

**Devoir surveillé n°3**

Jeudi 9 décembre 2010

Durée 1h30

Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes de calcul doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée.

N'oubliez pas de préciser votre nom, votre section et votre groupe de TD sur les copies. Si vous rendez plusieurs copies, pensez à les numéroter.

**Exercice 1 [4 points]**

En utilisant les congruences, calculer le reste dans la division euclidienne par 101 des nombres suivants :

- a) 4142
- b) 44434241

**Exercice 2 [4 points]**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers supérieurs à 2 et premiers entre eux.

- a) Montrer qu'il existe  $u \in \mathbb{Z}$  tel que  $au \equiv 1 \pmod{b}$ .
- b) Montrer que l'on peut choisir  $u$  entre 0 et  $b - 1$ .

**Exercice 3 [2 points]**

Montrer que le nombre  $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$  est irrationnel.

**Exercice 4 [4 points]**

Soit  $A = \left\{ \frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- a) L'ensemble  $A$  a-t-il un maximum ? une borne supérieure ? Si oui, donner leurs valeurs ?
- b) Déterminer la borne inférieure de  $A$ . Est-ce un minimum ?

**Exercice 5 [4 points]**

Soit  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ \frac{1}{n+1}, 1 \right]$ . Cet ensemble est-il un intervalle ? Si oui, lequel ?

**Exercice 6 [4 points]**

Soient  $a < b$  deux réels. Montrez que

$$|x - a| \leq |x - b| \iff x \leq \frac{a + b}{2}.$$