Stabilité de l'inégalité de Faber-Krahn en courbure de Ricci positive

Jérôme Bertrand*
Institut de mathématiques,
Université de Neuchâtel, Suisse.
E-mail: jerome.bertrand@unine.ch

Abstract

P. Bérard and D. Meyer proved a Faber-Krahn inequality for domains in compact manifolds with positive Ricci curvature. We prove stability results for this inequality.

Introduction

En utilisant l'inégalité isopérimétrique de Lévy-Gromov [11], P. Bérard et D. Meyer ont démontré une inégalité du type Faber-Krahn pour les domaines d'une variété compacte à courbure de Ricci positive.

Théorème 0.1 (Bérard-Meyer, [3]) *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n dont la courbure de Ricci vérifie Ric $\geq (n-1)g$. Soit Ω un domaine régulier de M et Ω^* le domaine symétrisé de Ω, c'est-à-dire une boule géodésique de la sphère canonique $(\mathbb{S}^n, can)$ vérifiant $\frac{\mathrm{vol}\,(\Omega)}{\mathrm{vol}\,(M)} = \frac{\mathrm{vol}\,(\Omega^*)}{\mathrm{vol}\,(\mathbb{S}^n)}$. Sous ces hypothèses, on a l'inégalité*

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega^*),$$

où λ_1^D désigne la première valeur propre de Dirichlet du domaine sur l'espace correspondant. De plus, l'égalité a lieu si et seulement si le triplet (Ω, M, g) est isométrique au triplet $(\Omega^*, \mathbb{S}^n, can)$.

L'objet de cet article est d'étudier les domaines des variétés à courbure de Ricci positive dont la première valeur propre de Dirichlet est proche de celle de leur domaine symétrisé.

*Soutenu par la requête 20-101469 du FNRS.

La première remarque est que de tels domaines ne sont pas nécessairement homéomorphes à des boules euclidiennes. En effet si l'on retire des ensembles de petite capacité à une calotte sphérique de la sphère canonique (par exemple des boules de petit rayon), on modifie peu la première valeur propre de Dirichlet [6, 15]. Il est également facile de construire des exemples de variété qui ne sont pas proches, pour la distance de Gromov-Hausdorff, de la sphère canonique et qui pourtant contiennent des domaines dont la première valeur propre de Dirichlet est arbitrairement proche de celle de leur domaine symétrisé (par exemple en lissant aux extrémités des sinus produits tordus de la forme $((0,\pi)\times\mathbb{S}^{n-1}, dt^2+\varepsilon^2\sin^2 t\, can)$ avec $\varepsilon>0$ petit et en considérant des domaines de la forme $(0,a)\times\mathbb{S}^{n-1}$). Signalons enfin qu'il est également possible de construire de tels exemples sur des variétés à courbure de Ricci positive, non homéomorphes à la sphère en utilisant les métriques construites sur l'espace projectif complexe par M. Anderson [1]. Muni de ces métriques l'espace projectif complexe est proche, pour la distance de Gromov-Hausdorff, d'un sinus produit tordu, pour plus de détails sur cet exemple nous renvoyons à [5].

Dans cet article nous démontrons un résultat de stabilité optimal, au vue des remarques précédentes, lorsque la première valeur propre d'un domaine convexe est proche de celle d'un hémisphère $\mathbb{S}^{n+}$ de la sphère canonique de dimension n.

Théorème 0.2 *Il existe des fonctions $\eta(\varepsilon)$ et $\tau(\varepsilon)$ telles que, pour toute variété riemannienne compacte (M^n,g) dont la courbure de Ricci vérifie $Ric\geq(n-1)g$, pour tout domaine régulier Ω de M, géodésiquement convexe, de volume $\mathrm{vol}\,\Omega\leq\frac{1}{2}\mathrm{vol}\,M$ et dont la première valeur propre de Dirichlet vérifie*

$$\lambda_1^D(\Omega)\leq\lambda_1^D(\mathbb{S}^{n+})+\epsilon,$$

alors, en notant d_H la distance de Hausdorff, il existe x_0 dans Ω tel que

$$d_H(\Omega,B(x_0,\frac{\pi}{2}))\leq\tau(\varepsilon).$$

De plus, il existe un sinus produit tordu $((0,\pi)\times N,d)$ tel que

$$d_{GH}((M,d_g),((0,\pi)\times N,d))\leq\tau(\varepsilon),$$
$$d_{GH}((\Omega,d_g),((0,\tfrac{\pi}{2})\times N,d))\leq\tau(\varepsilon),$$

où d_g est la distance induite par la métrique riemannienne g et d_{GH} désigne la distance de Gromov-Hausdorff. Nous renvoyons à la troisième partie de cet article pour une définition des sinus produits tordus.

Dans la deuxième partie de cet article, nous démontrons également un résultat de stabilité plus faible mais sous une hypothèse de courbure moyenne du bord positive (théorème 2.4).

Dans le théorème 0.2, l'hypothèse sur le volume relatif du domaine implique par le résultat de P. Bérard et D. Meyer que la première valeur propre est supérieure ou égale à celle d'un hémisphère. Cet hypothèse sur le volume relatif est nécessaire pour obtenir le résultat sur la variété ambiante. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer un produit tordu de la forme $((0, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{S}^{n-1}, dt^2 + \varepsilon^2 \sin^2 t can)$ que l'on recolle avec un hémisphère de $(\mathbb{S}^n, \varepsilon^2\, can)$. Le théorème 0.2 généralise dans le cas de l'hémisphère, un résultat de A. Avila [2] sur certains domaines convexes de la sphère $\mathbb{S}^2$.

Théorème 0.3 (Avila) *Soit Ω un domaine régulier géodésiquement convexe contenu dans un hémisphère de $\mathbb{S}^2$. Soit B une boule de même volume que Ω. Supposons que*
$$\lambda_1^D(\Omega) \leq \lambda_1^D(B) + \varepsilon\,,$$
alors il existe une fonction $\tau(\varepsilon)$ dépendant de $\mathrm{vol}\,(\Omega)$, $\mathrm{vol}\,(\partial\Omega)$ *et du rayon de B telle que Ω est $\tau(\varepsilon)$-Hausdorff proche de B.*

Un des éléments de la preuve du théorème 0.2 est de montrer que la première fonction propre du domaine considéré est proche de la fonction propre correspondante dans le cas modèle. Nous avons regroupé ces résultats dans la première partie de cet article. Dans la deuxième partie, nous démontrons un résultat de stabilité plus faible que le théorème 0.2 mais où l'hypothèse sur la convexité est remplacée par une hypothèse (plus faible) de courbure moyenne du bord positive (théorème 2.4). Nous utilisons ensuite ce résultat pour démontrer dans une troisième partie le théorème 0.2.

