

COURBES PSEUDO-HOLOMORPHES ÉQUISINGULIÈRES EN DIMENSION 4

PAR JEAN-FRANÇOIS BARRAUD (*)

RÉSUMÉ. — Dans une variété presque complexe V de dimension 4, on considère l'espace \mathcal{M} des courbes pseudo-holomorphes de degré et d'homologie donnés, une courbe $C \in \mathcal{M}$, et un ensemble \mathfrak{S} de singularités de C (ou plus généralement, un « jeu de contraintes » sur C). On donne alors une condition numérique sur C et \mathfrak{S} sous laquelle l'espace $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ des courbes « ayant les singularités imposées par \mathfrak{S} » est localement une sous-variété de \mathcal{M} . Ce résultat est alors appliqué à l'étude des arrangements de droites de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$: on montre en particulier que tout arrangement de droites de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ générique, c'est-à-dire n'ayant que des points doubles ordinaires, est isotope à un arrangement standard.

ABSTRACT. — EQUISINGULAR PSEUDO-HOLOMORPHIC CURVES IN 4 DIMENSIONAL ALMOST COMPLEX MANIFOLDS. — Let \mathcal{M} denote the space of all pseudo-holomorphic curves of given genus and homology in an almost complex manifold (V, J) , and let \mathfrak{S} be a set of singular points of a curve $C \in \mathcal{M}$ (or more generally, a set of “conditions” on C). We give a numerical condition on C and \mathfrak{S} under which the space $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ of all curves having “the same” singularities as C near each point of \mathfrak{S} is a submanifold of \mathcal{M} (in a neighborhood of C). As an application, we study the sets of pseudo-holomorphic lines in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$: we prove in particular, that any generic set, *i.e.* having only double points, is isotopic to a set of standard lines.

Introduites par M. Gromov [3] en 1985, les courbes pseudo-holomorphes et leurs espaces de modules sont aujourd'hui des objets fondamentaux de la géométrie symplectique. Par ailleurs, l'étude des courbes équisingulières, c'est-à-dire la description de l'espace des courbes ayant une liste de singularités donnée est un sujet classique de géométrie algébrique. Le but de cet article est d'aborder ce type de question dans le cadre presque complexe.

Dans une variété presque complexe (V, J) de dimension 4, on se donne une courbe presque complexe C irréductible, et on note \mathcal{M} l'espace des courbes presque complexes de même genre et même homologie que C . Les travaux de

(*) Texte reçu le 22 décembre 1998, révisé le 18 juin 1999, accepté le 30 septembre 1999.
J.-F. BARRAUD, Université Lille 1, UFR de Mathématiques, 59655 Lille (France).
Email : barraud@agat.univ-lille1.fr.

Classification AMS : 53C15, 30G20, 58D, 14H10.

Mots clés : courbes pseudo-holomorphes, familles de courbes équisingulières, espaces modulaires, arrangements de droites, dimension 4.

S. Ivashkovich et V. Shevchishin [5] (voir le théorème 4), ainsi que la généricité automatique décrite par H. Hofer, V. Lizan, et J.-C. Sikorav [4] (voir le théorème 5) permettent d'établir le théorème suivant lorsque V est de dimension 4 : on note μ le nombre avec multiplicité de points non immergés de C . On a :

THÉORÈME 1. — *Si*

$$c_1 \cdot C \geq 1 + \mu,$$

alors \mathcal{M} est une variété lisse au voisinage de C , de dimension $2(c_1 \cdot C - (1 - g))$.

Cet énoncé donne une structure de variété lisse à l'espace des perturbations de C , et il est naturel de se demander, lorsque C est singulière, ce qu'il advient de ses singularités au cours d'une perturbation : peuvent-elles être conservées, définissent-elles une sous-variété de \mathcal{M} , a-t-on une stratification locale de \mathcal{M} en sous-variétés associées à des singularités plus ou moins fortes ?

Plus généralement, on s'intéresse ici à l'espace $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ des courbes voisines de C qui satisfont « un jeu de contraintes » \mathfrak{S} sur C . Le sens précis donné aux mots « jeu de contraintes » dans cet article sera précisé plus tard. Il s'agit d'imposer aux perturbations de C de passer par des points fixés, d'avoir, au voisinage de certains points singuliers de C , les « mêmes singularités » que C , ou encore de demander à ces singularités de se déplacer sur des sous-variétés.

L'objet de ce travail est d'étudier la régularité de cet espace $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$. On se propose d'étendre le théorème 1 à l'espace $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$: à chaque contrainte élémentaire \mathfrak{S}_i de \mathfrak{S} , on associe (voir la section 1) deux entiers $d_h(\mathfrak{S}_i)$ et $d_v(\mathfrak{S}_i)$, qui mesurent le degré « consommé » par chaque contrainte sur les fibrés tangent et normal de C , et un troisième entier $\text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{S}_i)$ qui mesure la codimension (réelle) associée à la contrainte. On a alors :

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_i\}_i$ un jeu de contraintes sur C . Si*

$$(1) \quad c_1 \cdot C \geq 1 + \mu + \sum_i d_v(\mathfrak{S}_i),$$

$$(2) \quad 4g - 3 \leq \mu - \sum_i d_h(\mathfrak{S}_i),$$

alors l'espace $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ des courbes voisines de C dans \mathcal{M} satisfaisant ces contraintes est une sous-variété de codimension $\sum \text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{S}_i)$.

REMARQUE. — La technique utilisée ici pour étudier les courbes voisines de C satisfaisant les contraintes de \mathfrak{S} reste valable en dimension supérieure à 4. Cependant, la possibilité de garantir la régularité des espaces \mathcal{M} ou $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ à l'aide d'une simple condition numérique, en particulier sans hypothèse de généricité sur J , est spécifique à la dimension 4.

REMARQUE. — Lorsque la variété V n'a pas de courbe exceptionnelle, l'existence d'une courbe C satisfaisant (1) implique (voir [6], [10]) que V est rationnelle ou réglée. Cet énoncé ne s'applique donc qu'à ces variétés. Les résultats de D. Auroux [1] suggèrent toutefois que la connaissance des courbes pseudo-holomorphes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ peut être utile pour étudier les variétés symplectiques de dimension 4.

REMARQUE. — Enfin, signalons que les conditions (1) et (2) sont optimales, dans le sens où on peut fournir des exemples où elles ne sont pas satisfaites, et où $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ n'est pas une sous-variété de \mathcal{M} (ou a une codimension trop petite).

