfloor 2Nt\rfloor}^N(x)\delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}$ nous aurait conduit à un super-mouvement Brownien, avec taux de branchement 2 et dérive θ, ainsi qu'on l'attendait.

Nous allons maintenant nous intéresser à une autre marche aléatoire branchante à temps continu, pour laquelle la dérive n'est pas distribuée de façon égale sur les taux de naissance et de mort. Prouver la convergence grâce à la dérivée de Radon-Nikodým du processus devient alors un exercice bien plus ardu.

4.3 Une marche aléatoire branchante avec dérive asymétrique (θ,θ')

Définition 4.3. Une marche aléatoire avec dérive asymétrique $(\theta,\theta')\in\mathcal{C}_b^{1,3}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)^2$ est une marche aléatoire branchante dont on a accéléré le taux de naissance par un certain facteur, et le taux de décès par un autre. Le système de particules évolue de la façon suivante :

$$\begin{cases}\xi_t(x)\to\xi_t(x)+1 \text{ à taux } V_t(x)(1+\theta_t(x))\\ \xi_t(x)\to\xi_t(x)-1 \text{ à taux } \xi_t(x)(1+\theta'_t(x))\end{cases}$$

Le théorème que nous aimerions prouver est le suivant : soit (θ^N,θ'^N) des suites fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^+\times\dfrac{\mathbb{Z}^d}{\sqrt{N}}$, que nous étendons par interpolation à des fonctions dans $\mathcal{C}_b\left(R^+\times\mathbb{R}^d\right)$. Nous supposons que θ^N et θ'^N convergent uniformément vers θ et θ'.

Théorème 4.3. *Soit ξ_t^N une suite de marches aléatoires branchantes à taux N avec dérive asymétrique $\left(\frac{\theta^N}{N}, \frac{\theta'^N}{N}\right)$, on pose :*

$$X_t^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \xi_t^N(x) \delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Si $X_0^N \underset{N \to +\infty}{\Longrightarrow} \mu$ où $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, alors on a :

$$X^N \underset{N \to +\infty}{\Longrightarrow} X,$$

où X est un super-processus de Dawson-Watanabe avec taux de branchement 2, diffusion σ^2 et dérive $\frac{\theta - \theta'}{2}$.

Nous voudrions prouver ce théorème de la même façon que précédemment.

Comme nous l'avions fait précédemment, nous notons $P'^N_{\theta,\theta'}$ la loi du processus ξ^N, et rappelons que $\mathbb{P}^N$ est la loi de la marche aléatoire branchante à taux N. La dérivée de Radon-Nikodým de ce processus est

$$\left.\frac{dP'^N_\theta}{d\mathbb{P}^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(B^N(\theta^N) - K^N(\theta'^N))_t,$$

où $B^N(\theta^N)_t = \sum_{0<s\leq t} \sum_x \theta_s^N(x) \Delta\xi_s^N(x)^+$, est défini comme le processus de naissance, qui saute de $\theta_s(x)$ s'il y a une naissance sur le site x à l'instant s, et de la même façon, on note $K^N(\theta'^N)_t = \sum_{0<s\leq t} \sum_x \theta_s^N(x) \Delta\xi_s^N(x)^-$.

On s'intéresse maintenant à la convergence en loi de cette dérivée de Radon-Nikodým.

Commençons par rappeler que

$$B_t^N(\theta^N) = \sum_{x,y,n} \int_0^t \theta_{s-}^N(x) \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^N(y) > n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y).$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} [B^N(\theta^N)]_t &= \sum_{x,y,n} \int_0^t \theta_{s-}^N(x)^2 \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^N(y) > n\}} d\Lambda_s^n(x,y) \\ &= \frac{1}{2}[M^N(\theta^N)]_t + \frac{1}{2} M_t^N({\theta^N}^2). \end{aligned}$$

Nous voyons donc que la variation quadratique est assez simple à étudier, en utilisant les mêmes arguments que précédemment. Il nous faut maintenant prouver la convergence en loi de $\frac{1}{N} B_t^N(\theta)$ vers $\frac{1}{2} M_t(\theta)$. Mais cette partie semble assez problématique, en raison des différences importantes existant entre B^N et K^N les processus de vie et de mort.

Remarque 4.2. Afin de donner un équivalent du processus à dérive asymétrique, nous devons considérer la suite de processus modifiée à temps discrets suivante $Y_t^N = X^N_{t+\frac{\theta_t(x)}{N}}$, car le processus à temps continu évolue à un taux $2 + \frac{\theta_t(x)}{N}$, et conserver le même type de dérive que dans le processus X^N. Il apparait ainsi que les difficultés de calculs proviennent d'un problème de temps, au lieu de conserver la même échelle de temps, dans le cas du processus asymétrique le temps est accéléré d'un facteur $(1 + \frac{\theta-\theta'}{2})$ à l'ordre 0, et cette modification nous amène à des effets difficiles à contrôler pour la dérivée de Radon-Nikodým.

5 Convergence du processus de contact

Un processus de contact est un système de particules de vie et de mort, qui représente l'évolution d'une épidémie dans une population. Les « particules »représentent les individus infectés. En chaque site, il y a uniquement un nombre fini de personnes qui sont susceptibles de tomber malade. Chaque personne infectée peut contaminer une autre voisine à un certain taux, et guérir à un autre taux. Ces dynamiques ont déjà été beaucoup étudié, et la convergence a été prouvée dans [**?**], mais nous cherchons ici à étudier la possibilité d'utiliser une dérivée de Radon-Nikodým.

5.1 Processus de contact à temps continu

Le processus de contact à temps continu peut être défini comme suit : On suppose qu'en chaque site du réseau $\mathbb{Z}^d$ se situe un village de M individus. Chaque individu infecté peut contaminer un individu d'un village voisin à taux $\frac{1}{M}p(x,y)$. La cible est effectivement contaminée si elle n'était pas déjà malade. Si nous comparons ceci à une marche aléatoire branchante, nous remarquons que le taux de naissance est moins élevé, donc nous avons également besoin de modifier le taux de mort, pour éviter l'écueil de la dérive asymétrique. Chaque particule guérira à un taux $1 + \theta$. Formellement, nous posons la définition suivante.

Définition 5.1. Un processus de contact avec dérive θ et taille de village M est un processus de particules à temps continu avec taux de naissance $(1-V_{t-}(x))$ et taux de mort $(1+\theta)$, c'est-à-dire un processus de Markov évoluant de la manière suivante :

$$\begin{cases} \xi_t(x) \to \xi_t(x) + 1 \text{ at rate } V_t(x)(1 - \dfrac{X_t(x)}{M}) \\ \xi_t(x) \to \xi_t(x) - 1 \text{ at rate } \xi_t(x)(1+\theta). \end{cases}$$

Nous pouvons obtenir le théorème suivant sur la convergence d'une suite de processus de contact.

Théorème 5.1. *Soit ξ^N une suite de processus de contact à taux N, dérive $\frac{\theta}{N}$ et taille de village N, on pose :*

$$X_t^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \xi_t^N(x) \delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Si $X_0^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} \mu$, où μ est une mesure finie sans atomes sur $\mathbb{R}^d$, nous avons :

$$X^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} X,$$

où X est un super-processus de Dawson-Watanabe avec taux de branchement 2, diffusion σ^2 et dérive $\theta - b$, où on a posé :

$$b = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(p(B_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n = 0),$$

avec B_n une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de noyau p.