1 Résultats préliminaires

Définition 1.1 *On note $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ l'ensemble (des classes d'isométrie) des variétés riemanniennes connexes, compactes, de dimension n dont la courbure de Ricci vérifie $Ric \geq (n-1)g$.*

Soit $p \geq 1$ un nombre réel et h appartenant à $L^p(M)$. On note
$$||h||_{L^p} = \left(\frac{1}{\mathrm{vol}\ M}\int_M |h|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$
On utilisera la définition usuelle pour la norme L^∞.

On notera $\tau(\varepsilon), r(\varepsilon), \eta(\varepsilon)$, etc ... de manière générique, toute quantité positive ne dépendant que de ε et de la dimension n de la variété, dont la limite quand ε tend vers 0 est 0.

Dans la suite, on suppose que la première fonction propre de Dirichlet sur un domaine Ω est normalisée par
$$\sup_\Omega f = 1. \tag{1}$$

1.1 Formule de Reilly

Les fonctions propres de la sphère canonique $\mathbb{S}^n$ de valeurs propres $\lambda_1(\mathbb{S}^n) = n$ vérifient l'équation

$$\operatorname{Hess} f + f can = 0 \tag{2}$$

avec *can* la métrique canonique de la sphère. Il en est de même pour la première fonction propre de Dirichlet d'un hémisphère. C'est une conséquence du lemme suivant (nous renvoyons à [7] pour plus de détails).

Lemme 1.2 *Soit f une fonction propre associée à la première valeur propre non nulle $\lambda_1(M)$ d'une variété riemannienne compacte (M, g). Soit Ω un domaine nodal de la fonction f alors*

$$\lambda_1^D(\Omega) = \lambda_1(M)$$

et la première fonction propre du domaine est la restriction de f à Ω.

Remarque 1.3 *On peut définir la première valeur propre de Dirichlet même lorsque le bord du domaine n'est pas régulier.*

Sous les hypothèses du théorème 0.2, la norme L^2 du membre de gauche de l'équation (2) reste petite. Cette estimation sur le hessien de la première fonction propre est une conséquence d'une formule due à R. Reilly [16].

Lemme 1.4 (Formule de Reilly) *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte éventuellement à bord lisse ∂M. Pour toute fonction f appartenant à $C^\infty(\overline{M})$, on a*

$$\begin{aligned} &\int_M |\operatorname{Hess} f|^2 - \int_M (\Delta f)^2 + \int_M \operatorname{Ric}(\nabla \mathrm{f}, \nabla \mathrm{f}) \\ &= -2 \int_{\partial M} < \nabla^{\partial M}(\frac{\partial f}{\partial \nu}), \nabla^{\partial M} f > - \int_{\partial M} H \left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\right)^2 - \int_{\partial M} \Pi(\nabla^{\partial M} f, \nabla^{\partial M} f) \end{aligned} \tag{3}$$

où $\overline{M} = M \cup \partial M$, $\nabla^{\partial M}$ désigne le gradient pour la métrique induite par g sur ∂M, où la courbure moyenne H est la trace de la seconde forme fondamentale définie par $\Pi(X, Y) = -g(D_X \eta, Y)$ avec η la normale unitaire rentrante et où le membre de droite est nul si la variété est sans bord.

On déduit de la formule de Reilly le

Lemme 1.5 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte (respectivement à bord, dont la courbure moyenne du bord est positive ou nulle) dont la courbure de Ricci vérifie $Ric \geq (n-1)g$. Notons λ la première valeur* *propre non nulle (respectivement de Dirichlet) et soit f une fonction propre associée à cette valeur propre. Supposons que cette valeur propre vérifie*

$$n \leq \lambda \leq n + \varepsilon$$

pour $0 < \varepsilon < 1$, alors il existe une constante $C(n)$ telle que

$$|| \operatorname{Hess} f + fg||_{L^2} \leq C(n)\, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\, ||f||_{L^2}.$$

Preuve : La formule de Reilly appliquée à f donne

$$\int_M |\operatorname{Hess} f|^2 - \int_M (\Delta f)^2 + \int_M \mathrm{Ric}(\nabla \mathrm{f}, \nabla \mathrm{f}) = - \int_{\partial \mathrm{M}} \mathrm{H} \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \nu} \right)^2 .$$

En utilisant l'hypothèse sur la courbure de Ricci et sur la courbure moyenne du bord ∂M, il vient

$$\int_M |\operatorname{Hess} f|^2 + \big((n-1)\lambda - \lambda^2\big) \int_M f^2 \leq 0.$$

On écrit ensuite le terme $\operatorname{Hess} f$ sous la forme $\operatorname{Hess} f = (\operatorname{Hess} f + \frac{\lambda}{n} fg) - \frac{\lambda}{n} fg$. Le premier terme étant de trace nulle, les deux termes sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel sur $L^2(M)$, l'hypothèse sur λ permet alors de conclure.

■

Un résultat du à J. Cheeger et T. Colding ([8], théorème 2.11) permet de déduire des informations géométriques de cette inégalité sur le hessien.

Lemme 1.6 ([8]) *Soit (M, g) un élément de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$. Il existe des constantes ne dépendant que de n notées $C(n)$ et $\tilde{C}(n)$ telles que pour tout ouvert U_1 et U_2 de M et pour toute fonction continue f sur M, on a*

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(U_1 \times U_2)} \int_{U_1 \times U_2} \left(\int_0^1 |(f \circ \gamma_{xy})''(t) + (f \circ \gamma_{xy})(t)|^2 dt \right) dxdy \leq C(n) \left(\frac{1}{\mathrm{vol}\ U_1} + \frac{1}{\mathrm{vol}\ U_2} \right) \int_M |\operatorname{Hess}(f) + fg|^2. \quad (4)$$

On obtient dans le cas particulier où U_1 et U_2 sont deux boules géodésiques de rayon r

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(U_1 \times U_2)} \int_{U_1 \times U_2} \left(\int_0^1 |(f \circ \gamma_{xy})''(t) + f \circ \gamma_{xy}(t)|^2 dt \right) dxdy \leq \frac{\tilde{C}(n)}{V(r)} || \operatorname{Hess}(f) + fg||_{L^2}^2, \quad (5)$$

où $V(r)$ désigne le volume d'une boule géodésique de $(\mathbb{S}^n, can)$ de rayon r.