Cet énoncé concerne les courbes irréductibles, mais peut être étendu au cas des courbes réduites. À titre d'application, on se propose à la fin de cet article de comparer les arrangements de droites presque complexes et les arrangements standards dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$: par droite pseudo-holomorphe, on désigne ici une courbe pseudo-holomorphe de degré 1, et par arrangement, une collection finie de droites. Dans [3], M. Gromov démontre que toute droite pseudo-holomorphe est isotope à une droite algébrique. Ce résultat est étendu ici aux arrangements de droites : on appelle point spécial d'un arrangement un point par lequel passent au moins trois droites, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit J une structure presque complexe calibrée par la forme de Kähler standard de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Tout arrangement de J -droites ayant au plus cinq points spéciaux est isotope (parmi les arrangements de droites pseudo-holomorphes) à un arrangement standard.*

Ce théorème s'applique en particulier au cas des arrangements génériques, c'est à dire n'ayant que des points doubles. On n'utilise ici qu'un cas très simple du théorème 2 puisqu'on se limite à imposer aux courbes de passer par des points. On pourra trouver une autre application utilisant des contraintes plus fortes dans [2] où on démontre que toute courbe pseudo-holomorphe rationnelle à points doubles ordinaires de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ est isotope à une courbe algébrique.

Le plan de cet article est le suivant : la première section est consacrée à quelques rappels, à la définition des objets qui interviennent dans l'énoncé du théorème 2 et présente le plan de la preuve. Dans la seconde, on introduit les espaces de jets, qu'on utilise dans la troisième pour caractériser les contraintes et prouver le théorème 2. La quatrième section est consacrée à la généralisation aux courbes réduites et à l'étude des arrangements de droites.

1. Notations et plan de la preuve

1.1. Espaces de courbes et opérateurs elliptiques.

Soit (V, J) une variété presque complexe de dimension (réelle) 4. La structure

presque complexe J est supposée de classe C^k , avec $k \geq 1$ suffisamment grand. Soit Σ une surface de Riemann compacte de genre g . L'espace des structures complexes sur Σ sera noté $\mathcal{J}(\Sigma)$. Pour considérer les éléments de l'espace de Teichmüller $\mathfrak{T}(\Sigma) = \mathcal{J}(\Sigma)/\text{Diff}_0(\Sigma)$ comme des structures complexes concrètes, on choisit une section de la projection $\mathcal{J}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{T}(\Sigma)$, et on note $\mathcal{J}_0(\Sigma)$ son image : une structure complexe sur Σ désignera maintenant toujours un élément de $\mathcal{J}_0(\Sigma)$.

Rappelons qu'une application $u : \Sigma \rightarrow V$ est dite pseudo-holomorphe pour une structure complexe j sur Σ et la structure J sur V si et seulement si

$$(3) \quad du + J(u) du j = 0.$$

On se donne une classe d'homologie $A \in H_2(V, \mathbb{Z})$, et on note

- $\mathcal{U} = \{u \in C^{k+1, \alpha}(\Sigma, V) ; [u(\Sigma)] = A\}$,
- $\widetilde{\mathcal{M}} = \{(u, j) \in \mathcal{U} \times \mathcal{J}_0(\Sigma) ; du + J du j = 0\}$,
- $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}}/(\text{Diff}(\Sigma)/\text{Diff}_0(\Sigma))$.

REMARQUE. — On a choisi ici de commencer par faire agir le groupe $\text{Diff}_0(\Sigma)$ sur les structures complexes, ce qui oblige à choisir une section de la projection $\mathcal{J}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{T}(\Sigma)$. Dans les définitions ci-dessus, on aurait pu choisir de considérer les couples (u, j) pseudo-holomorphes avec $j \in \mathcal{J}(\Sigma)$, et faire ensuite agir le groupe $\text{Diff}(\Sigma)$ sur les deux facteurs en même temps. La contrepartie à payer est que l'espace $\widetilde{\mathcal{M}}$ est alors de dimension infinie.

REMARQUE. — Pour éviter les paramétrages non primitifs, c'est-à-dire ceux qui se factorisent par un revêtement de Σ , on demande traditionnellement dans la définition de \mathcal{U} que u soit «quelque part injective» [8] ; c'est une condition ouverte, et comme nous ne nous intéressons qu'à une description locale de nos espaces au voisinage d'une courbe donnée, nous aurons seulement soin de toujours baser nos constructions sur le choix d'un paramétrage primitif de cette courbe.

Nous exploiterons la description locale de $\widetilde{\mathcal{M}}$ et \mathcal{M} proposée par S. Ivashkovich et V. Shevchishin [5], que nous rappelons brièvement ici pour fixer les notations, et introduire les principales suites exactes utilisées plus loin.

Afin d'étudier l'équation (3), on note

$$\Phi(u, j, J) = du + J(u) du j.$$

On définit ainsi une section du fibré \mathcal{F} sur $\mathcal{U} \times \mathcal{J}_0(\Sigma)$ de fibre $\Gamma^{k, \alpha}(\Lambda_j^{01} \Sigma \otimes u^* TV)$ en (u, j) .

Soit $(u, j) \in \Phi^{-1}(0)$ et $C = u(\Sigma)$. Le choix d'une connexion complexe ∇ sur V permet linéariser Φ par rapport à u en (u, j) . Cette linéarisation ne dépend pas du choix de ∇ et définit un opérateur D d'ordre 1 de $\Gamma(u^*TV)$ vers $\Gamma(\Lambda^{01}\Sigma \otimes u^*TV)$. Cet opérateur joue un rôle crucial dans la description des courbes paramétrées. Dans toute la suite, on notera

$$E = u^*TV.$$

L'opérateur D est de la forme $\nabla^{01} + a$ où a est un opérateur \mathbb{R} -linéaire d'ordre 0. Désignons par $\mathcal{O}_D(E)$ le faisceau des sections « D -holomorphes », c'est-à-dire des germes de zéros de cet opérateur. De même, notons

$$H_D^0(E) = \ker D \quad \text{et} \quad H_D^1(E) = \text{coker } D.$$

La relation $du \bar{\partial} = D du$ permet d'obtenir la suite exacte [5] :

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\partial}}(T\Sigma) \xrightarrow{du} \mathcal{O}_D(E) \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0.$$

L'application du ne s'annule qu'en un nombre fini de points z_i avec en chaque point une multiplicité finie μ_i . Soit $A = \sum_i \mu_i [z_i]$ le diviseur associé aux zéros de du . L'application du s'étend alors aux sections de $T\Sigma \otimes A$. L'image de l'application $du : \mathcal{O}(T\Sigma \otimes A) \rightarrow \mathcal{O}_D(E)$ est exactement le faisceau des sections D -holomorphes « horizontales », c'est-à-dire qui sont des sections de u^*TC . Considérons alors le fibré normal $N = E/u^*TC$. La projection de D sur N définit un opérateur D^N , lui aussi de la forme $\bar{\partial} + a_N$, qui rend la suite

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(T\Sigma \otimes A) \xrightarrow{du} \mathcal{O}_D(E) \rightarrow \mathcal{O}_{D^N}(N) \rightarrow 0$$

exacte.

