Université Paul Sabatier — **Toulouse**
Math 2 — **Année 2010-2011**

CORRECTION : DEVOIR SURVEILLE 1

Exercice 1 :

a) La formule est évidente pour $n = 1$ $(2 \times 1 = 1 \times (1 + 1))$. Soit $n \geq 1$ quelconque. Supposons la propriété vraie au rang n: $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Comme

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k = 2\sum_{k=1}^{n} k + 2(n+1) \ ,$$

l'hypothèse de récurrence donne

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2) \ .$$

Ce qui termine la preuve.

b) Pour $n = 100$ la propriété ci-dessus donne: $1 + 2 + \cdots + 100 = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \times 101}{2} = 5050.$

Exercice 2: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et P la propriété

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x > a,\ \forall y \geq x,\ f(y) \geq f(x)$$

a) La négation de P est: $\quad \forall a \in \mathbb{R},\ \exists x > a,\ \exists y \geq x,\ f(y) < f(x)$

b) Considérons $f(x) = x^2$ et montrons qu'elle vérifie P. Il faut trouver un $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > a$ et tout $y \geq x$ on ait $f(y) \geq f(x)$. Prenons $a = 0$, alors pour tout $x > 0$ et tout $y \geq x$ on a bien $y^2 \geq x^2$. En effet, la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (on peut aussi le montrer à la main: en multipliant l'inégalité $y \geq x$ par les nombres positifs y et x on obtient $y^2 \geq xy$ et $xy \geq x^2$, donc $y^2 \geq x^2$).

Remarque: La propriété P signifie que f est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 3: Rappelons que par définition $f^{-1}(C) := \{x \in E : f(x) \in C\}$.

a) (i) On a:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \cup D \\ &\iff \big(f(x) \in C\big) \text{ ou } \big(f(x) \in D\big) \\ &\iff \big(x \in f^{-1}(C)\big) \text{ ou } \big(x \in f^{-1}(D)\big) \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D). \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(ii) De même

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D \\ &\iff \big(f(x) \in C\big) \text{ et } \big(f(x) \in D\big) \\ &\iff \big(x \in f^{-1}(C)\big) \text{ et } \big(x \in f^{-1}(D)\big) \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D). \end{aligned}$$

b) i. Il est clair que $(A \cup B) \cap B \subset B$.
Remarquons par la distributivité que $(A \cup B) \cap B = (A \cap B) \cup B$, d'où $B \subset (A \cup B) \cap B$ prouvant l'égalité demandée.

ii. $(\Rightarrow)$ Ce sens est évident.
$(\Leftarrow)$ Supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

$$\begin{array}{rcll} B & = & (A \cup B) \cap B & \\ & = & (A \cup C) \cap B & \text{car } A \cup B = A \cup C \text{ ,} \\ & = & (A \cap B) \cup (C \cap B) & \text{par la relation de distributivité,} \\ & = & (A \cap C) \cup (C \cap B) & \text{car } A \cap B = A \cap C \text{ ,} \\ & = & C \cap (A \cup B) & \text{par la relation de distributivité,} \\ & = & C \cap (A \cup C) & \text{car } A \cup B = A \cup C \text{ ,} \\ & = & C & \end{array}$$

c) Il suffit d'utiliser a) pour remarquer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ et d'appliquer b).

d) Prenons $E = \{1\}$, $F = \{1, 2\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(1) = 1$. Alors $f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{1, 2\}) = \{1\}$. Plus généralement, pour toute application non surjective $f \colon E \to F$, on a $f^{-1}(F) = f^{-1}(f(E)) = E$ et cependant $F \neq f(E)$.

Exercice 4 : Notons A la propriété "H dit toujours la vérité", B "la route de gauche mène à la capitale". Soit R la réponse de H à la question "est-ce-que $A \Leftrightarrow B$?"

a) On obtient le tableau de vérité ci-contre. La troisième colonne est facile. Pour remplir la dernière on doit tenir compte de l'information de la colonne "A" qui dit si H dit vrai ou ment.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	R
V	V	V	Oui
V	F	F	Non
F	V	F	Oui
F	F	V	Non

b) La question que doit poser le touriste est "est-ce que $A \iff B$?". En effet, la table montre que H répond oui quand B est vraie et non quand B est fausse (donc H donne la vraie réponse à la question "est-ce que la route de gauche mène à la capitale?"). En remplaçant A et B par leur énoncé la question qu'il faut poser devient

Est-ce que vous dites la vérité si et seulement si la route de gauche mène à la capitale?

Remarque: il existe plusieurs formulations qui donneront la même réponse. En effet on peut voir que les assertions $A \iff B$, $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A)$ et $(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$ sont équivalentes. En utilisant la dernière on obtient une autre formulation possible de la question:

Est-ce que (vous mentez et la route de droite mène à la capitale) ou (vous dites la vérité et la route de gauche mène à la capitale) ?