

## DEVOIR SURVEILLE 2

Jeudi 18 novembre 2010

Durée 1h30

Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes de calcul doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée.

N'oubliez pas de préciser votre nom, votre section et votre groupe de TD sur les copies. Si vous rendez plusieurs copies, pensez à les numéroter.

**Exercice 1 (4 points)** Calculer le pgcd de 401 et 130 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

**Exercice 2 (4 points)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Développer  $(1 - 1)^n$ . Donner une interprétation combinatoire du résultat obtenu.

**Exercice 3 (4 points)** Un *nombre-palindrome* est un nombre dont l'écriture (en base 10) est réversible. Par exemple, 43534 et 13266231 sont des nombres-palindromes. Combien y-a-t'il de nombres palindromes entre 1000 et 9999 ?

**Exercice 4 (5 points)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (1) Montrer que  $nC_{2n}^n = (n + 1)C_{2n}^{n-1}$ .
- (2) Montrer que  $n$  et  $n + 1$  sont premiers entre eux.
- (3) En déduire que  $n + 1$  divise  $C_{2n}^n$ .

**Exercice 5 (6 points)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (1) Montrer que  $2^{3n} - 1$  est divisible par 7, en utilisant la formule suivante, que l'on admettra :

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + \cdots + x^{n-1}).$$

- (2) En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  et  $2^{3n+2} - 4$  sont divisibles par 7.
- (3) Quel est l'ensemble des restes possibles pour la division euclidienne par 7 des puissances de 2 ?