Exercice 1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $O \in \mathcal{E}$ et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine. On cherche à décomposer f sous la forme $t_1 \circ u_1$ ou $u_2 \circ t_2$ avec t_i translation et u_i application affine fixant O.*
a. *Montrer que u_i (si elle existe) est unique, et que u_1, u_2 (si elles existent) sont égales.*
b. *Montrer que le problème équivaut à trouver des translations t_i telles que $(t_1^{-1} \circ f)(O) = O$ et $(f \circ t_2^{-1})(O) = O$.*
c. *Démontrer que t_1 existe et est unique (et déterminer son vecteur).*
d. *Démontrer que des t_2 existent si et seulement si $O \in \mathrm{Im}(f)$ (et déterminer leurs vecteurs).*

a. Une application affine est uniquement déterminée par l'image d'un point et par sa partie linéaire :

$$u(M) = u(O) + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{OM}).$$

Or $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{t_1^{-1}} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$ et $u_1(O) = O$. Idem pour u_2.
b. u_1 est déterminée par t_1 ($u_1 = t_1^{-1} \circ f$), et la condition $u_1(O) = O$ se traduit alors par $(t_1^{-1} \circ f)(O) = O$. Idem pour t_2.
c. Si v est le vecteur de t_1, $(t_1^{-1} \circ f)(O) = O \Leftrightarrow v = \overrightarrow{Of(O)}$.
d. Si v est le vecteur de t_2, $(f \circ t_2^{-1})(O) = O \Leftrightarrow f(O - v) = O$. De tels v existent ssi $O \in \mathrm{Im}(f)$, et ce sont les vecteurs de la forme $-\overrightarrow{OA}$ pour tout antécédent A de O par f.

Exercice 2. *On note $\mathbf{GA}_O(\mathcal{E})$ le sous-groupe des éléments de $\mathbf{GA}(\mathcal{E})$ qui fixent le point O. Montrer que l'application suivante est bien définie (c'est-à-dire à valeurs dans $T_{\mathcal{E}}$, le sous-groupe des translations) :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{GA}_O(\mathcal{E}) \times T_{\mathcal{E}} & \to & T_{\mathcal{E}} \\ (u,t) & \mapsto & u \circ t \circ u^{-1} \end{array}$$

et fournit une action de $\mathbf{GA}_O(\mathcal{E})$ sur $T_{\mathcal{E}}$. Décrire (le vecteur de) la translation $u \circ t \circ u^{-1}$ en fonction de t et u, et constater que l'action est indépendante du point O (on a donc en fait une action de $\mathbf{GL}(E)$ sur $T_{\mathcal{E}}$).

La partie vectorielle de $u \circ t \circ u^{-1}$ est :

$$\overrightarrow{u \circ t \circ u^{-1}} = \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{t} \circ \overrightarrow{u^{-1}} = \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u}^{-1} = Id,$$

donc il s'agit bien d'une translation. Si on prend $u = Id$, on trouve t, et on a la relation, pour tous u_1, u_2 :

$$u_2 \circ (u_1 \circ t \circ u_1^{-1}) \circ u_2^{-1} = (u_2 \circ u_1) \circ t \circ (u_2 \circ u_1)^{-1}.$$

Ainsi, on a bien une action de groupe. Soit $\overrightarrow{t}$ le vecteur de la translation t et $\overrightarrow{t}'$ celui de la translation $u \circ t \circ u^{-1}$. Alors :

$$O + \overrightarrow{t}' = (u \circ t \circ u^{-1})(O) = u \circ t(O) = u(O + \overrightarrow{t}) = O + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{t}).$$

Ainsi, $\overrightarrow{t}' = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{t})$, qui est donc indépendant de O. On obtient une action de $\mathbf{GL}(E)$ sur le groupe des translations grâce à l'identification entre $\mathbf{GL}(E)$ et le sous-groupe $\mathbf{GA}_O(\mathcal{E})$.