Remarque 1.7 *La notation $U_1 \times U_2$ désigne en réalité le sous-ensemble de mesure pleine de ce produit, constitué par les couples (x, y) admettant une unique géodésique minimisante les reliant (notée γ_{xy}). Soit W un ouvert de M tel que toute géodésique minimisante dont les extrémités appartiennent à $U_1 \times U_2$ est contenue dans W. On peut remplacer dans (4), $\int_M |\operatorname{Hess}(f)+fg|^2$ par $\int_W |\operatorname{Hess}(f)+fg|^2$, c'est ce que nous ferons lorsque nous utiliserons ce résultat pour une fonction propre sur un domaine Ω d'un élément de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$.*

Preuve : Ce résultat est une application directe du théorème 2.11 de [8] à la fonction $|\operatorname{Hess} f + fg|^2$, en remarquant que pour toute géodésique γ paramétrée par longueur d'arc, on a

$$|(f \circ \gamma)''(t) + (f \circ \gamma)(t)|^2 \leq |\operatorname{Hess} f + fg|^2(\gamma(t)).$$

■

En appliquant le lemme 1.6 à une fonction f vérifiant les hypothèses du lemme 1.5 pour des boules B_1 et B_2 de rayon $r(\varepsilon)$ convenable (supposons que $r(\varepsilon)$ vérifie $\frac{\varepsilon}{V(r(\varepsilon))} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et que $||f||_{L^2} \leq 1$), on déduit du lemme 1.5 l'inégalité

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B_1 \times B_2)} \int_{B_1 \times B_2} \int_0^{d(x,y)} |(f \circ \gamma_{xy})''(t) + f \circ \gamma_{xy}(t)|^2 dt dx dy \leq \tilde{C}(n)\, \varepsilon^{\frac{1}{2}} . \quad (6)$$

Notons

$$C = \left\{ (x, y) \in B_1 \times B_2;\ \int_0^{d(x,y)} |(f \circ \gamma_{xy})''(t) + f \circ \gamma_{xy}(t)|^2 dt \leq \varepsilon^{\frac{1}{4}} \right\}.$$

On déduit de (6) l'estimation (inégalité de Byenaimé-Tchebitchev)

$$\operatorname{vol}(C) \geq (1 - \tilde{C}(n)\, \varepsilon^{\frac{1}{4}}) \operatorname{vol}(B_1 \times B_2).$$

Pour ε assez petit, l'ensemble C est donc non vide et on en déduit l'existence de couples (x, y) appartenant à $B_1 \times B_2$ pour lesquels $f \circ \gamma_{xy}$ vérifie presque la même équation différentielle que dans le cas de la sphère canonique. On peut ensuite par des méthodes classiques comparer $f \circ \gamma_{xy}$ à une solution correspondante sur la sphère en fixant des conditions au bord à l'aide du lemme suivant.

Lemme 1.8 *Soit $v(t)$ et $Z(t)$ deux fonctions définies sur $[0, l]$ avec $l < \pi$. On suppose que $\int_0^l Z^2(t)dt < \epsilon^2$ et que v est solution de $v" + v = Z$ avec $|v(0) - a| < \eta$ et $|v(l) - b| < \eta$. Il existe une constante positive C telle que pour tout t dans $[0, l]$,*

$$|v(t) - \tilde{u}_{a,b}(t)| < \frac{C}{\sin(l)}(\varepsilon + \eta)$$

et

$$|v'(t)-\tilde{u}'_{a,b}(t)| < \frac{C}{\sin(l)}(\varepsilon+\eta),$$

où $\tilde{u}_{a,b}$ *est la solution de* $u"+u=0$ *sur* $[0,l]$ *vérifiant les conditions initiales* $u(0)=a$ *et* $u(l)=b$*.*

On peut également fixer des conditions de Cauchy (pour une démonstration des lemmes 1.8 et 1.9, nous renvoyons à [5]).

Lemme 1.9 *Soit* $v(t)$ *et* $Z(t)$ *deux fonctions définies sur* $[0,l]$ *avec* $l \leq \pi$*. On suppose que* $\int_0^l Z^2(t)dt < \epsilon^2$ *et que* v *est solution de* $v"+v=Z$ *avec* $|v(0)-a| < \eta$ *et* $|v'(0)-b| < \eta$ *. Il existe une constante positive* C *telle que pour tout* t *dans* $[0,l]$*,*

$$|v(t)-u_{a,b}(t)| < C(\epsilon+\eta)$$

et

$$|v'(t)-u'_{a,b}(t)| < C(\epsilon+\eta),$$

où $u_{a,b}$ *est la solution de* $u"+u=0$ *sur* $[0,l]$ *vérifiant les conditions initiales* $u(0)=a$ *et* $u'(0)=b$*.*

Pour contrôler les conditions initiales de l'équation différentielle dans le lemme 1.9, nous aurons besoin d'une estimation qui prouve que la norme du gradient d'une fonction propre sur les domaines considérés, reste petite au voisinage des points réalisant les extréma de la fonction propre. Cette estimation est du type de celles obtenues par P. Li et S.T. Yau [14].

Proposition 1.10 *Soit* (M,g) *un élément de* $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ *et* Ω *un domaine régulier de* M *dont la courbure moyenne en tout point du bord* $\partial\Omega$ *est positive ou nulle. Soit* f *la première fonction propre de Dirichlet sur* Ω*, que l'on suppose normalisée par (1). Alors pour tout* x *dans* Ω*,*

$$|\nabla f|^2(x) \leq \lambda_1^D(\Omega)(1-f^2(x)),$$

en particulier

$$||\nabla f||_{L^\infty} \leq \sqrt{\lambda_1^D(\Omega)}.$$

Preuve : Commençons par quelques remarques sur f. On note $\eta(x)$ la normale intérieure unitaire en x apppartenant à $\partial\Omega$. En appliquant le principe du maximum fort à $-f$, on en déduit pour tout x dans $\partial\Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(x) > 0.$$

Par conséquent en tout point x dans $\partial\Omega$

$$\eta(x) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(x).$$

Donc pour X, Y appartenant à $T_x\,\partial\Omega$

$$\Pi(X,Y) = \frac{-1}{|\nabla f|(x)}\,\mathrm{Hess}\, f(X,Y).$$

On en déduit l'expression suivante de la courbure moyenne,

$$H(x) = \frac{-1}{|\nabla f|(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Hess}\, f(e_i, e_i),$$

avec $(e_i)_{1\le i\le n-1}$ une base orthonormée de $T_x\partial\Omega$. Par continuité, pour x appartenant à $\partial\Omega$, $\Delta f(x) = \lambda_1^D(\Omega) f(x) = 0$, d'où

$$H(x) = \frac{1}{|\nabla f|(x)}\,\mathrm{Hess}\, f(\eta(x), \eta(x)).$$

En particulier, pour tout x dans $\partial\Omega$

$$\mathrm{Hess}\, f(\eta(x), \eta(x)) \geq 0. \tag{7}$$

Passons maintenant à la démonstration du lemme. On introduit la fonction

$$F = \frac{|\nabla f|^2}{\beta - f^2}$$

avec $\beta > 1$ un réel fixé. Par compacité, il existe x_0 tel que $F(x_0) = \sup_{\overline{\Omega}} F$. Supposons tout d'abord que x_0 appartient à $\partial\Omega$. Dans ce cas, par le principe du maximum, on doit avoir l'estimation

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(x_0) \leq 0.$$

Calculons $\frac{\partial F}{\partial \eta}(x_0)$.