Ce théorème a déjà été prouvé dans [**?**], mais d'une façon différente. On prouve pour commencer l'existence de valeurs d'adhérence par une argument de tension, puis on montre que toute valeur d'adhérence est solution du problème de martingales (1). Le but ici serait de donner une autre preuve plus directe, en utilisant la dérivée de Radon-Nikodým.

Si nous notons Q_θ^N la loi du processus X^N, nous avons encore, grâce à la Proposition 2.2 :

$$\left.\frac{dQ_\theta^N}{dP^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{N}\tilde{M}^N\right)_t,$$

où :

$$\tilde{M}_t^N = \sum_{x,y,n} \int_0^t \xi_s^N(x) \mathbf{1}_{\{\xi_s^N(y) > n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y) - \sum_{x,n} \int_0^t \theta \mathbf{1}_{\{\xi_s^N(x) > n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x).$$

Nous allons maintenant traiter le cas $\theta = b$, pour lequel nous souhaiterions prouver que la dérivée de Radon-Nikodým converge en loi vers 1.

Mais si nous avions cette convergence, nous pourrions calculer l'espérance du logarithme de cette variable aléatoire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^2}\mathbb{E}([\tilde{M}^N]_t) &= \mathbb{E}\Big(\frac{1}{N^2}\sum_{x,y,n}\int_0^t \xi_s^N(x)^2 \mathbf{1}_{\{\xi_s^N(y)>n\}} d\Lambda_s^n(x,y) - \frac{1}{N^2}\sum_{x,n}\int_0^t b^2 \mathbf{1}_{\{\xi_s^N(x)>n\}} d\Lambda_s^n(x)\Big) \\
&= \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{x,y} \mathbb{E}((\xi_s^N(x)^2 - b^2)\xi_s^N(y)) p(x,y) ds \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Mais nous pouvons prouver que (calculs portés en annexe) :

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t \frac{1}{N}\sum_{x,y}(\xi_s^N(x) - b)\xi_s^N(y) p(x,y) ds\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

Ce phénomène est appelé simplification en champ moyen. Il apparait qu'au voisinage de chaque particule, le nombre moyen de voisin tend vers la constante b.

Ces calculs nous mènent aux résultat suivant : si la dérivée de Radon-Nikodým converge vers 1 en loi, alors on a :

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t \frac{1}{N}\sum_{x,y}(\xi_t^N(x) - b)^2)\xi_t^N(y) p(x,y) ds\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais comme b n'est pas entier, nous pouvons choisir $\varepsilon > 0$ tel que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\cap\mathbb{N} = \varnothing$, dans ce cas, nous avons également :

$$\mathbb{E}(\int_0^t \frac{1}{N}\sum_{x,y}(\xi_t^N(x)-b)^2)\xi_t^N(y)p(x,y)ds) \geq \mathbb{E}(\int_0^t \frac{1}{N}\sum_{x,y}\varepsilon^2\xi_t^N(y)p(x,y)ds) = tX_0^N(\varepsilon^2).$$

Il apparait donc que la dérivée de Radon-Nikodým ne peut converger dans ce cas précis. La simplification en champ moyen n'apparait pas dans ce type de calculs.

Remarque 5.1. Même si nous avions nous ayons "symmétrisé" le processus de contact en accélérant le taux de guérison des particules côtoyant de nombreux malades, il semble difficile de terminer une telle preuve de la convergence du processus de contact, car la « fonction »X_t^N que nous intégrons par rapport à la mesure-martingale M n'a pas de limite en dimension $d > 2$, en particulier cette limite ne peut pas être b.

Il est impossible d'obtenir une convergence séparer (la mesure martingale d'une part, et la fonction intégrée d'autre part, comme réalisé dans [?]). De plus, nous ne pouvons plus utiliser la simplification en champ moyen de notre processus, car la dérivée de Radon-Nikodým conserve les carrés de variations microscopiques dans la dérive.

5.2 Processus de contact à temps discret

Nous souhaitons maintenant voir quelles seront les difficultés lorsque nous traiterons du processus de contact à temps discret. Commençons par définir la distribution du nombre d'enfant. Notons qu'il y a deux types possibles d'enfants d'une marche aléatoire branchante qui disparaissent dans le processus de contact : ceux qui représentent l'infection d'enfants déjà infectés, ce qui se produit avec probabilité $\frac{\xi_n(x)}{M}$; et ceux qui visent plusieurs fois le même individu non-infecté. Il y aura dans ce cas un seul nouvel individu dans le processus de contact, là où il y en avait plusieurs dans le cadre de la marche aléatoire branchante. Pour le moment, nous ignorerons ce second terme.

Un calcul assez simple nous montre que la nouvelle distribution d'enfants doit être :

$$\Pi_{n,x}(k) = e^{-(1-\frac{\xi_n(x)}{M})V_n(x)}\frac{\left((1-\frac{\xi_n(x))}{M})V_n(x)\right)^k}{k!}.$$

Nous pouvons maintenant définir ce processus de contact modifié à temps discret.

Définition 5.2. Un processus de contact à temps discret modifié avec dérive θ et taille de village M est un processus de particules à temps discret dont le nombre d'enfants suit la distribution suivante :

$$\Pi_{n,x}(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

où $\lambda = \lambda_n(x) = (1-\frac{\xi_n(x)}{M})V_n(x)(1+\theta)$.

Remarque 5.2. Ce processus de contact modifié est une bonne approximation du modèle initial. En effet le nombre de particules par site dans le processus de contact est dominé par le nombre de particules par site de la marche aléatoire branchante avec dérive θ associée. De plus, l'espérance conditionnelle du nombre de particules infectées par deux voisines ou plus à l'instant $n+1$ au site x est clairement borné par une constante multipliée par le carré du nombre de voisins de cette particule. Finalement, un calcul assez simple montre que le nombre de ces erreurs jusqu'à l'instant t est un $o_P(N)$, quand $N \to +\infty$, donc ces erreurs n'apparaissent pas dans le processus limite.

Nous étudions la possible convergence d'une suite ξ^N de processus de contact modifiés avec dérive $\frac{\theta}{N}$ et taille de village N. Nous notons également, de la même manière que pour la marche aléatoire branchante avec dérive :

$$X_t^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \xi^N_{\lfloor Nt \rfloor}(x) \delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Nous pouvons calculer la dérivée de Radon-Nikodým de ces processus par rapport aux marches aléatoires branchantes. Nous commençons en calculant

$$L_{n,x} = \exp\left[-V_n(x)((1 - \frac{\xi_n^N(x)}{N})(1 + \frac{\theta}{N}) - 1) \right] ((1 - \frac{\xi_n^N(x)}{N})(1 + \frac{\theta}{N}))^{\xi_{n+1}(x)}.$$

Nous pouvons aisément calculer le logarithme de la dérivée de Radon-Nikodým de ce processus de contact modifié contre la marche aléatoire branchante :

$$\begin{aligned} \ln(L_t^N) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{Nt} \sum_x (\xi_{n+1}^N(x) - V_n(x))(\theta - \xi_n^N(x)) \\ &- \frac{1}{2N^2} \sum_{n=0}^{Nt} \sum_x \xi_{n+1}^N(x)(\xi_n^N(x)^2 + \theta^2) - 2V_n(x)\xi_n^N(x)\theta + o_P(1). \end{aligned}$$