En notant

$$\mathcal{N}_1 = \bigoplus_{du=0} \mathbb{C}_{z_i}^{\mu_i}$$

le faisceau gratte-ciel ayant une fibre \mathbb{C}^{μ_i} en chaque point z_i , on a

$$\mathcal{N} \simeq \mathcal{O}_{D^N}(N) \oplus \mathcal{N}_1,$$

et on peut réécrire la suite (4) sous la forme

$$(6) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\partial}}(T\Sigma) \xrightarrow{du} \mathcal{O}_D(E) \rightarrow \mathcal{O}_{D^N}(N) \oplus \mathcal{N}_1 \rightarrow 0.$$

Les suites exactes longues de cohomologie de (5) et (6) permettent alors d'étudier les variétés $\widehat{\mathcal{M}}$ et \mathcal{M} . L'étude des courbes paramétrées avec j fixé se ramène en effet à l'étude de la surjectivité de D . En remarquant d'une part que si (u, j) est holomorphe, alors j est entièrement déterminé par u , et d'autre part que l'espace tangent à l'orbite de u sous l'action des (germes d') automorphismes de (Σ, j) est exactement l'image de l'application $\mathcal{O}_{\bar{\partial}}(T\Sigma) \xrightarrow{du} \mathcal{O}_D(E)$, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 4 (voir [5]). — Si $H_{DN}^1(N) = 0$, alors, au voisinage de (u, j) , l'espace $\widetilde{\mathcal{M}}$ est une variété de dimension finie, de même qu'au voisinage de C , l'espace \mathcal{M} est une variété de dimension finie dont l'espace tangent en C est isomorphe à

$$T_C\mathcal{M} \cong H_{DN}^0(N) \oplus H^0(\mathcal{N}_1).$$

REMARQUE. — On peut préciser un peu cet isomorphisme. Le faisceau \mathcal{N}_1 est exactement donné par

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{O}(du(T\Sigma \otimes A)) / du(\mathcal{O}(T\Sigma)) = du(\mathcal{O}(T\Sigma \otimes A) / \mathcal{O}(T\Sigma)) = du(\widetilde{\mathcal{N}}_1)$$

où $\widetilde{\mathcal{N}}_1$ est isomorphe à \mathcal{N}_1 . On obtient ainsi la suite

$$0 \rightarrow H^0(\widetilde{\mathcal{N}}_1) \xrightarrow{du} T_C\mathcal{M} \rightarrow H_{DN}^0(N) \rightarrow 0,$$

dans laquelle les flèches sont canoniques.

En dimension 4, le fibré N est de rang complexe 1 et on dispose donc de la généralité automatique décrite par H. Hofer, V. Lizan et J.-C. Sikorav : soit L un fibré en droites complexes sur Σ et D un opérateur de la forme $\bar{\partial} + a$ sur L . L'opérateur D est elliptique et le théorème de Riemann-Roch permet de calculer son indice : $\text{ind}_{\mathbb{R}} D = 2(c_1(L) + 1 - g)$. Si cet indice est positif (resp. négatif), on peut perturber D pour le rendre surjectif (resp. injectif). Le théorème suivant affirme que si cet indice est suffisamment positif (resp. négatif), aucune perturbation n'est nécessaire, D est automatiquement surjectif (resp. injectif).

THÉORÈME 5 (voir [4]). — Dans les conditions ci-dessus,

- Si $c_1(L) \geq 2g - 1$ alors $\text{coker } D = 0$.
- Si $c_1(L) \leq -1$ alors $\text{ker } D = 0$.

En appliquant ce résultat au fibré normal N , on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6. — Si $c_1 \cdot C \geq 1 + \mu$, alors, au voisinage de C , l'espace \mathcal{M} est une variété de dimension finie et $T_C\mathcal{M} \cong H_{DN}^0(N) \oplus H^0(\mathcal{N}_1)$.

1.2. Jeux de contraintes.

On désigne toujours par C une courbe de \mathcal{M} . Une contrainte sur C est la donnée de l'un des objets suivants :

 Un point immergé c de C , à k -branches locales, la liste (r_{ij}) des ordres de contact entre branches locales, et éventuellement une sous-variété ${}^{k,r}V_s$ de V passant par c . Les courbes voisines satisfaisant cette contrainte sont alors les courbes ayant au voisinage de c un point immergé $c' \in V_s$ avec le

même nombre de branches locales et les mêmes contacts entre branches. Pour ne pas alourdir les énoncés et les notation, nous traiterons seulement le cas où toutes les branches ont un contact d'ordre r : les situations plus complexes se traitent exactement de la même façon, mais les conditions numériques associées sont assez lourdes à expliciter. Le cas $r = 0$ correspond au cas des points multiples ordinaires. La contrainte associée au cas où $k = 1$ et où V_s est réduite à un point consiste simplement à imposer aux courbes de passer par un point fixe.

 Un point non immergé c de C et «le premier terme» du développement $_{p,q}$ de la singularité [7] : il existe des exposants p et q , avec $q > p$ et $q \notin p\mathbb{Z}$, tels que dans des coordonnées convenables, C admette au voisinage de c un paramétrage primitif u de la forme $u(z) = (z^p, z^q) + o(z^q)$. La définition de ces exposant sera précisée dans la section 3.2. On se donne en plus une sous-variété V_s de V . Les courbes voisines de C satisfaisant cette contrainte sont alors celles ayant au voisinage de c un point non immergé $c' \in V_s$ dont les exposants associés sont les mêmes.

Un jeu de contraintes \mathfrak{S} sur C est la donnée d'un nombre fini de contraintes élémentaires $\{\mathfrak{S}_i\}$ de l'un de ces types.