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(y) = \frac{2 < D_\eta \nabla f, \nabla f >}{\beta - f^2} + \frac{2f|\nabla f|^2 \frac{\partial f}{\partial \eta}(y)}{(\beta - f^2)^2}.$$

Or, au point x_0

$$\frac{2f|\nabla f|^2 \frac{\partial f}{\partial \eta}}{(\beta - f^2)^2} = 0,$$

puisque f vérifie les conditions de Dirichlet sur le bord.
Montrons que le premier terme est positif ou nul en x_0 (dans ce qui suit, η désigne $\eta(x_0)$).

$$< D_\eta \nabla f, \nabla f > = \mathrm{Hess}\, f(\eta, \nabla f)$$

$$< D_\eta \nabla f, \nabla f > = |\nabla f|\,\mathrm{Hess}\, f(\eta, \eta).$$

Donc par (7),

$$< D_\eta \nabla f, \nabla f > (x_0) \geq 0$$

et par conséquent

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(x_0) = 0. \tag{8}$$

On déduit de (8) et du principe du maximum fort l'inégalité

$$\Delta F(x_0) \geq 0.$$

Calculons maintenant le laplacien de F.

$$dF = \frac{d(|\nabla f|^2)}{\beta - f^2} + \frac{2f|\nabla f|^2 df}{(\beta - f^2)^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} F = {} & \frac{\operatorname{Hess}(|\nabla f|^2)}{\beta - f^2} + \frac{4f}{(\beta - f^2)^2} d(|\nabla f|^2) \otimes df \\ & + \frac{2|\nabla f|^2}{(\beta - f^2)^2} df \otimes df + \frac{8f^2|\nabla f|^2}{(\beta - f^2)^3} df \otimes df + \frac{2f|\nabla f|^2}{(\beta - f^2)^2} \operatorname{Hess} f.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\Delta F = \frac{\Delta(|\nabla f|^2)}{\beta - f^2} - \frac{4f}{(\beta - f^2)^2} g(d(|\nabla f|^2), df) - \frac{2|\nabla f|^4}{(\beta - f^2)^2} - \frac{8f^2|\nabla f|^4}{(\beta - f^2)^3} \\ + \frac{2f|\nabla f|^2 \Delta f}{(\beta - f^2)^2}.\end{aligned}$$

En particulier, en un point y appartenant à $\partial\Omega$

$$\Delta F(y) = \frac{\Delta(|\nabla f|^2)(y)}{\beta} - \frac{2|\nabla f(y)|^4}{\beta^2}. \tag{9}$$

Or, d'après la formule de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = -|\operatorname{Hess} f|^2 - Ric(\nabla f, \nabla f) + \lambda_1^D(\Omega)|\nabla f|^2,$$

puisque f est une fonction propre de valeur propre $\lambda_1^D(\Omega)$. Par hypothèse sur la courbure, on en déduit

$$\Delta(|\nabla f|^2) \leq 2\lambda_1^D(\Omega)|\nabla f|^2,$$

que l'on injecte dans (9) pour obtenir

$$\Delta F(y) \leq 2\left(\lambda_1^D(\Omega)\frac{|\nabla f|^2}{\beta} - \frac{|\nabla f|^4}{\beta^2}\right). \tag{10}$$

En appliquant (10) au point x_0, on en déduit puisque $F(x_0) \geq 0$,

$$F(x_0) \leq \lambda_1^D(\Omega),$$

d'où l'estimation en faisant tendre β vers 1.

Nous renvoyons à [14] pour le cas où x_0 appartient à Ω. ■

2 Domaines à courbure moyenne positive

2.1 Approximation de Hausdorff et sinus produit tordu

Pour estimer la distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques, nous utiliserons des ε-approximations de Hausdorff dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Définition 2.1 (ε-approximation de Hausdorff) *Soit (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques compacts. Une ε-approximation de Hausdorff de X dans Y est une application non nécessairement continue $\phi : X \to Y$ telle que*

$$\phi(X) \text{ est un } \varepsilon \text{ réseau de } Y$$

et pour tout x, x' dans X

$$|d(x,x') - \delta(\phi(x),\phi(x'))| \leq \varepsilon\,.$$

Lorsqu'il existe une ε-approximation de Hausdorff entre deux espaces métriques, la distance de Gromov-Hausdorff entre ces deux espaces est majorée par $5\,\varepsilon$ [11].

Les espaces modèles apparaissant dans nos résultats de stabilité sont des espaces de longueur modelés à partir de la sphère canonique (privée de deux points antipodaux) décrite en coordonnées géodésiques par rapport à un point, appelés sinus produit tordu dont nous rappelons également la définition.

Définition 2.2 *Soit (N,δ) un espace de longueur de diamètre inférieur à π, on appelle sinus produit tordu, l'espace de longueur $((0,\pi)\times N, d)$ où la distance d est définie pour $(t,x),(s,y)$ dans $(0,\pi)\times N$, par*

$$\cos d((t,x),(s,y)) = \cos s \cos t + \sin s \sin t \cos \delta(x,y). \tag{11}$$

Par définition de la distance, les sous-ensembles de la forme $(0,a)\times N$ avec $a \leq \frac{\pi}{2}$ forment des parties convexes de $((0,\pi)\times N, d)$. Par analogie avec le cas de la sphère, on appellera hémisphère d'un sinus produit tordu la partie $(0,\frac{\pi}{2})\times N$. Cette propriété de convexité est presque conservée dans les résultats de stabilité que nous avons obtenus. Pour préciser cette notion de presque convexité, nous avons besoin de la définition qui suit.