La convergence de la part de cette dérive qui implique le terme en θ est déjà bien connue. Il nous reste juste à tenir compte de la part de dérive reliée à $\xi_n^N(x)$. Nous pouvons établir, de la même manière que pour la marche aléatoire branchante à temps continu que :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor Nt \rfloor} \frac{(\xi_n^N(x) - \frac{b}{2})V_n(x)}{N} \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais la convergence de la dérivée de Radon-Nikodým suppose que :

$$\mathbb{E}(\frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{Nt} \sum_x \xi_{n+1}^N(x)(\xi_n^N(x)^2 - \frac{b^2}{4})) = \mathbb{E}(\frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{Nt} \sum_x V_n(x)(\xi_n^N(x)^2 - \frac{b^2}{4})) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et de la même manière que précédemment, on peut montrer qu'avoir ces deux convergences de manière simultanée est impossible.

Remarque 5.3. Une fois encore, nous observons que le problème est ici d'obtenir une limite pour l'intégrale de $\xi_n(x)$ contre la martingale orthogonale de la marche aléatoire branchante. Or cette suite de fonctions n'admet pas de limite, ne serait-ce que càdlàg.

En dimension 1, dans [?], comme le super-mouvement Brownien admet une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue, les calculs peuvent être terminés, et on trouve une limite pour la dérivée de Radon-Nikodým conjointe à la limite des suites de marches aléatoires branchantes. Dans [?], ces méthodes sont utilisées sur un modèle de contagion SIR, pour lequel les individus qui ont été infectés sont par la suite immunisés contre la maladie. Comme le super-mouvement Brownien possède une mesure d'occupation à densité continue en dimension 2 et 3, la preuve de la convergence utilisant une dérivée de Radon-Nikodým peut être utilisée, et permet de conclure.

La difficulté dans la preuve de la convergence de la dérivée de Radon-Nikodým est différente de la difficulté rencontrée pour la marche aléatoire avec dérive. Ce n'est pas seulement des différences de vitesse locales qui sont ici en jeu, c'est l'existence d'une simplification en champ moyen, qui n'apparait pas dans la dérivée de Radon-Nikodým, pour laquelle les processus sont observés avec tous les détails microscopiques. La possibilité de conclure se ramène alors à l'existence d'une limite càdlàg pour la dérive utilisée $\xi_n(x)$, ce qui est faux pour des dimensions plus grandes que 2.

Nous allons maintenant donner quelques autres exemples de processus de particules dont la limite s'obtient par simplification en champ moyen, pour lesquels le calcul de la limite de la dérivée de Radon-Nikodým se révèle inopérant.

6 Convergence pour le modèle du voteur

Nous allons maintenant introduire deux types de modèles de voteur, avec court ou long rayon d'interaction. Ces processus ont déjà été étudiés à de nombreuses reprises, et la convergence d'une suite de ces processus convenablement renormalisés vers des super-mouvements Browniens a été prouvé dans [?].

Un modèle du voteur est un système de particules tel qu'à chaque site, nous avons un certain nombre d'individus. Chacun d'entre eux peut avoir une opinion, 0 ou 1. Avec taux 1, l'un d'entre eux choisi l'un de ses voisins uniformément au hasard, et adopte son opinion. Le processus est donc défini de la manière suivante.

Définition 6.1. Un modèle du voteur à temps continu avec taille de village M est un système de particules $\xi_t : \mathbb{Z}^d \to \{0, \cdots M\}$ avec taux de naissance $(1 - \frac{\xi_t(x)}{M})$ et taux de décès $(1 - \frac{V_t(x)}{M})$. Par conséquent, ce modèle évolue de la façon suivante :

$$\begin{cases} \xi_t(x) \to \xi_t(x) + 1 \text{ à taux } V_t(x) \left(1 - \dfrac{X_t(x)}{M}\right) \\ \xi_t(x) \to \xi_t(x) - 1 \text{ à taux } \xi_t(x) \left(1 - \dfrac{V_t(x)}{M}\right). \end{cases}$$

Définition 6.2. Un modèle du voteur à temps discret avec taille de village M est un système de particules $\xi_n : \mathbb{Z}^d \to \{0, \cdots M\}$ avec une distribution du nombre d'enfants Binomiale$\left(M, \frac{V_n(x)}{M}\right)$. Par conséquent, ce modèle évolue comme suit :

$$\xi_{n+1}(x) = k \text{ avec probabilité } \binom{M}{k} (\frac{V_n(x)}{M})^k (1 - \frac{V_n(x)}{M})^{M-k}.$$

6.1 Modèle du voteur à long rayon d'interaction

L'étude du modèle du voteur à long rayon d'interaction consiste à l'étude d'une suite de modèles du voteur dans lequel la taille de chaque village tend vers $+\infty$. En d'autres termes, chaque individu possède un nombre de voisins qui tend vers $+\infty$. Soit ξ_t^N une suite de modèles du voteur à temps continu de vitesse N et de taille de village M_N. On pose :

$$X_t^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \xi_t^N(x) \delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Le théorème suivant a été prouvé dans [?].

Théorème 6.1. *Si* $X_0^N \underset{N \to +\infty}{\Longrightarrow} \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, *alors :*

$$X^N \underset{N \to +\infty}{\Longrightarrow} X$$

où X *est un super-mouvement Brownien avec taux de branchement 2 et diffusion* σ^2.

Une fois encore, nous calculons la dérivée de Radon-Nikodým de ce processus, de loi R^N :

$$\left.\frac{dR^N}{dP^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{M_N} V_t^N\right),$$

où :

$$V_t^N = \sum_{x,y,n} \int_0^t \xi_s^N(x) \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^N(y) > n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y) + \sum_{x,n} \int_0^t P^N X_s^N(x) \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^N(X) > n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y).$$

Les difficultés que nous avions déjà rencontré dans le processus de contact se retrouvent de la même manière pour le modèle du voteur.

6.2 Autour du modèle du voteur à court rayon d'interaction

Le modèle du voteur à court rayon d'interaction est défini comme un modèle du voteur pour lequel il n'y a qu'un unique individu en chaque site. Dans ce cas, nous avons également convergence vers le super-mouvement Brownien, mais cette fois avec un taux de branchement multiplié par $\gamma = \mathbb{P}(\forall n > 0, B_n \neq 0)$ (voir [?]). Nous pouvons encore calculer la dérivée de Radon-Nikodým, de la même façon que pour le modèle du voteur à long rayon d'interaction, mais cette fois-ci contre une marche aléatoire branchante avec taux γN.

Dans le modèle à temps continu, on a :

$$\left.\frac{dR^N}{dP^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(\tilde{V}_t^N),$$

où on a noté :

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t^N &= \gamma \left(\sum_{x,y,n} \int_0^t (\xi_s^N(x) - b) \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^N(y) > n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{x,n} \int_0^t (P^N X_s^N(x) - b) \mathbf{1}_{\{\xi_{s-}^N(X) > n\}} d\widehat{\Lambda}_s^n(x,y) \right),\end{aligned}$$

en utilisant la relation $b = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}$. Ces résultats sont semblables à ceux relatifs aux processus de contact, et conduisent aux mêmes genres de difficultés. Notons que résoudre ce problème permettrait également de finir la preuve pour le modèle du voteur à long rayon d'interaction.