Les grandeurs $d_v(\mathfrak{S}_i)$, $d_h(\mathfrak{S}_i)$ et $\text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{S}_i)$ qu'on associe aux contraintes élémentaires de \mathfrak{S} sont les suivantes. Si \mathfrak{S}_i est :

 un point immergé de C à k branches locales tangentes entre elles à l'ordre r , astreint à appartenir à une sous-variété V_s :

$$\begin{cases} d_h(\mathfrak{S}_i) = 0, & d_v(\mathfrak{S}_i) = k(r + 1), \\ \text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{S}_i) = 2((k - 1)(r + 1) - 1) + \text{codim}_{\mathbb{R}}(V_s); \end{cases}$$

 un point non immergé associé au couple (p, q) , avec $q = kp + r$ ($0 < r < p$), sur une sous-variété V_s :

- si $q = kp + 1$:

$$\begin{cases} d_h(\mathfrak{S}_i) = p, & d_v(\mathfrak{S}_i) = q - 1, \\ \text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{S}_i) = 2(p + q - k - 3) + \text{codim}_{\mathbb{R}}(V_s); \end{cases}$$

- si $q = kp + r$, $1 < r < p$:

$$\begin{cases} d_h(\mathfrak{S}_i) = p, & d_v(\mathfrak{S}_i) = q \\ \text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{S}_i) = 2(p + q - k - 2) + \text{codim}_{\mathbb{R}}(V_s) \end{cases}$$

Le schéma de la preuve du théorème 2 est le suivant. On considère l'espace $\widetilde{\mathcal{M}}$ des courbes paramétrées. On caractérise chaque singularité de \mathfrak{S} par une sous-variété $\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}$ d'un espace de jets convenable. On a un diagramme de la forme

suivante :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}} \times \Sigma^m & \xrightarrow{f} & \mathcal{T}_J \\ \pi \downarrow & & \cup \\ & & \mathcal{S}_{\mathfrak{E}} \\ \widetilde{\mathcal{M}} & & \end{array}$$

où f est construite à l'aide d'applications d'évaluation des jets. On a alors $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathfrak{E}} = \pi(f^{-1}(\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}))$ et on est amené à étudier la transversalité de f et $\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}$. Il nous faut donc commencer par définir les espaces de jets \mathcal{T}_J et étudier l'application d'évaluation (section 2). Il faut ensuite construire les variétés $\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}$ et l'application f , puis étudier leur transversalité. Ce travail est fait séparément pour chaque contrainte élémentaire (sections 3.1 pour les points immergés et 3.2 pour les singularités non immergées) puis pour un jeu de contraintes multiple (section 3.3).

2. Espaces de jets, application d'évaluation

Pour étudier les singularités des courbes voisines d'une courbe donnée, nous voulons interpréter une singularité comme une sous-variété d'un espace de jet. Cependant l'espace des jets d'applications pseudo-holomorphes est beaucoup plus petit que l'espace des jets d'applications quelconques de Σ dans V , et n'est pas non plus en général l'espace des jets \mathbb{C} -linéaires. L'objet de cette partie est de définir cet espace et d'étudier l'application d'évaluation des jets qui servira à caractériser les courbes qui satisfont nos contraintes.

2.1. Espaces de jets.

Soit J un germe de structure presque complexe sur \mathbb{C}^2 , avec $J(0) = i$. Un germe d'application $u : (\Sigma, z_0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est J holomorphe s'il satisfait l'équation

$$(7) \quad du + J(u)duj = 0.$$

Cette équation implique naturellement que le jet d'ordre 1 de u en z_0 est \mathbb{C} -linéaire. Pour les ordres supérieurs, des dérivées de J interviennent : la partie anti-complexe du jet d'ordre $k+1$, à défaut d'être nulle, est entièrement déterminée par la donnée des jets d'ordre k de u et de J .

Soit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}, z_0}^k$ l'espace des jets d'ordre k en z_0 d'applications de Σ dans V (de classe C^k). L'équation (7) induit des équations sur $\mathcal{T}_{\mathbb{R}, z_0}^k$, qui définissent une sous-variété \mathcal{T}_{J, z_0}^k . Cet espace \mathcal{T}_{J, z_0}^k est un graphe au-dessus de l'espace des jets \mathbb{C} -linéaires qui est lui même isomorphe à $(\mathbb{C}^2)^{k+1}$ (il existe un décalage d'une unité entre l'ordre des jets et la dimension de l'espace associé à cause de la composante d'ordre 0).

Le jet d'ordre k en z_0 d'un germe d'application v (j, J) -holomorphe sera noté $\tau_{z_0}^k(v)$.

REMARQUE. — On peut en fait effectuer cette construction en remplaçant (7) par n'importe quelle équation aux dérivées partielles $\Psi(u) = 0$ où Ψ a le même symbole principal que $\bar{\partial}$.

REMARQUE. — Dans [11], J.-C. Sikorav montre que pour tout vecteur tangent v à \mathbb{C}^2 en 0 , il existe un germe u d'application pseudo-holomorphe telle que $u(0) = 0$ et $du(0) = v$. Cette démonstration s'étend au cas des jets d'ordre supérieurs. Elle repose sur la comparaison des situations intégrable et presque complexe sur des voisinages très petits de l'origine : un théorème de fonctions implicites permet de mettre en correspondance germes holomorphes et pseudo-holomorphes. Ainsi, tous les points de \mathcal{T}_{J,z_0}^k sont bien de la forme $\tau_{z_0}^k(v)$ pour un germe d'application pseudo-holomorphe v convenable.

Remarquons enfin que l'espace \mathcal{T}_J^k que nous venons de construire dépend du point $z_0 \in \Sigma$ ainsi que de la structure complexe j de Σ . En considérant tous ces espaces lorsque z_0 et j varient, nous obtenons une fibration sur $\Sigma \times \mathcal{J}_0(\Sigma)$, notée \mathcal{T}_J^k .

Soit maintenant $(u, j) \in \widetilde{\mathcal{M}}$, et z_1, \dots, z_m , m points distincts sur Σ , affectés de multiplicités k_1, \dots, k_m . Le choix de cartes locales sur V au voisinage des points $u(z_i)$ permet alors de définir des espaces $\mathcal{T}_J^{k_i}$ et, au voisinage de (u, j, z) dans $\widetilde{\mathcal{M}} \times (\Sigma)^m$, l'application

$$\tau : \widetilde{\mathcal{M}} \times (\Sigma)^m \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{T}_J^{k_i}$$

qui consiste à évaluer les jets d'applications pseudo-holomorphes en m points. L'espace $\bigoplus_i \mathcal{T}_J^{k_i}$ est fibré sur Σ^m et sur $\mathcal{J}_0(\Sigma)$ (on ne répète pas la structure complexe). L'application τ respecte bien sûr ces deux projections.