Définition 2.3 *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte. Soit x appartenant à M et r un réel positif. On note $d^{x,r}$ la distance induite par la métrique riemannienne sur la boule géodésique $B(x,r)$.*

2.2 Énoncé des résultats

Dans cette partie, nous démontrons le

Théorème 2.4 *Il existe des fonctions $\eta(\varepsilon)$ et $\tau(\varepsilon)$ telles que, pour tout élément (M,g) de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ et pour tout domaine régulier Ω de M, dont la courbure moyenne H est positive ou nulle en tout point du bord, dont le volume vérifie* $\mathrm{vol}\,\Omega \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}\,M$ *et dont la première valeur propre de Dirichlet vérifie*

$$\lambda_1^D(\Omega) \leq n + \epsilon,$$

alors il existe x_0 dans Ω tel que Ω contient $B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon))$ et

$$\mathrm{vol}\,(\Omega \setminus B(x_0, \pi/2 - \eta(\varepsilon))) \leq \tau(\varepsilon).$$

De plus, il existe un sinus produit tordu $((0,\pi) \times N, d)$ tel que

$$d_{GH}((M, d_g), ((0,\pi) \times N, d)) \leq \tau(\varepsilon)$$

(avec d_g la distance induite par la métrique riemannienne) et

$$d_{GH}((B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon)), d^{x_0, \frac{\pi - \eta(\varepsilon)}{2}}), ((0, \frac{\pi}{2}) \times N, d)) \leq \tau(\varepsilon).$$

2.3 Démonstration du théorème 2.4

Dans le prochain paragraphe, nous démontrons que le domaine Ω contient une boule de rayon proche de $\frac{\pi}{2}$. Dans le paragraphe suivant, nous montrons à l'aide d'un résultat de J. Cheeger et T. Colding, qu'il existe une approximation de Hausdorff de la variété ambiante dans un sinus produit tordu et que l'image de Ω par cette approximation, contient une partie qui est Hausdorff proche d'un hémisphère du produit tordu. Dans le dernier paragraphe, nous démontrons une propriété de presque convexité (14). Dans la suite, on note f la première fonction propre de Dirichlet sur le domaine Ω, normalisée par (1) et x_0 un point de Ω tel que $f(x_0) = 1$.

2.3.1 Ω contient une boule de rayon presque égal à $\frac{\pi}{2}$

Soit Ω un domaine régulier de (M,g) vérifiant les hypothèses du théorème 2.4. Notons d la distance de x_0 au bord $\partial\Omega$. Par définition, la boule $B(x_0, d)$ est contenue dans Ω. L'hypothèse $\frac{\mathrm{vol}\,\Omega}{\mathrm{vol}\,M} \leq \frac{1}{2}$ implique par le théorème de Bishop-Gromov, $d \leq \frac{\pi}{2}$.

Lemme 2.5 *Soit Ω un domaine régulier de (M,g) vérifiant les hypothèses du théorème 2.4. Alors il existe une fonction $\eta(\varepsilon)$, telle que pour tout domaine Ω et tout (M,g) vérifiant les hypothèses ci-dessus, on a*

$$B\left(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon)\right) \subset \Omega.$$

Preuve : Sous ces hypothèses, on a par le lemme 1.5

$$|| \operatorname{Hess} f + fg||_{L^2} \leq C(n)\, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\,.$$

La première étape consiste à appliquer le lemme 1.6 sur des boules telles, qu'une géodésique minimisante ayant ces extrémités dans celles-ci, soit contenue dans Ω. Soit y appartenant à $\partial\Omega$ tel que $d(x_0, y) = d(x_0, \partial\,\Omega)$, γ une géodésique minimisante reliant x_0 à y et $r(\varepsilon)$ un réel positif tel que $\frac{\varepsilon}{V(r(\varepsilon))} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ ($V(r)$ est le volume d'une calotte sphérique de rayon r de $\mathbb{S}^n$). Considérons z appartenant à γ tel que $d(y, z) = 3r(\varepsilon)$ et $B_1 = B(x_0, r(\varepsilon))$, $B_2 = B(z, r(\varepsilon))$. Toute géodésique minimisante ayant ces extrémités dans B_1 et B_2 est nécessairement contenue dans Ω. En effet, par l'inégalité triangulaire et pour tout (u, v) dans $B_1 \times B_2$, on a

$$d(u, \partial\Omega) > d - r(\varepsilon) \text{ et } d(u, v) \leq d - r(\varepsilon).$$

Le lemme 1.6 appliqué à B_1 et B_2 donne

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B_1 \times B_2)} \int_{B_1 \times B_2} \left(\int_0^1 |(f \circ \gamma_{uv})''(t) + f(\gamma_{uv}(t))|^2 dt \right) dudv \leq \tilde{C}(n)\, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\,.$$

L'étape suivante consiste à appliquer le lemme 1.9. Pour cela on estime les conditions initiales vérifiées par $f \circ \gamma_{uv}$. Par choix de la normalisation, $f(x_0) = 1$ et par la proposition 1.10, pour tout x dans Ω,

$$|\nabla f|^2(x) \leq (n + \varepsilon)(1 - f^2(x)), \tag{12}$$

donc, pour tout u dans B_1 et pour tout v, $(f \circ \gamma_{uv})'(0)$ est presque égal à 0. L'équation (12) entraine également l'estimation

$$\|\nabla f\|_{L^\infty} \leq \sqrt{n + \varepsilon}.$$

On déduit de cette inégalité et du lemme 1.9, l'existence d'une fonction $\tau(\varepsilon)$ telle que pour tout v dans B_2,

$$|f(v) - \cos d(x_0, v)| \leq \tau(\varepsilon) \tag{13}$$

(le lemme 1.9 permet d'établir le résultat ci-dessus sur un sous-ensemble de mesure presque égale à celle de la boule B_2, l'estimation sur la norme L^∞ du gradient de la fonction f permet de conclure). En appliquant l'estimation (13) avec $v = z$, on en déduit par définition de z, l'existence d'une fonction $\eta(\varepsilon)$ telle que

$$d \geq \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon),$$

ce qui conclut. ■

2.3.2 Propriétés de la variété ambiante

Commençons par remarquer que sous les hypothèses du théorème 2.4, le diamètre de la variété ambiante est presque égal à π, précisément on a le

Lemme 2.6 *Sous les hypothèses du théorème 2.4, il existe une fonction $\tau(\varepsilon)$ telle que, si l'on note $d_{x_0} = \sup_M d(x_0, y)$ (où x_0 est tel que $f(x_0) = 1$), alors*

$$d_{x_0} \geq \pi - \tau(\varepsilon).$$

Preuve : Par le lemme 2.5 et par hypothèse sur le domaine Ω, on a l'inégalité

$$\text{vol } B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon)) \leq \frac{1}{2} \text{ vol}\,(M).$$

On déduit du théorème de Bishop-Gromov et par définition de d_{x_0}, l'inégalité

$$\frac{V(\frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon))}{V(d_{x_0})} \leq \frac{\text{vol}\,(B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon)))}{\text{vol } B(x_0, d_{x_0})} \leq \frac{1}{2},$$

($V(r)$ désigne le volume d'une boule géodésique de rayon r de la sphère canonique) ce qui conclut. ■

On déduit en particulier de ce lemme (à l'aide d'une estimation de la fonction « excess » due à K. Grove et P. Petersen ([13], lemme 1) que le volume relatif de toute boule de centre x_0 est presque égal au volume relatif d'une boule de même rayon dans la sphère, par conséquent on a le

Corollaire 2.7 *Sous les hypothèses du théorème 2.4, il existe une fonction $\tau(\varepsilon)$ telle que*

$$\text{vol}\,(\Omega \setminus B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon))) \leq \tau(\varepsilon).$$

D'autre part, un résultat de J. Cheeger et T. Colding ([8], théorème 5.12) montre que sous ces hypothèses la variété ambiante est proche, pour la distance de Gromov-Hausdorff, d'un sinus produit tordu.