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, et O un point de $\mathcal{E}$.*
a. *(cours) Montrer qu'il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ dirigé par F et passant par O.*
b. *Soit F' un supplémentaire de F dans E, $\mathcal{F}'$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par F' et passant par O, et $\overrightarrow{p} \in L(E)$ la projection sur F parallèlement à F'. Montrer qu'il existe une unique application affine p_O fixant O, dont l'application affine associée est $\overrightarrow{p}$.*
c. *Soit O' un autre point de $\mathcal{E}$ et $p_{O'}$ la projection affine obtenue à partir de O'. Montrer la relation $p_O = t^{-1} \circ p_{O'} \circ t$, où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.*

a. On prend comme définition d'un sous-espace affine $\mathcal{F}$ dirigé par F l'ensemble des points de la forme $A + \overrightarrow{u}$, où A est un point donné de $\mathcal{F}$, et $\overrightarrow{u}$ parcourt F. On vérifie que cette définition est indépendante du point A. Le sous-espace affine passant par O est alors $O + F = \{O + \overrightarrow{u} / \overrightarrow{u} \in F\}$.

b. Soit une application p_O répondant au problème. Alors pour tout point M :

$$p_O(M) = p_O(O) + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{OM}) = O + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{OM}).$$

La dernière expression donne existence et unicité.

c. Les deux applications ont même partie linéaire et coïncident en le point O, donc sont égales.

Exercice 4. *Soit $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $n+1$ points dans un espace affine de dimension n, tels que la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ soit une base de l'espace vectoriel sous-jacent. Soit $B_0, \ldots, B_n$ $n+1$ points quelconques dans un espace affine (éventuellement distinct de celui de départ). Montrer qu'il existe une unique application affine f telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i.*

Analyse. Soit une application f répondant à la question. Alors il existe $\overrightarrow{f}$ telle que, pour tout i :

$$B_i = f(A_i) = f(A_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) = B_0 + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}),$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{B_0B_i}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ forment une base de l'espace vectoriel sous-jacent, ces relations définissent une unique application linéaire.

Synthèse. Soit $\overrightarrow{f}$ l'unique application linéaire évoquée ci-dessus. Alors l'application affine f est définie, et uniquement définie, par la relation :

$$f(M) = B_i + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_iM}).$$

Exercice 5. *Montrer que dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, dirigé par un espace vectoriel E, une droite et un plan (affines) peuvent, soit s'éviter (ils sont parallèles), soit s'intercepter en un unique point, soit être inclus l'un dans l'autre (la droite dans le plan).*

La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ affines considérés sont dirigés respectivement par une droite D et un plan P vectoriels. Ceux-ci sont soit supplémentaires dans E, soit la droite est incluse dans le plan.

Dans le premier cas, soit O un point de P. Alors, tout point $A \in \mathcal{D}$ est de la forme $O + \overrightarrow{u}$, avec $\overrightarrow{u} \in E$. Alors il existe $\overrightarrow{u_D} \in D$ et $\overrightarrow{u_P} \in P$, uniques, tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_D} + \overrightarrow{u_P}$. Alors, le point $I = O + \overrightarrow{u_P} = A - \overrightarrow{u_D}$ est dans l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$. Et tout point dans l'intersection est de la forme $I + \overrightarrow{v_D} = I + \overrightarrow{v_P}$ (avec donc $\overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{v_P}$), avec $\overrightarrow{v_D} \in D$ et $\overrightarrow{v_P} \in P$. On a alors $\overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{0}_E$, et donc I est le seul point d'intersection.

Dans le deuxième cas, si on suppose que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ne s'évitent pas, soit O un point d'intersection, alors $\mathcal{D} = O + D \subset \mathcal{P} = O + P$ puisque $D \subset P$.

Exercice 6. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même telle que pour tous $A, B \in \mathcal{E}$, on ait*

$$||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{f(A)f(B)}||.$$

Montrer que f est une isométrie affine.

Quitte à composer par une translation, on peut supposer que f a un point fixe O. On se ramène à faire le calcul dans un espace vectoriel euclidien.

Soit x un vecteur, λ un scalaire. Alors, $(O, x, \lambda x)$ forment un triangle plat ; ses côtés sont tels que la somme des longueurs des deux plus petits est la longueur du plus long. Cette relation est donc conservée par f : le triangle $(O, f(x), f(\lambda x))$ est tel que la somme des longueurs de ses deux plus petits côtés est la longueur du plus long. C'est un triangle plat. En discutant suivant la position de λ par rapport à 0 et ± 1, on obtient $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. En particulier, on a montré que f agit sur les droites passant par O.

Soit maintenant x et y deux points non colinéaires. On veut montrer que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (pour deux points colinéaires, cela se déduit de ce qui précède). On utilise le fait que les diagonales du parallélogramme $(Ox(x+y)y)$ se coupent en leur milieu z. Alors $x + y = 2z$, donc $f(x+y) = 2f(z)$. Or, comme z est le milieu de $[xy]$, $f(z)$ est le milieu de $[f(x)f(y)]$, et donc $2f(z) = f(x) + f(y)$. Ceci conclut la démonstration.