7 Le modèle de Lotka-Volterra, une modification du modèle du voteur

Nous étudions ici le modèle de Lotka-Volterra, qui est une modification du modèle du voteur. Par conséquent, la dérivée de Radon-Nikodým sera calculée par rapport au modèle du voteur, pas par rapport à la marche aléatoire branchante. De plus, pour les calculs relatifs au modèle du voteur, nous pourrons utiliser la dualité de celui-ci avec la marche aléatoire coalescente (B_t^x). Un modèle de Lotka-Volterra est un modèle de compétition entre deux espèces, 0 et 1. Quand l'un des individus meurt, il est immédiatement remplacé par un nouvel individu, dont l'espèce dépend des concentrations de 0 et de 1 au voisinage du site. Nous utiliserons ici les notations suivantes, plus agréables à manipuler, pour les nombres de voisins de chaque espèce d'un site :

$$f_n^i(x) = \sum_e p(e)\mathbf{1}_{\{\xi_n(x+e)=i\}}, \quad i \in \{0,1\}.$$

La convergence de l'un de ces processus vers un super-processus de Dawson-Watanabe a déjà été prouvé dans [**?**], en utilisant un argument de tension, et la caractérisation des valeurs d'adhérence par le problème de martingales (1). Regardons maintenant la dérivée de Radon-Nikodým du processus à temps continu.

7.1 Modèle de Lotka-Volterra à temps continu

Définition 7.1. Un modèle de Lotka-Volterra à temps continu avec paramètres d'interaction α_0 et α_1 est un système de particules $\xi_t : \mathbb{Z}^d \to \{0,1\}$ avec taux de naissance $(1-\xi_t(x))(f_t^0(x) + \alpha_0 f_t^1(x))$ et taux de mort $f_t^0(x)(f_t^1(x) + \alpha_1 f_t^0(x))$. Ce processus évolue de la manière suivante :

$$\begin{cases} \xi_t(x) \to \xi_t(x) + 1 \text{ à taux } (1-\xi_t(x))(f_t^1(x) + (\alpha_0 - 1)f_t^1(x)^2) \\ \xi_t(x) \to \xi_t(x) - 1 \text{ à taux } \xi_t(x)(f_t^0(x) + (\alpha_1 - 1)f_t^0(x)^2) \end{cases}$$

Soit ξ_t^N une suite de modèles de Lotka-Volterra avec vitesse N et paramètres d'interaction $1 + \dfrac{\theta_0}{N}, 1 + \dfrac{\theta_1}{N}$. On note comme d'habitude le processus normalisé de loi $\tilde{R}^N$:

$$X_t^N = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \xi_t^N(x)\delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Commençons par quelques notations. $(B^x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ est une marche aléatoire coalescente, où B^x est une marche aléatoire commençant en x. Si B^x et B^y se rencontrent à n'importe quel moment, alors ils coalescent, i.e. si $B_t^x = B_t^y$ alors pour tout $s \geq t$, $B_s^x = B_s^y$. Nous posons également :

$$\tau(x,y) = \inf\{t > 0 | B_t^x = B_t^y\}$$

$$\beta = \sum_{e,e'} p(e)p(e')\mathbb{P}(\tau(0,e) = \tau(0,e') = +\infty, \tau(e,e') < +\infty)$$

$$\delta = \sum_{e,e'} p(e)p(e')\mathbb{P}(\tau(0,e) = \tau(0,e') = +\infty)$$

Notre but serait alors de prouver le théorème suivant :

Théorème 7.1. *Si* $X_0^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, *alors :*

$$X^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} X,$$

où X *est un super-processus de Dawson-Watanabe avec taux de branchement* 2γ *et dérive* $\beta\theta_0 - \delta\theta_1$.

Pour calculer la dérivée de Radon-Nikodým de ce processus par rapport au modèle du voteur renormalisé, nous devons donner une représentation du modèle du voteur, de la même manière que nous avons calculé les moments de la marche aléatoire branchante. Or on sait que le modèle du voteur à court rayon d'interaction (ξ_t) est la seule solution forte du problème suivant :

$$\xi_t(x) = \xi_0(x) + \sum_{x,y} \int_0^t (\xi_{s-}(y) - \xi_{s-}(x)) d\Lambda_s(x,y).$$

Grâce à cette formule, on peut écrire la dérivée de Radon-Nikodým de la manière suivante :

$$\left.\frac{d\tilde{R}^N}{dR^N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(M_t^{1,N} - M_t^{0,N}),$$

où on a posé :

$$M_t^{1,N} = \sum_{x,y} \int_0^t \xi_{s-}^N(y)(1 - \xi_{s-}^N(x)) f_s^1(x) d\widehat{\Lambda}_s(x,y) \text{ et}$$

$$M_t^{0,N} = \sum_{x,y} \int_0^t \xi_{s-}^N(x)(1 - \xi_{s-}^N(y)) f_s^0(x) d\widehat{\Lambda}_s(x,y).$$

La convergence de la variation quadratique divisée par N est établi de la même manière que pour le processus de contact, et nous pouvons également prouver de la même manière qu'on ne peut pas avoir la convergence de la dérivée de Radon-Nikodým .

7.2 Modèle de Lotka-Volterra à temps discret

Définition 7.2. Un modèle de Lotka-Volterra à temps discret avec paramètres d'interaction α_0 et α_1 est un système de particules $\xi_n : \mathbb{Z}^d \to \{0,1\}$ avec distribution du nombre d'enfants évoluant de la façon suivante :

$$\xi_n(x) \to \begin{cases} \xi_{n+1}(x) = 0 \text{ avec probabilité } f_n^0(x) - \varepsilon_n(x) \\ \xi_{n+1}(x) = 1 \text{ avec probabilité } f_n^1(x) + \varepsilon_n(x) \end{cases}$$

où nous notons $\varepsilon_n(x) = (\alpha_0 - 1) f_n^0(x)^2 (1 - \xi_n(x)) - (\alpha_1 - 1) f_n^1(x)^2 \xi_n(x)$.