Théorème 2.8 ([8]) *Il existe une fonction $\tau(\varepsilon)$ telle que, pour tout élément (M, g) de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ pour lequel il existe x dans M vérifiant $\sup_{y \in M} d(x, y) \geq \pi - \varepsilon$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi_x : & (M, g) & \longrightarrow & ((0, \pi) \times N, d) \\ & z & \longmapsto & (d(x, z), p(z)) \end{array}$$

est une $\tau(\varepsilon)$-approximation de Hausdorff, avec N une sphère géodésique de M de centre x munie de sa distance intrinsèque, d la distance définie par (11) et $p(z)$ tel que $d(z, p(z)) = d(z, N)$.

Par conséquent, sous les hypothèses du théorème 2.4, l'application ϕ_{x_0} est une $\tau(\varepsilon)$-approximation de Hausdorff (lorsque M est muni de la distance induite par la métrique riemannienne) et $\phi_{x_0}(B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon))) = (0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon)) \times N$. Pour terminer la preuve du théorème 2.4, il reste à démontrer que la boule $B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon))$ est presque convexe, c'est à dire que

$$\phi_{x_0} : (B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon)), d^{x_0,(\pi-\eta(\varepsilon))/2}) \longrightarrow ((0, \frac{\pi}{2}) \times N, d) \tag{14}$$

est une $\tau(\varepsilon)$-approximation.

2.3.3 Propriété de presque convexité

Pour démontrer la propriété (14), il suffit d'établir la

Proposition 2.9 *Sous les hypothèses du théorème 2.4, il existe des fonctions $\alpha(\varepsilon)$ et $\tau(\varepsilon)$ telles que pour tout u, v dans $B(x, \frac{\pi}{2} - \alpha(\varepsilon))$,*

$$d^{x_0,(\pi-\alpha(\varepsilon))/2}(u, v) \leq d_g(u, v) + \tau(\varepsilon),$$

où d_g est la distance induite par la métrique riemannienne g sur M.

Preuve : D'après le lemme 2.5, Ω contient la boule $B(x_0, \frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon))$. Nous allons montrer que pour $\alpha(\varepsilon)$ $(\geq \eta(\varepsilon))$ bien choisi, il existe une fonction $r(\varepsilon)$ telle que pour tout u, v dans $B(x_0, \frac{\pi}{2} - \alpha(\varepsilon))$, il existe $\tilde{u}, \tilde{v}$ vérifiant $d(\tilde{u}, u) \leq r(\varepsilon)$ et $d(\tilde{v}, v) \leq r(\varepsilon)$ tels que

$$d^{x_0, \frac{\pi-\alpha(\varepsilon)}{2}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = d_g(\tilde{u}, \tilde{v}), \tag{15}$$

ce qui démontrera la proposition.

Pour démontrer l'égalité (15), nous aurons besoin du lemme suivant (nous renvoyons à [4] pour une démonstration).

Lemme 2.10 *Il existe une fonction $\tau(\varepsilon)$ telle que pour tout élément (M, g) de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$ pour lequel il existe x appartenant à M tel que $\sup_{y \in M} d(x, y) \geq \pi - \varepsilon$, il existe un vecteur $(a_i(x))_{1 \leq i \leq k}$ appartenant à $\mathbb{S}^{k-1}$ tel que*

$$|| \cos d_x - \sum_{i=1}^{k} a_i(x) f_i ||_{L^\infty} \leq \tau(\varepsilon), \tag{16}$$

où d_x est la fonction distance à x, (f_i) est une famille orthogonale de fonctions propres associées aux valeurs propres $(\lambda_i(M))_{1 \leq i \leq k}$, normalisées par $\frac{1}{\mathrm{vol\,M}} \int_{\mathrm{M}} f_i^2 = \frac{1}{n+1}$ et $k = \max\{i \in \mathbb{N}; \lambda_i(M) \leq n + \sqrt{\varepsilon}\}$.

Remarque 2.11 *L'entier k est supérieur ou égal à 1 d'après [9]. S. Gallot a montré dans [10] (proposition 2.4), qu'il existe une constante positive $C(n)$ telle que pour tout élément (M, g) de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, $\lambda_{n+2}(M) \geq n + C(n)$. Par conséquent, on peut supposer $k \leq n + 1$ dans le lemme précédent.*

Notons $\overline{f} = \sum_{i=1}^k a_i(x) f_i$. Le lemme 1.5 implique l'existence d'une fonction $\tau(\varepsilon)$ telle que

$$|| \operatorname{Hess}(\sum_{i=1}^k a_i(x) f_i) + (\sum_{i=1}^k a_i(x) f_i) g ||_{L^2} \leq \tau(\varepsilon). \tag{17}$$

Par conséquent, en appliquant les lemmes 1.6 et 1.8 à la fonction $\overline{f}$, on en déduit l'existence de fonctions $r(\varepsilon)$, $R(\varepsilon)$ et $\tau_1(\varepsilon)$ pour lesquelles on a la propriété suivante :
Pour tout u, v dans M tel que $R(\varepsilon) \leq d(u,v) \leq \pi - R(\varepsilon)$, il existe $\tilde{u}, \tilde{v}$ admettant une unique géodésique minimisante γ les reliant et vérifiant $d(u,\tilde{u}) < r(\varepsilon)$, $d(v,\tilde{v}) < r(\varepsilon)$, tels que

$$\left| \overline{f}(\gamma(t)) - \left(\cos d(x,\tilde{u}) \frac{\sin(l-t)}{\sin(l)} + \cos d(x,\tilde{v}) \frac{\sin(t)}{\sin(l)} \right) \right| \leq \tau_1(\varepsilon),$$

pour tout t dans $[0,l]$, avec $l = d(\tilde{u},\tilde{v})$. On déduit alors de l'inégalité (16) l'existence d'une fonction $\tau_2(\varepsilon)$ telle que

$$\cos d(x,\gamma(t)) \geq \left(\cos d(x,\tilde{u}) \frac{\sin(l-t)}{\sin(l)} + \cos d(x,\tilde{v}) \frac{\sin(t)}{\sin(l)} \right) - \tau_2(\varepsilon).$$