2.2. Linéarisation de τ , opérateur \widetilde{D} .

La linéarisation de τ par rapport à u définit une application de l'espace des sections D -holomorphes de E dans l'espace tangent à $\bigoplus_i \mathcal{T}_{J,z_i}^{k_i}$. Cette application est définie au niveau des faisceaux : l'espace tangent à $\mathcal{T}_{J,z_i}^{k_i}$ s'identifie en effet à l'espace des jets en z_i de sections D -holomorphes, qu'on peut voir comme un faisceau gratte-ciel concentré en z_i .

On se trouve en fait dans la situation générale suivante : soit F un fibré complexe sur Σ et D_0 un opérateur de la forme $\bar{\partial} + a$ sur F . Soit z_1, \dots, z_m , m points distincts de Σ , affectés de multiplicités k_1, \dots, k_m . Comme ci-dessus, on considère l'espace \mathcal{T}_{D_0} des jets de sections D_0 -holomorphes, et on s'intéresse à

l'application d'évaluation des jets d'ordre k_i en z_i . On a la suite exacte

$$\mathcal{O}_{D_0}(F) \xrightarrow{\tau} \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{T}_{D_0, z_i}^{k_i} \longrightarrow 0.$$

Soit P le diviseur $-\sum_{i=1}^m (k_i + 1)[z_i]$, et $\tilde{F} = F \otimes P$.

LEMME 1. — Il existe un opérateur $\tilde{D}_0 = \bar{\partial} + \tilde{a}$ sur \tilde{F} , qui est de plus unique, rendant le diagramme suivant commutatif :

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} L^{1,p}(\tilde{F}) & \xrightarrow{\iota} & L^{1,p}(F) \\ \tilde{D}_0 \downarrow & & D_0 \downarrow \\ L^p(\Lambda^{0,1}\Sigma \otimes \tilde{F}) & \longrightarrow & L^p(\Lambda^{0,1}\Sigma \otimes F). \end{array}$$

Démonstration. — La définition de \tilde{D}_0 ne pose de difficultés qu'au voisinage des points z_i . Dans une carte locale, si un tel opérateur existe, il est nécessairement de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_0 s &= z^{-(k_i+1)} D_0 z^{k_i+1} s \\ &= z^{-(k_i+1)} \bar{\partial}(z^{k_i+1} s) + z^{-(k_i+1)} a z^{k_i+1} s \\ &= (\bar{\partial} + z^{-(k_i+1)} a z^{k_i+1}) s. \end{aligned}$$

Les opérateurs $z^{-(k_i+1)} a z^{k_i+1}$ se recollent pour définir un opérateur \tilde{a} d'ordre 0 et de classe L^∞ en z sur les sections de \tilde{F} . L'opérateur $\tilde{D}_0 = \bar{\partial} + \tilde{a}$ est donc bien défini, et de plus, la régularité de \tilde{a} suffit pour lui appliquer les résultats classiques sur les opérateurs elliptiques (en particulier \tilde{D}_0 est Fredholm). \square

La suite

$$(9) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{D}_0}(\tilde{F}) \rightarrow \mathcal{O}_{D_0}(F) \xrightarrow{\tau} \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{T}_{D_0, z_i}^{k_i} \rightarrow 0$$

est donc exacte. Elle donne lieu à la suite exacte longue de cohomologie

$$(10) \quad 0 \rightarrow H_{\tilde{D}_0}^0(\tilde{F}) \rightarrow H_{D_0}^0(F) \xrightarrow{\tau} \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{T}_{D_0, z_i}^{k_i} \rightarrow H_{\tilde{D}_0}^1(\tilde{F}) \rightarrow H_{D_0}^1(F) \rightarrow 0.$$

Cette suite permet d'étudier l'image de τ . Rappelons ici que

$$c_1(\tilde{F}) = c_1(F) - \text{rg}(F) \left(\sum_{i=1}^m (k_i + 1) \right).$$

En particulier, si F est de rang 1, la généralité automatique appliquée à \tilde{F} montre que lorsque $c_1(F) \geq 2g - 1 + \sum_{i=1}^m (k_i + 1)$, $H_D^1(\tilde{F}) = 0$, et donc τ est surjective.

Par ailleurs, en appliquant cette construction aux trois fibrés $T = (T\Sigma \otimes A, \bar{\partial})$, (E, D) , et (N, D^N) , et en considérant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite (5), on forme le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{\delta} & & \downarrow \delta \\
 0 & \rightarrow & H^0(\tilde{T}) & \longrightarrow & H^0(T) & \xrightarrow{L\tau_h} & \bigoplus_i \mathbb{C}^{k_i+1} & \longrightarrow & H^1(\tilde{T}) & \longrightarrow & H^1(T) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \\
 (11) & & 0 & \rightarrow & H^0(\tilde{E}) & \longrightarrow & H^0(E) & \xrightarrow{L\tau} & \bigoplus_i \mathbb{C}^{2(k_i+1)} & \longrightarrow & H^1(\tilde{E}) & \longrightarrow & H^1(E) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H^0(\tilde{N}) & \longrightarrow & H^0(N) & \xrightarrow{L\tau_v} & \bigoplus_i \mathbb{C}^{k_i+1} & \longrightarrow & H^1(\tilde{N}) & \longrightarrow & H^1(N) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \bar{\delta} & & \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

L'intérêt de ce diagramme est de « décomposer » la linéarisation de τ en partie horizontale $L\tau_h$ et partie verticale $L\tau_v$. Les fibrés intervenant dans la première et la dernière ligne étant de rang 1, cela permet de leur appliquer la généralité automatique.

Il reste maintenant à caractériser les singularités à l'aide de sous-variétés des espaces de jets. C'est l'objet de la section qui suit.

3. Le cas irréductible

Dans toute cette partie, on s'intéresse à des contraintes sur une courbe C irréductible, c'est à dire qui admet un paramétrage primitif $u : \Sigma \rightarrow V$ avec Σ connexe. Le cas des courbes non irréductibles, mais réduites, c'est à dire des collections finies de courbes irréductibles deux à deux distinctes est sensiblement différent et sera traité en 4.

3.1. Singularités immergées.

Le cas des singularités immergées est un peu plus simple que les autres dans le sens où une telle singularité peut être caractérisée directement sur les « perturbations non paramétrées » de la courbe (*i.e.* « sur la composante normale »

des perturbations de la courbe), et donc être étudiée sans faire intervenir la totalité du diagramme (11). De façon plus fondamentale, la notion de contact d'ordre r entre courbes s'exprime naturellement en termes de courbes non paramétrées.