Soit ξ_t^N une suite de modèles de Lotka-Volterra avec paramètres d'interaction $1+\frac{\theta_0}{N}, 1+\frac{\theta_1}{N}$. Nous notons également la loi du processus renormalisé de la façon usuelle $\tilde{R}^N$:

$$X_t^N = \frac{1}{N}\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \xi^N_{\lfloor Nt\rfloor}(x)\delta_{\frac{x}{\sqrt{N}}}.$$

Théorème 7.2. *Soit* $X_0^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} \mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$, *alors :*

$$X^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} X,$$

où X *est un super-processus de Dawson-Watanabe avec taux de branchement* γ *et dérive* $\beta\theta_0 - \delta\theta_1$, *où :*

$$\beta = \sum_{e,e'} p(e)p(e')\mathbb{P}(\tau(0,e) = \tau(0,e') = +\infty, \tau(e,e') < +\infty)$$

$$\delta = \sum_{e,e'} p(e)p(e')\mathbb{P}(\tau(0,e) = \tau(0,e') = +\infty)$$

On calcule maintenant la dérivée de Radon-Nikodým de ce processus contre le modèle du voteur, on a :

$$L_t^N = \prod_{n=0}^{\lfloor Nt\rfloor}\prod_x \left(1+\xi_{n+1}(x)\frac{\varepsilon_n(x)}{f_n^1(x)} + (1-\xi_{n+1}(x))\frac{\varepsilon_n(x)}{f_n^0(x)}\right),$$

qui peut être réécrit immédiatement, en utilisant le fait que la mesure martingale orthogonale du modèle du voteur à temps discret est la mesure purement atomique M telle que :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{Z}^d,\ \ M(k,x) = \xi_k(x) - f^1_{k-1}(x) = M_{k,x};$$

comme le produit sur l'espace et le temps de :

$$L_{n,x} = \left(1 + M_{n,x}\frac{\varepsilon_n(x)}{f_n^0(x)f_n^1(x)}\right).$$

Une fois encore, nous voudrions montrer la convergence jointe du processus et de sa variation quadratique, avec les mêmes problèmes que l'on a toujours eu : ε_n ne converge pas vers une constante.

8 Conclusion

Nous avons vu à travers tous ces exemples que les deux plus grands problèmes rencontrés lorsqu'on tente de prouver la convergence de la dérivée de Radon-Nikodým de notre processus vers la limite espérée. Le premier d'entre eux ne concerne que les processus à temps continus, car la dérivée de Radon-Nikodým prend en compte le décalage de temps en $O_P(\frac{1}{N})$ lorsque les taux ne sont pas symétriques.

Le second problème est que notre processus, quand il n'y a pas limite càdlàg de la dérive, il devient alors plus difficile, et parfois même impossible.

Par conséquent, prouver la convergence de la plupart des processus que nous avons étudié, il reste nécessaire de prouver la tension de cette suite de processus, puis caractériser la limite en utilisant le problème de martingales (1).

9 Annexe

Dans cette section, nous allons prouver l'équation (3). Ici, nous notons ξ_t^N une suite de marches aléatoires branchantes avec taux N et noyau symétrique $p_N = p(\frac{\cdot}{\sqrt{N}})$ sur $\frac{\mathbb{Z}^d}{\sqrt{N}}$, vérifiant :

$$\frac{1}{N}\xi_0^N \underset{N\to+\infty}{\Longrightarrow} \mu.$$

On note $X_t^N = \frac{1}{N}\xi_t^N$, qui est compris comme une mesure sur $\mathbb{R}^d$.

Pour les calculs qui suivront, nous écrirons η une marche aléatoire branchante avec vitesse N et noyau p sur $\mathbb{Z}^d$, commençant avec une unique particule à l'instant $t = 0$ en position O. Soit $\left(\eta^{x,i}\right)_{x\in\mathbb{Z}^d, i\in\mathbb{N}}$ une suite de marches aléatoires branchantes indépendantes de vitesse N, partant d'une particule unique en x à l'instant $t = 0$.

Nous notons également :

- $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de noyau p,
- $\Pi(t)$ un processus de Poisson d'intensité 1,
- $V_t = B_{\Pi(t)}$ une marche aléatoire (à temps continu) sur $\mathbb{Z}^d$ de noyau p et vitesse 1,
- $V_t', V_t'', \cdots$ des copies indépendantes de V_t.

9.1 Autour de la marche aléatoire

Ici nous nous intéresserons à V_t la trajectoire d'une unique particule dans une marche aléatoire branchante. La borne supérieure que nous donnerons ici sera très utile plus tard.

Lemme 9.1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $s > 0$ et $x \in \mathbb{Z}^d$:*

$$\mathbb{E}(p(x + V_s)) < C(1 + s)^{-d/2}$$

Preuve. Nous avons $E(p(x + V_s)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Pi(s) = k)\mathbb{E}(p(x + V_k))$, qui peut être réécrit en utilisant le fait que :

$$\mathbb{E}(p(V_k + x)) = \mathbb{P}(V_{k+1} = -x) < C(1 + k)^{-d/2}.$$

Ensuite nous appliquons un résultat de grands déviations pour le processus de Poisson, nous avons :

$$\mathbb{P}\left(\Pi(s) < \frac{s}{2}\right) \le e^{-cs},$$

pour un certain $c > 0$. Nous avons également :

$$\mathbb{E}(p(x + V_s)) \le \mathbb{P}(\Pi_s < \frac{s}{2}) + \left(1 + \frac{s}{2}\right)^{-d/2}.$$

□

9.2 Nombre moyen de voisins d'une particule

Nous étudions maintenant le comportement du nombre moyen de voisins d'une particule dans la marche aléatoire branchante. Comme dans le processus limite, seule les densités locales ont un sens, nous allons étudier la quantité suivante :

$$Z_t^N(\phi) = \frac{1}{N}\sum_{x,y}\phi(x)\xi_t^N(x)\xi_t^N(y)p_N(x,y).$$

Dans ce but, nous nous intéressons pour commencer à cette valeur quand la marche aléatoire branchante commence avec une unique particule en $t=0$, on note :

$$Z_t'^N(\phi) = \sum_{x,y}\phi(x)\eta_t(x)\eta_t(y)p(x,y).$$

Lemme 9.2. *Il existe $b>0$ tel que pour toute suite $\tau_N \to 0$ telle que $N\tau_N \to +\infty$, nous avons :*

$$\mathbb{E}(Z_{\tau_N}'^N(1)) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} b &= \int_0^{+\infty}\mathbb{E}(p(V_s))ds = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(V_s+W=0)ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(p(B_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{B_n=0\}}). \end{aligned}$$

Preuve. Nous savons que pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sum_{x,y}\eta_t(x)\eta_t(y)p(x,y)) &= \sum_{x,y}\eta_0(P_t(x))\eta_0(P_t(y))p(x,y) \\ &\quad +N\sum_{x,y}\int_0^t \mathbb{E}(\eta_u(P_{t-u}(x)P_{t-u}(y)) \\ &\quad +\eta_u(P^N(P_{t-u}(x)P_{t-u}(y))))p(x,y)du, \end{aligned}$$

qui peut être réécrit, en échangeant la somme et l'espérance, et en utilisant la condition initiale :

$$\mathbb{E}(Z_t'^N(1)) = \mathbb{E}(p(V_{2Nt})) + 2N\int_0^t \mathbb{E}(p(V_{2Ns}))ds.$$

Nous utilisons maintenant le Lemme 9.1. pour observer que :

$$\mathbb{E}(p(V_{2N\tau_N})) \le C(1+2N\tau_N)^{-d/2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus nous pouvons calculer l'autre terme :

$$\begin{aligned} 2N\int_0^{\tau_N}\mathbb{E}(p(V_{2Ns}))ds &= \int_0^{2Nt}\mathbb{E}(p(V_s))ds \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\mathbb{E}(p(V_s))ds, \end{aligned}$$

qui est fini en utilisant encore la borne donnée par le Lemme 9.1.

