Corrigé de l'exercice 83bis (connexité des espaces de l'exercice 83)

a) S^{n-1} est connexe pour $n \geq 2$ (cf exercice 105.b), mais pas pour $n = 1$ car $S^0 = \{-1, 1\}$.

b) Si $\alpha = 0$, $S(q, \alpha)$ est une union de droites passant par O, donc est connexe (par arcs). Supposons donc (quitte à échanger r et s) $\alpha > 0$. Si $r = 0$, $S(q, \alpha) = \emptyset$ (connexe). Si $r \neq 0$, $S(q, \alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{n-r-s} \mid \|x\|^2 = \alpha + \|y\|^2\}$ est homéomorphe, via $(x, y, z) \to (x/\|x\|, y, z)$, à $S^{r-1} \times \mathbf{R}^{n-r}$ donc (d'après a) est connexe ssi $r \geq 2$.

c) $GL_n(\mathbf{R})$ est non connexe car union disjointe de deux ouverts non vides, $GL_n^+(\mathbf{R}) := det^{-1}(]0, +\infty[)$ et $GL_n^-(\mathbf{R}) := det^{-1}(]-\infty, 0[)$.

d) $SL_n(\mathbf{R})$ est connexe (par arcs) car engendré par les matrices de transvections, or pour toute transvection t, le segment $[id, t]$ est constitué de transvections donc est inclus dans $SL_n(\mathbf{R})$. Variante par décomposition polaire : toute matrice réelle M inversible est produit (de façon unique) d'une matrice symétrique S à valeurs propres > 0 et d'une matrice orthogonale P, $M = PS$. Si $det(M) = 1$ on en déduit $det(S) = det(P) = 1$. Il suffit ensuite de montrer que $SO_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs (en se ramenant au cas $n = 2$) et que l'ensemble des matrices symétriques > 0 de déterminant 1 l'est aussi (en se ramenant au cas où S est diagonale).

e) $O_n(\mathbf{R})$ est non connexe, pour la même raison que $GL_n(\mathbf{R})$ (car constitué de matrices dont le déterminant vaut 1 pour certaines et -1 pour d'autres).

f) Idem pour $O_n(\mathbf{C})$.

g) $U_n(\mathbf{C})$ est connexe (par arcs) car homéomorphe (via $H \mapsto e^{iH}$) à l'espace vectoriel des matrices hermitiennes. Variante : pour relier une matrice unitaire U à la matrice I on se ramène (par diagonalisation) au cas où U est diagonale. Ses n valeurs propres étant de module 1, il suffit pour conclure d'utiliser la connexité (par arcs) de $(S^1)^n$.

h) $O_{1,1}(\mathbf{R})$ est non connexe pour la même raison que $O_n(\mathbf{R})$.

i) $\mathbf{R}P^n$ est connexe (par arcs) pour $n \geq 1$ comme quotient de S^n qui est connexe (par arcs). $\mathbf{R}P^0$ est un singleton (donc connexe). $\mathbf{C}P^n$ est connexe (par arcs) pour $n \geq 0$ comme quotient de S^{2n+1}.

j) Un espace vectoriel est convexe.

k) H est convexe (donc connexe par arcs).