Cependant, pour que le texte garde une certaine uniformité, il est utile de disposer d'une construction reposant sur les courbes paramétrées. Plutôt que de compliquer artificiellement la géométrie du problème, la technique utilisée ici consiste à effectuer les constructions sur \mathcal{M} , puis à les tirer en arrière sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ par le biais de la projection $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$.

3.1.1. Caractérisation. — Lorsque C est une courbe immergée, les courbes voisines de C s'interprètent comme des graphes de sections du fibré normal N de C . Il existe un opérateur $\bar{\partial}_\nu$, construit explicitement par H. Hofer, V. Lizan et J.-C. Sikorav [4], qui caractérise les sections de N dont le graphe est une J -courbe. Il est défini au voisinage de la section nulle dans $\Gamma^{k+1,\alpha}(N)$, prend ses valeurs dans $\Gamma^{k,\alpha}(\Lambda^{0,1}\Sigma \otimes N)$ et localement on a $\mathcal{M} = \bar{\partial}_\nu^{-1}(0)$. On vérifie facilement que la linéarisation de $\bar{\partial}_\nu$ en la section nulle coïncide avec l'opérateur D^N défini plus haut.

Dans le cas non immergé, l'opérateur $\bar{\partial}_\nu$ n'existe plus globalement, mais seulement localement : sur un voisinage $U \subset \Sigma$ d'un antécédent d'un point immergé $c \in C$, la même construction reste valable, et permet de définir un opérateur $\bar{\partial}_\nu|_U$ sur les sections de $N|_U$. On a alors une injection

$$(12) \quad \mathcal{M} \longrightarrow [\bar{\partial}_\nu|_U]^{-1}(0).$$

Lorsque \mathcal{M} est une variété, la linéarisation de (12) donne une injection

$$(13) \quad T_C\mathcal{M} = H_{D^N}^0(N) \oplus H^0(\mathcal{N}_1) \hookrightarrow \ker(D^N|_U).$$

REMARQUE. — L'espace $\ker(D^N|_U)$ désigne ici le noyau de la restriction de D^N à U : c'est en général un espace vectoriel de dimension infinie puisque U n'est pas compact.

Supposons maintenant que par c passent k branches (si $k = 1$, c est un point lisse). Choisissons un antécédent z_1 de c , et identifions un voisinage de c dans V à un voisinage de la section nulle du fibré normal restreint à un voisinage U de z_1 . On peut supposer sans perte de généralité que les autres branches de C sont encore des graphes de sections dans ce fibré, et si on se restreint à un domaine suffisamment petit, que ces sections appartiennent au domaine de définition de $\bar{\partial}_\nu$. En effet, pour tout $M > 0$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\bar{\partial}_\nu$ soit bien défini sur l'ensemble des sections bornées par M en norme C^1 et par ε en norme C^0 .

Ainsi, il existe une application définie localement :

$$\mathcal{M} \longrightarrow [\bar{\partial}_\nu|_U^{-1}(0)]^k$$

Notons à présent \mathcal{T}_ν^r l'espace (fibré sur U) des jets de sections de $N|_U$ annulant $\bar{\partial}_\nu$ et τ l'application habituelle d'évaluation des jets :

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} \bar{\partial}_\nu|_U^{-1}(0) \times U & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{T}_\nu^r \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

Les graphes de deux sections α et β de $N|_U$ ont un contact d'ordre r si et seulement s'il existe un point $z \in U$ en lequel α et β ont même jet d'ordre r .

Désignons par $(\mathcal{T}_\nu^r)^k$ le produit fibre à fibre au-dessus U de k copies de \mathcal{T}_ν^r . Soit Δ la diagonale de $(\mathcal{T}_\nu^r)^k$. Soit \widetilde{V}_s le sous-espace de \mathcal{T}_ν^r formé des points $(z, \tau^0, \tau^1, \dots, \tau^r)$ tels que $(z, \tau^0) \in V_s$. Soit enfin \mathcal{S}_\times l'intersection de Δ et de $(\widetilde{V}_s)^k$.

Rappelons que \mathcal{T}_ν^r est isomorphe à $U \times \mathbb{C}^{r+1}$, $(\mathcal{T}_\nu^r)^k$ à $U \times (\mathbb{C}^{r+1})^k$ et donc que

$$(15) \quad \text{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_\times = 2(k-1)(r+1) + \text{codim}_{\mathbb{R}} V_s.$$

Soit alors $f_\nu = \tau \times \dots \times \tau$ l'application

$$(16) \quad \begin{array}{ccc} (\bar{\partial}_\nu|_U^{-1}(0))^k \times U & \xrightarrow{f_\nu} & (\mathcal{T}_\nu^r)^k \\ (M_1, \dots, M_k, z) & \longmapsto & (\tau_z^n M_1, \dots, \tau_z^n M_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

On a :

$$(17) \quad \mathcal{M}_\times = f_\nu^{-1}(\mathcal{S}_\times)$$

Revenons maintenant aux courbes paramétrées. En composant (12) par la projection canonique de $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$, on obtient l'application ν suivante

$$(18) \quad \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \bar{\partial}_\nu|_U^{-1}(0).$$

Concrètement, elle consiste à remplacer chaque courbe paramétrée $(\tilde{u}, \tilde{j}) \in \widetilde{\mathcal{M}}$ voisine de (u, j) par un reparamétrage privilégié, obtenu en regardant cette nouvelle courbe comme un graphe au dessus de la courbe initiale. En d'autres termes,

dans une carte locale identifiant $N|_U$ à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le paramétrage privilégié d'une courbe (u, j) , avec $u(z) = (x(z), y(z))$, est donné par $u_\nu(z) = (z, y(x^{-1}(z)))$ et $\tilde{j}_\nu = \tilde{u}_\nu^* J$.