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} b &= \int_0^{+\infty}\mathbb{E}(p(V_s))ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(p(B_n))\int_0^{+\infty}P(\Pi(s)=n)ds \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(p(B_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_e p(e)\mathbb{P}(B_n=e) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(B_n=0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(B_{n+1}=0)\int_0^{+\infty}P(\Pi(s)=n)ds \\ &= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(V_s+W=0)ds \end{aligned}$$

□

Nous voyons ainsi qu'en commençant d'une unique particule, le nombre moyen de voisins devient très rapidement égal à b. Nous nous intéressons maintenant à la variance de cette quantité, et tentons de trouver une borne supérieure.

Lemme 9.3. *Il existe une constante positive $C>0$ telle que pour tout $t>0$ et $N\in\mathbb{N}$:*

$$\mathbb{E}(Z_t'^N(1)^2)\leq CNt.$$

Preuve. Tout au long de cette preuve, nous noterons C une constante assez grande, qui pourra être modifiée au fur et à mesure des calculs, mais reste indépendante de N et t. Nous calculons le second moment de $Z_t'^N(1)$,

$$\mathbb{E}(Z_t'^N(1)^2)=\sum_{a,b,c,d}\mathbb{E}(\eta_t(a)\eta_t(b)\eta_t(c)\eta_t(d))p(a,b)p(c,d).$$

Nous avons à calculer une borne supérieure pour le quatrième moment de la marche aléatoire branchante. Nous utiliserons des symétries pour réduire autant que possible les prochains calculs. Nous utiliserons souvent la borne du Lemme 9.1. Pour commencer, nous allons réduire ces calculs à des calculs de troisième moment d'une marche aléatoire branchante :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(Z_t'^N(1)^2) \\
= \quad & \mathbb{E}(p(V_{2Nt}))^2 \\
+ \quad & 4N\sum_{a,b}\int_0^t \mathbb{E}(\eta_s(a)\eta_s(b)\eta_s(1)) \\
& \mathbb{E}(p(b-a+V_{2N(t-s)}))\mathbb{E}(p(V_{2N(t-s)}))ds \\
+ \quad & 8N\sum_{a,b,c}\int_0^t \mathbb{E}(\eta_s(a)\eta_s(b)\eta_s(c)) \\
& \mathbb{E}(p(b-a+V_{2N(t-s)}))\mathbb{E}(p(c-a+V_{2N(t-s)}))ds.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors donner les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_t'^N(1)^2) \quad \leq \quad & 1 + CN\int_0^t \frac{1}{(1+N(t-s))^{d/2}} \\
& \sum_{a,b}\mathbb{E}(\eta_s(a)\eta_s(b)\eta_s(1))\mathbb{E}(p(b-a+V_{2N(t-s)}))ds.
\end{aligned}$$

Il nous suffit juste de donner une bonne borne supérieure pour l'espérance sous l'intégrale :

$$\begin{aligned}
& \sum_{a,b}\mathbb{E}(\eta_s(a)\eta_s(b)\eta_s(1))\mathbb{E}(p(b-a+V_{2N(t-s)}) \\
= \quad & \mathbb{E}(p(V_{2Nt})) \\
& +2N\int_0^s \mathbb{E}(\eta_u(1)^2)\mathbb{E}(p(V_{2N(t-u)}))du \\
& +4N\sum_{a,b}\int_0^s \mathbb{E}(\eta_u(a)\eta_u(b))\mathbb{E}(p(b-a+V_{2N(t-u)}))du.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant utiliser le fait que $\mathbb{E}(\eta_u(1)^2) = 1 + 2Nu$, pour borner ce terme par :

$$C(1+\int_{N(t-s)}^{Nt}\frac{1+Nt}{(1+u)^{d/2}}du) \leq C(1+Nt).$$

En utilisant ceci, nous avons finalement :

$$E(Z_t'^N(1)^2) \leq C(1+Nt)(1+\int_0^t \frac{1}{(1+N(t-s))^{d/2}}) \leq C(1+Nt).$$

Ce qui termine la preuve de notre lemme. □

Remarque 9.1. Avoir le même genre de bornes dans le cas $d = 2$ n'augmente pas trop la difficulté, nous avons juste à tenir compte de quelques modifications logarithmiques.

Nous avons maintenant assez d'outils pour prouver le résultat le plus important de cette section : que les quantités X_t^N et Z_t^N sont proches l'une de l'autre, ce qui nous permet d'obtenir la convergence du processus, au moins pour $t \geq \varepsilon$ pour le nombre moyen de voisins d'un individu vers b. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 9.1. *Pour toute fonction ϕ continue Lipschitzienne, pour tous $t > 0$, nous avons :*

$$\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,t]} |\int_0^s Z_u^N(\phi) - bX_u^N(\phi)du|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. La preuve de ce théorème sera fait en plusieurs étapes. Pour commencer, nous remplacerons les quantités $X_t^N(\phi)$ et $Z_t^N(\phi)$ par des approximations : au lieu de compter une particule dans la position qu'elle occupe, on la compte là où était son ancêtre peu de temps auparavant, et en les multipliant soit par le nombre de descendants de cet ancêtre, soit par le nombre moyen de voisins parmi les descendants. Nous avons déjà vu plus tôt que ces deux quantités sont proches.

Nous remplacerons également b par une approximation, et nous prouverons alors le théorème pour les quantités modifiées.

Pour finir, nous prouverons que les approximations que nous avons choisi sont assez bonnes pour résoudre ce problème.

Nous commençons par fixer une suite $\tau_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ tel que $N\tau_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Nous remonterons de τ_N dans le passé pour trouver la position de l'ancêtre d'une particule en x, cette quantité est choisie de façon à ce qu'il y ait beaucoup de sauts durant l'intervalle de temps τ_N, mais que ce temps tende vers 0.

En étudiant la propriété de branchement, nous observons qu'une marche aléatoire branchante commençant avec k particules est exactement la somme de k marches aléatoires branchantes indépendantes, chacune commençant d'une unique particule.

Pour $t > 0$, en utilisant la propriété de Markov, on a une famille $(\eta^{z,i})_{z\in\frac{\mathbb{Z}^d}{\sqrt{N}},i\in\mathbb{N}}$ de marches aléatoires branchantes indépendantes issues d'une unique particule située en $\sqrt{N}z$, tel que :

$$\xi_t^N(x) = \sum_z \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z)} \eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(\sqrt{N}x),$$

où nous utilisons la convention suivante : pour $s < 0$, $\xi_s^N(x) = \xi_0^N(x)$.

Nous pouvons alors poser les approximations suivantes :

$$\tilde{X}_t^N(\phi) = \frac{1}{N}\sum_z \phi(z) \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z)} \eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(1)$$

pour X^N, et pour Z^N :

$$\tilde{Z}_t^N(\phi) = \frac{1}{N}\sum_z \phi(z) \sum_{i=0}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z)} \sum_{x,y} \eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(y)p(x,y)$$

Pour finir, nous noterons $\tilde{b}_N = \mathbb{E}(Z'^N_{\tau_N\wedge t}(1))$ une approximation de b, prouvons maintenant le théorème pour ces quantités.

