

L1- Module de Mathématiques UE8-MATH 2 : Devoir No 3

Exercice 1 :

On considère un ensemble E et deux sous-ensembles A et B de E . On considère l'application Φ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie ainsi

$$\Phi(X) = (A \cap X, B \cap X).$$

1. Montrez que si $A \cap B = \emptyset$, alors Φ est surjective.
2. Montrez que si $A \cup B = E$, alors Φ est injective.

Exercice 2 :

Soit E un ensemble non vide et $a \in E$. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère une application $\Phi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

1. Posons $B := \{x \in E; x \notin \Phi(x)\}$. Démontrer que, pour tout $a \in E$, $a \in \Phi(a) \cup B$ et que $a \notin \Phi(a) \cap B$. En déduire qu'il n'existe aucun point $a \in E$ tel que $B = \Phi(a)$.
2. Démontrer que Φ n'est pas surjective.
3. En déduire qu'il n'existe pas d'application surjective de \mathbf{N} sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.

Remarque : Ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de Cantor".

Exercice 3 :

On considère l'ensemble à n éléments $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. On appelle P_n la famille des sous ensembles de I_n qui ne contiennent jamais deux entiers consécutifs, et $f(n)$ le cardinal de P_n . Ainsi

$$P_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}, \text{ et } f(4) = 8.$$

1. Décrire P_1, P_2, P_3 .
2. Montrez que $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.
3. Pour quelles valeurs du réel r la suite $u_n = r^n$ satisfait-elle l'équation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

4. Identifiez quatre nombres réels r_1 et r_2, a_1 et a_2 tels que la suite $v_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n$ satisfasse l'équation de récurrence $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ ainsi que $v_1 = f(1), v_2 = f(2)$.
5. En déduire une expression exacte de $f(n)$.
6. Montrez qu'il existe un réel $r > 1$ que l'on déterminera tel que $\frac{f(n)}{r^n}$ converge vers un

nombre réel que l'on déterminera aussi.

Remarque : la suite $f(n)$ s'appelle la suite de Fibonacci. Le nombre r de la question 6 s'appelle le nombre d'or.

Exercice 4 (facultatif) : Montrer que dans une soirée où se rendent au moins 6 personnes, il y en a au moins trois qui se connaissent mutuellement ou au moins trois qui sont étrangères l'une à l'autre.

(Indication : on montera d'abord que c'est vrai si l'une des personnes en connaît au moins trois autres.)