Université Paul Sabatier **Toulouse**
L1-IMP-Math 2 **Année 2010-2011**

CORRECTION DU DS3

Exercice 1

Le reste dans la division euclidienne d'un entier a par 101 est l'unique entier $0 \leq r \leq 100$ tel que $a \equiv r \pmod{101}$. On remarque que $100 \equiv -1 \pmod{101}$. a)

$$\begin{aligned} 4142 &= 41 \times 100 + 42 \\ &\equiv 41 \times (-1) + 42 \pmod{101} \\ &\equiv 1 \pmod{101} \end{aligned}$$

Donc $0 \leq 1 \leq 100$ est le reste dans la division euclidienne de 4142 par 101.
b)

$$\begin{aligned} 44434241 &= 44 \times 100^3 + 43 \times 100^2 + 42 \times 100 + 41 \\ &\equiv 44 \times (-1)^3 + 43 \times (-1)^2 + 42 \times (-1) + 41 \pmod{101} \\ &\equiv -44 + 43 - 42 + 41 \pmod{101} \\ &\equiv -2 \pmod{101} \\ &\equiv 99 \pmod{101} \end{aligned}$$

Donc $0 \leq 99 \leq 100$ est le reste dans la division euclidienne de 44434241 par 101.

Exercice 2

a) Les entiers a et b étant premiers entre eux, le théorème de Bezout affirme qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
Pour de tels $u, v \in \mathbb{Z}$, b divise $1 - au = bv$, donc $au \equiv 1 \pmod{b}$.
b) On sait qu'il existe un unique $0 \leq u' \leq b - 1$ tel que $u \equiv u' \pmod{b}$.
Alors $au' \equiv au \equiv 1 \pmod{b}$; autrement dit, on peut choisir u entre 0 et $b - 1$.

Exercice 3

On remarque d'abord que $\sqrt{2}$ est irrationnel. En effet, si $\sqrt{2}$ était rationnel, il existerait $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Alors, de l'égalité $p^2 = 2q^2$, on déduit que p est nécessairement pair et donc q aussi, ce qui est absurde, car p et q sont premiers entre eux.
On raisonne ensuite par l'absurde en supposant $\sqrt{3 + \sqrt{2}} = r \in \mathbb{Q}$.
Alors $\sqrt{2} = r^2 - 3 \in \mathbb{Q}$, car la somme et le produit de nombres rationnels est rationnel.
C'est une contradiction avec ce qui précède.

Exercice 4

a) L'ensemble A admet 1 pour maximum car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} \leq 1 = \frac{1}{0+1} \in A.$$

Par conséquent 1 est aussi la borne supérieure de A (le maximum d'un ensemble est toujours la borne supérieure de cet ensemble).
b) On va montrer que la borne inférieure de A est 0, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, 0 \leq a < 0 + \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on peut alors choisir l'entier naturel $n := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$ (la partie entière de $1/\varepsilon$). Il vérifie bien que $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors $\frac{1}{n+1} \in A$ et $0 \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

Exercice 5
On montre que B est l'intervalle borné semi-ouvert à gauche $]0; 1]$. Pour montrer que $B \subset]0; 1]$, on note que

$$\forall b \in B, \exists n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n+1} \leq b \leq 1.$$

D'autre part, pour obtenir $]0; 1] \subset B$, on considère $\varepsilon \in]0; 1]$, et on utilise le fait, démontré à l'exercice 4, qu'il existe $a \in A, 0 \leq a < \varepsilon$, ou encore qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \leq 1$. Ceci signifie exactement que $\varepsilon \in B$.

Exercice 6 Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
0 \leq |x-a| \leq |x-b| &\iff (x-a)^2 \leq (x-b)^2 \\
&\iff x^2 - 2ax + a^2 \leq x^2 - 2bx + b^2 \\
&\iff -2ax + a^2 \leq -2bx + b^2 \\
&\iff 2x(b-a) \leq b^2 - a^2 \\
&\iff x \leq \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\
&\iff x \leq \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\
&\iff x \leq \frac{(b+a)}{2}
\end{aligned}$$

Remarque : on a utilisé l'hypothèse $b - a > 0$ quand on a divisé les deux membres de l'inégalité par $b - a$, sans changer son sens.