Lemme 9.4. *Pour toute fonction ϕ continue Lipschitzienne, pour tout $t > 0$ on a :*

$$\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,t]} |\int_0^s \tilde{Z}^N_u(\phi) - \tilde{b}_N\tilde{X}^N_u(\phi)du|) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Nous commençons par une notation :

$$X^{z,i}_s = \eta^{z,i}_{s\wedge t}(1) \text{ and}$$
$$Z^{z,i}_s = \sum_{x,y} \eta^{z,i}_{s\wedge t}(x)\eta^{z,i}_{s\wedge t}(y)p(x,y).$$

Nous pouvons réécrire la formule de la différence que nous calculons de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \tilde{Z}^N_t(\phi) - \tilde{b}_N\tilde{X}^N_t(\phi) \\
= \ & \frac{1}{N}\sum_z \phi(z) \sum_{i=0}^{\xi^N_{t-\tau}(z)} Z^{z,i}_{\tau_N} - \tilde{b}_N X^{z,i}_{\tau_N}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\tilde{Z}^N_t(\phi) - \tilde{b}_N\tilde{X}^N_t(\phi)$ est la somme de variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle, donc l'espérance de la somme est nulle, et la variance vaut :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((\tilde{Z}^N_t(\phi) - \tilde{b}_N\tilde{X}^N_t(\phi))^2) \\
= \ & \frac{1}{N^2}\sum_z \phi(z)^2\mathbb{E}(\xi^N_{t-\tau_N}(z))\mathbb{E}((Z^{z,i}_{\tau_N} - \tilde{b}_N X^{z,i}_{\tau_N})^2) \\
= \ & \frac{X^N_0(P_{t-\tau_N}(\phi^2))}{N}\mathbb{E}((Z'^N_{\tau_N\wedge t}(1) - \tilde{b}_N\eta_{\tau_N\wedge t}(1))^2) \\
\leq \ & C\|\phi\|^2_\infty X^N_0(1)\tau_N.
\end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, nous avons utilisé le Lemme 9.2., qui donne $\tilde{b}_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$, le Lemme 9.3., le fait que $N\tau_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la borne supérieure suivante :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((Z'^N_{\tau_N\wedge t}(1) - \tilde{b}_N\eta_{\tau_N\wedge t}(1))^2) \\
= \ & \mathbb{E}((Z'^N_{\tau_N\wedge t}(1))^2) - 2\tilde{b}_N\mathbb{E}(Z'^N_{\tau_N\wedge t}(1)\eta_{\tau_N\wedge t}(1)) + \mathbb{E}((\eta_{\tau_N\wedge t}(1))^2) \\
\leq \ & C(1 + (\tau_N \wedge t)N) \leq CN\tau_N
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc dominer l'intégrale pour $t \geq \tau_N$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau_N}^t \mathbb{E}(|\tilde{Z}^N_s(\phi) - \tilde{b}_N\tilde{X}^N_s(\phi)|)ds \\
\leq \ & \int_{\tau_N}^t \mathbb{E}((\tilde{Z}^N_s(\phi) - \tilde{b}_N\tilde{X}^N_s(\phi))^2)^{1/2}ds \\
\leq \ & C\tau_N^{1/2}\|\phi\|_\infty X^N_0(1)^{1/2}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Pour dominer l'intégrale entre 0 et τ_N, il nous suffira d'utiliser les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau_N} \mathbb{E}(|\tilde{Z}_s^N(\phi) - \tilde{b}_N \tilde{X}_s^N(\phi)|)ds \\
\leq\ & \|\phi\|_\infty \int_0^{\tau_N} \tilde{b}_N \mathbb{E}(\tilde{X}_s^N(1)) + \mathbb{E}(\tilde{Z}_s^N(1))ds \\
\leq\ & \|\phi\|_\infty (X_0^N(1)\tau_N b_{\tau_N} + X_0^N(1)\mathbb{E}(Z_{\tau_N}'^N(1)) \\
\leq\ & C\|\phi\|_\infty X_0^N(1)\tau_N \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Les deux bornes obtenues nous permettent de finir la preuve. En effet nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,t]} |\tilde{Z}_s^N(\phi) - \tilde{b}_N \tilde{X}_s^N(\phi)du| &\leq \mathbb{E}(\int_0^t |\tilde{Z}_s^N(\phi) - \tilde{b}_N \tilde{X}_s^N(\phi)|du) \\
&\leq \int_0^t \mathbb{E}(|\tilde{Z}_s^N(\phi) - \tilde{b}_N \tilde{X}_s^N(\phi)|)du \\
&\leq C\|\phi\|_\infty X_0^N(1)(\tau_N)^{1/2} t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant prouver que les approximations des quantités que nous avons choisis sont proches de celles attendues.

Lemme 9.5. *Pour toute fonction ϕ continue Lipschitzienne, pour tout $t > 0$, on a :*

$$\mathbb{E}(\int_0^t |X_s^N(\phi) - X_s^{N,\tau_N}(\phi)|ds) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Commençons par donner une représentation de la différence entre les deux termes en fonction de marches aléatoires branchantes indépendantes :

$$\begin{aligned}
|X_t^N(\phi) - \tilde{X}_t^N(\phi)| &= |\frac{1}{N}\sum_z \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z)} \sum_x (\phi(x) - \phi(z))\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(x\sqrt{N})| \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_z \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z)} \sum_x |\phi(x) - \phi(z)|\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(x\sqrt{N}) \\
&\leq \frac{C}{N}\sum_z \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z)} \sum_x \|z - x\|\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(x\sqrt{N}).
\end{aligned}$$

Cette dernière majoration est la somme de variables aléatoires i.i.d., donc d'espérance au plus

$$\frac{C}{N}\mathbb{E}(\xi_{t-\tau_N}^N(1))\mathbb{E}(\sum_x \frac{\|x\|}{\sqrt{N}}\eta_{\tau_N\wedge t}(x)),$$

et de plus, nous avons :

$$\mathbb{E}(\sum_x \|x\|\eta_{\tau_N \wedge t}(x)) = \mathbb{E}(|V_{N\tau_N}|) \leq C\sqrt{N\tau_N}.$$

Ce qui nous permet de finir la preuve, car :

$$\mathbb{E}(\int_0^t |X_s^N(\phi) - \tilde{X}_s^N(\phi)|ds) \leq CtX_0^N(1)\sqrt{\tau_N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Pour finir, il nous faut prouver que $\tilde{Z}^N$ est une bonne approximation de Z^N. En écrivant Z^N comme somme des termes $\eta^{z,i}$, nous pouvons séparer la preuve en deux parties disjointes :

$$\begin{aligned}
Z_t^N(\phi) &= \sum_{x,y} \phi(x)\xi_t^N(x)\xi_t^N(y)p(x,y) \\
&= \sum_{z,z'} \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z)} \sum_{j=1}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z')} \sum_{x,y} \phi(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z',j}(y)p(x,y) \\
&= \sum_{z} \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau}^N(z)} \sum_{x,y} \phi(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(y)p(x,y) \\
&+ \sum_{z,z'} \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z)} \sum_{j=1,(z,i)\neq(z',j)}^{\xi_{t-\tau_N}^N(z')} \sum_{x,y} \phi(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z',j}(y)p(x,y).
\end{aligned}$$

Commençons par montrer que le premier de ces deux termes (qui ne compte comme voisins que les individus qui sont proches parents les uns des autres – et voisins) est à lui seul proche de $\tilde{Z}_t^N(\phi)$.