Par composition avec f_ν , on en déduit une application f définie au voisinage de (u, j, z_1) dans $\tilde{\mathcal{M}} \times \Sigma$:

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{M}} \times \Sigma & \xrightarrow{f} & (\mathcal{T}_\nu^r)^k \\ \pi \downarrow & & \cup \\ & & \mathcal{S}_\times \\ & & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

telle que

$$(20) \quad \tilde{\mathcal{M}}_\times = \pi(f^{-1}(\mathcal{S}_\times)).$$

3.1.2. *Transversalité pour les singularités immergées.* — La linéarisation par rapport à u (j fixé) de l'application $\tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\nu} \bar{\partial}_\nu^{-1}(0)$ se factorise naturellement par la projection

$$(21) \quad H_D^0(E) \longrightarrow H_{D^N}^0(N) \longrightarrow \ker(D^N|_U).$$

En notant (z_1, \dots, z_k) les antécédents de c par u , la linéarisation de f par rapport à u peut être mise sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} H_D^0(E) & \xrightarrow{\pi} & H_{D^N}^0(N) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{T}_{D^N, z_1}^r \times \dots \times \mathcal{T}_{D^N, z_k}^r & \xrightarrow{\phi} & (\mathcal{T}_{D^N, z_1}^r)^k \\ v & \longmapsto & n = \pi(v) & \longmapsto & \tau_{z_1}^r(n), \dots, \tau_{z_k}^r(n) & & \end{array}$$

où τ est l'application d'évaluation des jets étudiée dans la section 2.2, et où ϕ est la bijection induite par les changements de coordonnées associés à l'identification de V à l'espace total de N respectivement au voisinage de z_i et de z_1 .

En écrivant la suite exacte longue (10) pour le fibré N et le diviseur

$$P = - \sum_i (r_i + 1)[z_i],$$

et en identifiant (comme \mathbb{R} -espaces vectoriels) \mathcal{T}_{D^N, z_1}^r à \mathbb{C}^{r+1} , on obtient la suite exacte (avec $\tilde{N} = N \otimes P$) :

$$(22) \quad 0 \rightarrow H_{D^N}^0(\tilde{N}) \rightarrow H_{D^N}^0(N) \xrightarrow{L_u f_\nu} (\mathbb{C}^{r+1})^k \rightarrow H_{D^N}^1(\tilde{N}) \rightarrow H_{D^N}^1(N) \rightarrow 0.$$

De plus, V est de dimension complexe 2; donc N et \tilde{N} sont des fibrés de rang complexe 1. On peut donc leur appliquer la généralité automatique : si $c_1(\tilde{N}) \geq 2g - 1$, c'est-à-dire si $c_1 \cdot C \geq 1 + \mu + k(r + 1)$, alors $H_{\tilde{D}^N}^1(\tilde{N}) = 0$ et $L_u f$ est surjective sur la patrie verticale de $T_{f(u,j,z_1)}(T_\nu^r)^k$.

Considérons maintenant la linéarisation $L_z f$ de f par rapport à z . Il s'agit simplement de l'identité sur $T_{z_1} \Sigma$. On en déduit que $L_z f$ est surjective sur la patrie horizontale de $T_{f(u,j,z_1)}(T_\nu^r)^k$.

Ainsi, dès que $c_1 \cdot C \geq 1 + \mu + k(r + 1)$, f est transverse à \mathcal{S}_\times .

L'espace $f^{-1}(\mathcal{S}_\times)$ est alors une sous-variété de $\tilde{\mathcal{M}} \times \Sigma$. Il reste à étudier les positions relatives de l'espace tangent à cette variété et des fibres de la projection $\tilde{\mathcal{M}} \times \Sigma \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$. Soit $\dot{z} \in T_z \Sigma$ tel que $Lf(0, \dot{z}) \in T\mathcal{S}_\times$. Le terme d'ordre r dans $Lf(0, \dot{z})$ fait alors intervenir des différences des dérivées d'ordre $r + 1$ des sections représentant les différentes branches locales. Comme ces branches sont supposées avoir des contacts d'ordre exactement r , ces dérivées sont distinctes et on a donc nécessairement $\dot{z} = 0$.

On en déduit que $\pi(f^{-1}(\mathcal{S}_\times))$ est une sous-variété de $\tilde{\mathcal{M}}$ de codimension

$$\text{codim}_{\mathbb{R}} \tilde{\mathcal{M}}_\times = \text{codim}_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_\times - 2 = 2((k - 1)(r + 1) - 1) + \text{codim}_{\mathbb{R}} V_s.$$

REMARQUE. — Le point important pour la suite est qu'on a pu obtenir la transversalité de f et de \mathcal{S}_\times à l'aide de la seule étude de l'application d'évaluation des jets sur le fibré normal en z_1, \dots, z_k , c'est-à-dire de la suite (22). Si on écrit le diagramme (11) associé à l'application d'évaluation des jets d'ordre r sur E en z_1, \dots, z_r , la suite (22) n'est autre que la troisième ligne de ce diagramme.

3.2. Singularités non immergées.

L'objet de cette section est d'effectuer le même travail que ci-dessus, mais pour les singularités non immergées.

Pour tout germe d'application J -holomorphe $u : \mathbb{C} \rightarrow V$, il existe [7] des coordonnées $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dans lesquelles on a

$$\Phi \circ u \circ \phi = \begin{pmatrix} z^p \\ z^q \end{pmatrix} + O(z^{q+1})$$

avec $p < q$ et p ne divise pas q .

Les exposants p et q ne dépendent pas du choix des coordonnées Φ et ϕ . Aussi peut-on s'intéresser aux perturbations u' de u pour lesquels il existe encore des coordonnées Φ' et ϕ' dans lesquelles u' peut être mis sous cette forme. L'objet de cette partie est donc de caractériser de telles perturbations u' à l'aide de leur

jet à l'origine, puis d'exploiter cette caractérisation pour étudier l'espace associé à une contrainte concernant un point non immergé.

3.2.1. Caractérisation locale. — Pour savoir si une perturbation u' peut être mise sous la forme désirée, il suffit, dans des coordonnées convenables de tester la nullité de certaines composantes de son jet en 0. La difficulté est qu'en général, des coordonnées convenables pour u ne le sont pas pour u' . L'objet de la proposition qui suit est donc de montrer qu'on peut construire des coordonnées adaptées à u' uniquement à partir de son jet à l'origine.

PROPOSITION 7. — Soient $(p, q) \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, et $q = kp + r$ avec $1 \leq r \leq p - 1$. Notons $\tilde{q} = q - 1$ si $r = 1$, et $\tilde{q} = q$ sinon. Il existe $N \in \mathbb{N}$, il existe des applications (lisses)

$$\Theta_q : \mathcal{T}_J^{\tilde{q}-1} \longrightarrow \mathbb{C}^N, \quad \Phi_q : \mathcal{T}_J^{\tilde{q}} \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}^2), \quad \phi_q : \mathcal{T}_J^q \longrightarrow \text{Aut}_0(\mathbb{C}),$$

telles que pour tout germe J -holomorphe $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ satisfaisant $D^{(p)}u(0) \neq 0$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\Theta_q(\tau_0^{\tilde{q}-1}(u)) = 0$;
- (ii) $\exists \Phi \in \text{Diff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)$, $\exists \phi \in \text{Diff}_0(D)$, $\Phi \circ u \circ \phi = (z^p, az^q) + O(z^{q+1})$;
- (ii') $\Phi_q(\tau_0^{\tilde{q}}(u)) \circ u \circ \phi_q(\tau_0^q(u)) = (z^p, az^q) + O(z^{q+1})$.