Puis, en remarquant que $\frac{\sin(l-t)}{\sin(l)} + \frac{\sin(t)}{\sin(l)} \geq 1$, on en déduit que pour tout t dans $[0,l]$,

$$\cos d(x,\gamma(t)) \geq \min \; (\cos d(x,\tilde{u}), \cos d(x,\tilde{v})) - \tau_2(\varepsilon),$$

ce qui permet d'établir (15) et termine la démonstration. ■

3 Domaines géodésiquement convexes

Dans cette partie, nous démontrons le théorème 0.2. Rappelons que la seconde forme fondamentale (et par conséquent la courbure moyenne) du bord d'un domaine régulier géodésiquement convexe est positive ou nulle. Par conséquent, la démonstration du théorème 0.2 se déduit du théorème 2.4 et de la proposition qui suit.

Proposition 3.1 *Il existe une fonction $R(\varepsilon)$ telle que, pour tout domaine régulier géodésiquement convexe Ω d'un élément (M,g) de $\mathcal{M}_{\mathrm{n}}$, vérifiant*

$$\frac{\operatorname{vol}(\Omega)}{\operatorname{vol}(M)} \leq \frac{1}{2} \text{ et } \lambda_1^D(\Omega) \leq n + \varepsilon,$$

on a, en conservant les notations du théorème 2.4, l'inclusion

$$\Omega \subset B(x_0, \frac{\pi}{2} + R(\varepsilon)).$$

Preuve : On conserve les notations de la deuxième partie, x_0 appartient à Ω et vérifie $f(x_0) = 1$, y appartient à $\partial\Omega$ et vérifie $d(x_0, y) = d(x_0, \partial\Omega)$ et

$$\frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon) \leq d(x_0, y) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Traitons d'abord le cas des points de $\partial\Omega$ qui sont loins de y. Soit m appartenant à $\partial\Omega$ et supposons que m vérifie

$$\pi \geq d(m, y) \geq \pi - \mu,$$

pour μ positif petit. Dans ce cas, il y'a presque égalité dans l'inégalité triangulaire ci-dessous ([12], lemme 1), précisément il existe une fonction $\tau(\mu)$ (indépendante de x_0) telle que

$$d(m, x_0) + d(x_0, y) \leq d(m, y) + \tau(\mu),$$

d'où

$$d(m, x_0) \leq \frac{\pi}{2} + \tau(\mu) + \eta(\varepsilon).$$

Par conséquent, on peut dans la suite de la démonstration, ne considérer que les points m de $\partial\Omega$ qui vérifient

$$d(m, y) \leq \pi - \mu$$

avec μ petit qui est défini ci-dessous.

Supposons maintenant qu'il existe un point z de $\partial\Omega$ tel que

$$d(x_0, z) \geq \frac{\pi}{2} + \theta(\varepsilon) \tag{18}$$

et

$$d(y, z) \leq \pi - \mu$$

avec $\mu = \theta(\varepsilon) + 6r(\varepsilon)$ (où $r(\varepsilon)$ est tel que $\frac{\varepsilon}{V(r(\varepsilon))} \leq \varepsilon^{1/2}$).

Nous allons montrer que pour $\theta(\varepsilon)$ convenable, on obtient une contradiction. Pour cela, on montre qu'un point P situé à mi-distance entre z et y contient un voisinage ouvert dont on peut minorer le volume (22). On peut ensuite grâce aux résultats de la première partie, estimer la valeur de f en P, en fonction de la distance $d(x_0, P)$. On obtient la contradiction souhaitée en estimant $d(x_0, P)$ à l'aide de la $\tau(\varepsilon)$-approximation de Hausdorff ϕ_{x_0}.

Notons z' un point appartenant à une géodésique minimisante reliant x_0 à z et tel que $d(z, z') = r(\varepsilon)$, définissons de manière analogue y' vérifiant $d(y, y') = 4r(\varepsilon)$. Notons $d_1 = d(y', z')$. On déduit de l'inégalité triangulaire

$$d_1 \geq d(x_0, z) - d(x_0, y) + 3r(\varepsilon),$$

ce qui entraine par (18) et comme $d(x_0, y) \leq \pi/2$,

$$d_1 \geq \theta(\varepsilon) + 3r(\varepsilon).$$

Soit deux réels s, S positifs, p appartenant à M et Γ une partie mesurable de $S_p(M)$ la sphère unitaire tangente en p. On note

$$A^{\Gamma}_{s,S}(p) = \{\gamma_{\vec{u}}(t); \vec{u} \in \Gamma \text{ et } t \in [s,S]\}$$

et $\overline{A}^{\Gamma}_{s,S}$ l'ensemble correspondant sur la sphère.

A l'aide de l'inégalité triangulaire, on montre

$$B(y', r(\varepsilon)) \subset A^{\Gamma}_{d_1 - r(\varepsilon), d_1 + r(\varepsilon)}(z') \subset B(y', 3r(\varepsilon)), \tag{19}$$

avec Γ la trace sur $S_{z'}(\Omega)$ de $B(y', r(\varepsilon))$. Par construction, la boule $B(y', 3r(\varepsilon))$ est contenue dans Ω. Par conséquent, en utilisant la convexité de Ω, on en déduit

$$A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\varepsilon), \frac{d_1}{2} + r(\varepsilon)}(z') \subset \Omega.$$

Estimons maintenant le volume de $A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\varepsilon), \frac{d_1}{2} + r(\varepsilon)}(z')$. Soit s, S, r, R des réels vérifiant $0 < s < S$, $0 < r < R$, $s < r$, $S < R$ et p dans M. Le théorème de Bishop-Gromov implique

$$\frac{\operatorname{vol}(A^{\Gamma}_{s,S}(p))}{\operatorname{vol}(A^{\Gamma}_{r,R}(p))} \geq \frac{\operatorname{vol}(\overline{A}^{\Gamma}_{s,S})}{\operatorname{vol}(\overline{A}^{\Gamma}_{r,R})}.$$

Donc, on a en particulier

$$\operatorname{vol}(A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\varepsilon), \frac{d_1}{2} + r(\varepsilon)}(z')) \geq \operatorname{vol}(A^{\Gamma}_{d_1 - r(\varepsilon), d_1 + r(\varepsilon)}(z')) \times \frac{\operatorname{vol}(\overline{A}^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\varepsilon), \frac{d_1}{2} + r(\varepsilon)})}{\operatorname{vol}(\overline{A}^{\Gamma}_{d_1 - r(\varepsilon), d_1 + r(\varepsilon)})}. \tag{20}$$