Lemme 9.6. *Nous noterons par la suite :*

$$Z_t^{N,1}(\phi) = \sum_{z} \sum_{i=1}^{\xi_{t-\tau}^N(z)} \sum_{x,y} \phi(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(x)\eta_{\tau_N\wedge t}^{z,i}(y)p(x,y)$$

Pour toute fonction ϕ continue Lipschitzienne, pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbb{E}(\int_0^t |Z_s^{N,1}(\phi) - \tilde{Z}_s^N(\phi)|ds) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. De la même manière que précédemment, nous commencerons par estimer la différence entre les deux quantités évaluées de façon probabiliste :

$$\begin{aligned}
|Z_t^{N,1}(\phi) &- \tilde{Z}_t^N(\phi)| \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_z \sum_{i=1}^{\xi^N_{t-\tau_N}(z)} \sum_{x,y} |\phi(\frac{x}{\sqrt{N}}) - \phi(z)|\eta^{z,i}_{\tau_N\wedge t}(x)\eta^{z,i}_{\tau_N\wedge t}(y)p(x,y) \\
&\leq \frac{C}{N}\sum_z \sum_{i=1}^{\xi^N_{t-\tau_N}(z)} \sum_{x,y} \|z - \frac{x}{\sqrt{N}}\|\eta^{z,i}_{\tau_N\wedge t}(x)\eta^{z,i}_{\tau_N\wedge t}(y)p(x,y).
\end{aligned}$$

Une fois encore, cette dernière majoration est la somme de variables aléatoires i.i.d., donc son espérance est au plus égale à :

$$\frac{C}{N}\mathbb{E}(\xi^N_{t-\tau_N}(1))\mathbb{E}(\sum_{x,y}\frac{\|x\|}{\sqrt{N}}\eta_{\tau_N\wedge t}(x)\eta_{\tau_N\wedge t}(y)p(x,y)),$$

de plus, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sum_{x,y}\|x\|\eta_s(x)\eta_s(y)p(x,y)) \\
=\ & \mathbb{E}(\|V_{Ns}\|p(V_{2Ns})) \\
+\ & N\int_0^s \mathbb{E}((\|V_{N(s-u)+V'_{Nu}}\| + \|V_{N(s-u)} + V'_{Nu} + W\|)p(V_{2N(s-u)}))du \\
\leq\ & C\sqrt{Ns}(1 + \int_0^s \frac{Ndu}{(1+Nu)^{d/2}} \\
\leq\ & C\sqrt{Ns},
\end{aligned}$$

où pour la première majoration, nous avons utilisé l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|V_{t-s} + V'_s\|p(V_{2(t-s)})) &= \mathbb{E}(\|V_{t-s} + V'_s\|\mathbb{E}(p(V_{2(t-s)})|V_{t-s})) \\
&\leq \frac{C}{(1+t-s)^{d/2}}\mathbb{E}(\|V_t\|).
\end{aligned}$$

Nous obtenons maintenant que :

$$\mathbb{E}(\int_0^t |Z_s^{N,1}(\phi) - \tilde{Z}_s^N(\phi)|ds) \leq CtX_0^N(1)\sqrt{\tau_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui termine la preuve, très similaire à la précédente. □

Nous avons maintenant besoin d'un dernier résultat pour borner le terme d'interférences entre les particules qui sont voisines, mais qui ne sont pas de proches parents (i.e. que leur dernier ancêtre commun, s'il existe, soit âgé de plus de τ_N).

Lemme 9.7. *Nous noterons par la suite :*

$$Z_t^{N,2}(\phi) = \frac{1}{N} \sum_{z,z'} \sum_{i=1}^{\xi^N_{t-\tau_N}(z)} \sum_{j=1,(z,i)\neq(z',j)}^{\xi^N_{t-\tau_N}(z')} \sum_{x,y} \phi(x) \eta^{z,i}_{\tau_N \wedge t}(x) \eta^{z',j}_{\tau_N \wedge t}(y) p(x,y).$$

Pour toute fonction ϕ continue Lipschitzienne, pour tout $t > 0$, nous avons :

$$\mathbb{E}(\sup_{s\in[0,t]} | \int_0^s Z_u^{N,2}(\phi) du|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Commençons par borner $\mathbb{E}(|Z_t^{N,2}(\phi)|)$ pour $t > \tau_N$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|Z_t^{N,2}(\phi)|) &\leq \frac{\|\phi\|_\infty}{N} \sum_{z,z'} \mathbb{E}(\xi^N_{t-\tau_N}(z) \xi^N_{t-\tau_N}(z')) \\
& \sum_{x,y} \mathbb{E}(\eta_{\tau_N}(x)) \mathbb{E}(\eta_{\tau_N}(y)) p(x+z, y+z') \\
&\leq \frac{\|\phi\|_\infty}{N} \sum_{z,z'} \mathbb{E}(\xi^N_{t-\tau_N}(z) \xi^N_{t-\tau_N}(z')) \mathbb{E}(p(z'-z+V_{2N\tau_N})) \\
&\leq \frac{C}{N} \sum_{z,z'} \xi_0^N(z) \xi_0^N(z') \mathbb{E}(p(z'-z+V_{2Nt})) \\
&+ C \int_{\tau_N}^t \xi_0^N(1) \mathbb{E}(p(V_{2Ns})) ds \\
&\leq CNX_0^N(1)^2 \frac{1}{(1+Nt)^{d/2}} + CX_0^N(1) \int_{2N\tau_N}^{2Nt} \frac{ds}{(1+s)^{d/2}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_N}^t \mathbb{E}(|Z_s^{N,2}(\phi)|) ds &\leq CX_0^N(1)^2 \int_{N\tau_N}^{Nt} \frac{ds}{(1+s)^{d/2}} \\
&\quad + \frac{C}{N} X_0^N(1) \int_{2N\tau_N}^{2Nt} \int_{2N\tau_N}^{s} \frac{du}{(1+u^{d/2})} \\
&\leq C(X_0^N(1)^2 + X_0^N(1) t \int_{N\tau_N}^{+\infty} \frac{ds}{(1+s)^{d/2}} \\
&\quad \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Nous nous intéressons maintenant à l'autre intégrale, en utilisant le fait que μ est sans atome pour donner la conclusion :

$$\begin{aligned}
& |\int_0^{\tau_N} \mathbb{E}(Z_s^{N,2}(\phi))ds| \\
\leq\ & \frac{C}{N^2}\sum_{z,z'} \xi_0^N(z)\xi_0^N(z') \int_0^{2N\tau_N} \mathbb{E}(p(z'-z+V_s))ds \\
\leq\ & \frac{C}{N^2}\sum_{z,z'} \xi_0^N(z)\xi_0^N(z') \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(p(z'-z+B_n)) \int_0^{2N\tau_N} \mathbb{P}(\Pi(s)=n)ds \\
\leq\ & CX_0^N(1)^2 \frac{1}{(1+N)^{d/2}} \int_0^{2N\tau_N} \mathbb{P}(\Pi(s)>N)ds \\
& +CX_0^N \times X_0^N(\{\|y-x\|<\varepsilon\}) + CX_0^N(1)^2 \sum_{n=\varepsilon\sqrt{N}}^{N} (1+n)^{-d/2}ds \\
& \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

Ce dernier lemme nous permet de finir la preuve du Théorème 9.1, et en particulier la preuve de l'équation (3). □