

L1-Mathématiques II

DS du 3-12-2009l

Note: *Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. Chaque réponse doit être clairement justifiée en indiquant le résultat du cours utilisé. La rédaction doit être soignée.*

Exercice 1 (12 points)

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$. On rappelle que si p est un entier naturel, le nombre entier $C_n^p = \binom{n}{p}$ désigne le nombre de parties de E ayant p éléments.

1. Rappeler l'expression de C_n^p (distinguer les cas $p \leq n$ et $p > n$).
2. En rappelant la formule du binôme donner l'expression de $(1+x)^n$, où x est entiers relatif, en fonction des puissances de x .
3. Démontrer que $\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$. Donner une interprétation combinatoire de cette formule.
4. Démontrer que $\sum_{p=0}^n (-1)^p C_n^p = 0$. Donner une interprétation combinatoire de cette formule.

Exercice 2 (8 points)

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux entiers suivants :

$$a_n := 11n + 6, \quad b_n := 3n + 4.$$

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de a_1 par b_1 et de a_2 par b_2 .
2. On suppose $n \geq 3$. Calculer $a_n - 3b_n$ et déterminer le reste r_n de la division euclidienne de a_n par b_n .
3. Pour quel(s) entier(s) $n \in \mathbb{N}$, le nombre entier b_n divise-t-il le nombre entier a_n ?