Sur la sphère canonique, on a l'égalité

$$\frac{\operatorname{vol}(\overline{A}^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\varepsilon), \frac{d_1}{2} + r(\varepsilon)})}{\operatorname{vol}(\overline{A}^{\Gamma}_{d_1 - r(\varepsilon), d_1 + r(\varepsilon)})} = \frac{\int_{\frac{d_1}{2} - r(\varepsilon)}^{\frac{d_1}{2} + r(\varepsilon)} \sin^{n-1}(t) dt}{\int_{d_1 - r(\varepsilon)}^{d_1 + r(\varepsilon)} \sin^{n-1}(t) dt}.$$

Par conséquent, en remarquant que pour tout t dans $[0, \pi]$,

$$\frac{\sin^{n-1}(\frac{t}{2})}{\sin^{n-1}(t)} \geq \frac{1}{2^{n-1}}, \tag{21}$$

on en déduit en intégrant

$$\frac{\operatorname{vol}(\overline{A}^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\varepsilon), \frac{d_1}{2} + r(\varepsilon)})}{\operatorname{vol}(\overline{A}^{\Gamma}_{d_1 - r(\varepsilon), d_1 + r(\varepsilon)})} \geq \frac{1}{2^n}.$$

D'où, par (19) et (20)

$$\operatorname{vol}(A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2} - r(\varepsilon), \frac{d_1}{2} + r(\varepsilon)}(z')) \geq \frac{1}{2^n} \operatorname{vol}(B(y', r(\varepsilon))). \tag{22}$$

Par choix de $r(\varepsilon)$, on déduit des lemmes 1.5 et 1.6 (en notant $A = A^{\Gamma}_{\frac{d_1}{2}-r(\varepsilon),\frac{d_1}{2}+r(\varepsilon)}(z'))$

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(A \times B(x_0, r(\varepsilon)))} \int_{A\times B(x_0,r(\varepsilon)} \left(\int_0^1 |(f\circ\gamma_{uv})''(t) + f(\gamma_{uv}(t))|^2 dt \right) dudv$$
$$\leq \tilde{C}(n)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,.$$

Par conséquent, comme x_0 est un point où f réalise son maximum, on en déduit, comme dans la preuve du lemme 2.5, qu'il existe une fonction $\tau'(\varepsilon)$ telle que, pour tout v appartenant à A,

$$|f(v) - \cos d(x_0, v)| \leq \tau'(\varepsilon). \tag{23}$$

Nous allons maintenant estimer $\cos d(x_0, v)$ pour v appartenant à A fixé, en utilisant la $\tau(\varepsilon)$-approximation de Hausdorff ϕ_{x_0} du théorème 2.8. Notons $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ et $\overline{v}$ l'image des points x_0, y', z' et v par ϕ_{x_0}, ces points vérifient à $\tau(\varepsilon)$ près les mêmes relations métriques que les points x, y', z' et v. Par définition de l'application ϕ_{x_0} et de la distance sur le produit tordu $(0,\pi) \times N$, on peut, pour estimer la distance de $\overline{x}$ à $\overline{v}$, supposer que l'on est sur la sphère canonique (voir la remarque 1.47, page 196 de [8]).

Afin d'estimer la distance $d(\overline{x}, \overline{v})$ sur la sphère canonique, on suppose dorénavant que les quantités $\frac{\tau(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)}, \frac{\tau'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)}, \frac{\eta(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)}, \frac{r(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)}$ tendent vers 0 quand ε tend vers 0, de sorte que les termes $\tau(\varepsilon), \tau'(\varepsilon), \eta(\varepsilon)$ et $r(\varepsilon)$ sont négligeables devant $\theta(\varepsilon)$, cela assure également que $\cos(\frac{d(\overline{z},\overline{y})}{2})$ n'est pas trop petit, puisque, à des termes négligeables près, on a $d(\overline{z}, \overline{y}) \leq \pi - \theta(\varepsilon)$. Sur la sphère canonique et en utilisant l'hypothèse (18), un calcul montre qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$d(\overline{x}, \overline{v}) \geq \frac{\pi}{2} + C\theta(\varepsilon).$$

Par conséquent

$$d(x, v) \geq \frac{\pi}{2} + C\theta(\varepsilon) - \tau(\varepsilon).$$

À l'aide de (23), on en déduit

$$f(v) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} + C\theta(\varepsilon) - \tau(\varepsilon)\right) + \tau'(\varepsilon)$$

et donc quitte à supposer $\theta(\varepsilon)$ assez grand

$$f(v) < 0,$$

ce qui est absurde. ∎

Références

[1] Michael T. Anderson. Metrics of positive Ricci curvature with large diameter. *Manuscripta Math.*, 68(4) :405–415, 1990.

[2] Andrés I. Ávila. Stability results for the first eigenvalue of the Laplacian on domains in space forms. *J. Math. Anal. Appl.*, 267(2) :760–774, 2002.

[3] Pierre Bérard and Daniel Meyer. Inégalités isopérimétriques et applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3) :513–541, 1982.

[4] Jérôme Bertrand. Pincement spectral en courbure de Ricci positive. *(à paraitre)*.

[5] Jérôme Bertrand. Pincement spectral en courbure positive. *Thèse de doctorat*, 2003.

[6] I. Chavel and E. A. Feldman. Spectra of domains in compact manifolds. *J. Funct. Anal.*, 30(2) :198–222, 1978.

[7] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.

[8] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. *Ann. of Math. (2)*, 144(1) :189–237, 1996.

[9] Shiu Yuen Cheng. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. *Math. Z.*, 143(3) :289–297, 1975.

[10] Sylvestre Gallot. Inégalités isopérimétriques, courbure de Ricci et invariants géométriques. II. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 296(8) :365–368, 1983.

[11] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981 French original [MR 85e :53051], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[12] Karsten Grove and Peter Petersen, V. A pinching theorem for homotopy spheres. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(3) :671–677, 1990.

[13] Karsten Grove and Katsuhiro Shiohama. A generalized sphere theorem. *Ann. Math. (2)*, 106(2) :201–211, 1977.

[14] Peter Li and Shing Tung Yau. Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold. In *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, pages 205–239. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[15] Jeffrey Rauch and Michael Taylor. Potential and scattering theory on wildly perturbed domains. *J. Funct. Anal.*, 18 :27–59, 1975.

[16] Robert C. Reilly. Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. *Indiana Univ. Math. J.*, 26(3) :459–472, 1977.