De plus Θ_q est une submersion. En particulier $\Theta_q^{-1}(0)$ est une sous-variété $\mathcal{S}_{p,q}$ de $\mathcal{T}_J^{\tilde{q}-1}$ de codimension (réelle) $2((p-1) + (\tilde{q}-k))$.

(Ici $\text{Aut}_0(D)$ et $\text{Diff}_0(D)$ désignent les automorphismes et les difféomorphismes de D qui envoient 0 sur 0).

La preuve de cette proposition est assez technique et reportée au § 3.2.2.

Pour exploiter au mieux cette caractérisation des germes « à cusp », il nous faut connaître la position de la sous-variété $\mathcal{S}_{p,q}$ que nous venons de construire, en particulier la position de son espace tangent par rapport aux jets « horizontaux ». La terminologie « horizontale » et « verticale » se réfère ici au système de coordonnées sur \mathbb{C}^2 : la première coordonnée est dite horizontale, la seconde verticale. Cette décomposition s'étend naturellement à l'espace des jets, à cette difficulté près qu'une composante, horizontale ou verticale, d'un jet (j, J) -holomorphe n'a pas de raison d'être encore (j, J) -holomorphe.

L'objet de la proposition qui suit est de montrer que, bien que les équations définissant la variété $\mathcal{S}_{p,q}$ ne soient pas très simple, il reste facile de trouver une direction transverse : l'équation Θ_q porte moralement sur les composantes holomorphes d'ordre d avec $0 < d < p$ pour la partie horizontale, et d'ordre d avec $0 < d < \tilde{q}$, $d \notin p\mathbb{Z}$ pour la partie verticale. En particulier un espace dans

lequel peuvent varier indépendamment toutes ces composantes est transverse à $\mathcal{S}_{p,q}$.

Plus précisément, soit $u = (z^p, z^q) + o(z^q)$ un germe d'application J -holomorphe dans \mathbb{C}^2 , avec $q = kp + r$, $k \geq 1$, $1 \leq r \leq p - 1$. Notons $\tau = \tau_0^{\tilde{q}-1}$.

PROPOSITION 8. — Avec les notations ci-dessus, l'espace $T_{\tau(u)}\mathcal{S}_{p,q}$ contient l'espace des jets holomorphes de composante horizontale nulle jusqu'à l'ordre $p-1$ et de composante verticale nulle.

Démonstration. — En effet, pour tout germe d'automorphisme $\psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, on a $\tau(u \circ \psi) \in \mathcal{S}_{p,q}$, donc $\Theta_q(\tau(u \circ \psi)) = 0$. Or, lorsque ψ varie, le jet en 0 d'ordre $\tilde{q}-1$ de $(\psi(z))^p$ décrit tous les jets holomorphes nuls jusqu'à l'ordre $p-1$, tandis que le jet de $(\psi(z))^q$ est toujours nul. \square

Cette proposition sera utile dans l'étude de la transversalité, pour alléger les hypothèses sur le « degré horizontal » de la courbe.

La section qui suit est consacrée à la preuve de la proposition 7. Elle n'apporte pas d'idées pour la suite et est un peu longue. En première lecture, on pourra donc passer directement à la section 3.2.3.

3.2.2. Preuve de la proposition 7. — La preuve repose essentiellement sur la quasi-linéarité de l'équation qui caractérise les application J -holomorphes : on utilise le jet de u pour construire des changements de coordonnées successifs qui annulent les coefficients indésirables (non holomorphes) de ce jet.

On exploite une écriture un peu différente de l'équation (3) caractérisant les applications J -holomorphes : en posant

$$Q = (i + J)^{-1}(i - J)$$

et en regroupant les parties linéaires et anti-linéaires de du dans (3), on obtient qu'un germe u est J -holomorphe si et seulement si il vérifie

$$(23) \quad \bar{\partial}u + Q(u)\partial u = 0.$$

En tout point $x \in \mathbb{C}^2$, la matrice $Q(x)$ est anti-linéaire et on a $Q(0) = 0$.

On procède par récurrence sur k . Pour chaque k , on commence par le cas $r = 1$ qui est un peu particulier (c'est le plus délicat). On construit l'application Θ de façon à vérifier (ii) \Rightarrow (i). On construit alors les changements de coordonnées « explicites » Φ_q et ϕ_q pour obtenir (i) \Rightarrow (ii') ((ii') \Rightarrow (ii) est évident). Les cas $2 \leq r \leq p - 1$ sont alors traités ensemble, avec des arguments beaucoup plus simples, puisque les coordonnées construites à l'étape précédente sont déjà très bonnes.

Le cas $k = 1$. — On commence par supposer $r = 1$, c'est-à-dire $q = p + 1$. Il suffit alors de prendre $\Theta_{p+1}(\tau) = (\tau^1, \dots, \tau^{p-1})$ pour $\tau = (\tau^0, \dots, \tau^{p-1})$ dans $\mathcal{T}_{j,0}^{p-1}$: on a bien alors (ii) \Rightarrow (i).

De plus, 0 est une valeur régulière de Θ_{p+1} , et $\Theta_{p+1}^{-1}(0)$ est de codimension (réelle) $2(2(p-1)) = 2((p-1) + (\tilde{q} - k))$.

Le changement de coordonnées Φ_{p+1} s'obtient en composant la translation de vecteur $-u(0)$, et une transformation linéaire ne dépendant que du jet d'ordre p de u en 0 redressant convenablement l'espace $T_{u(0)}u(\mathbb{C})$ sur l'espace horizontal $y = 0$, et $J(0)$ sur i . Dans ces coordonnées, un germe u tel que $\Theta_{p+1}(\tau_0^{p-1}(u)) = 0$ prend la forme suivante (cf. [12]) :

$$\Phi_{p+1} \circ u = \begin{pmatrix} z^p & + & a_1 z^{p+1} & + \dots & + & a_{p-1} z^{2p-1} \\ & & b_1 z^{p+1} & + \dots & + & b_{p-1} z^{2p-1} \end{pmatrix} + O(z^{2p}).$$

En effet, on a $u(z) = (z^p, 0) + o(z^p)$. La relation $\bar{\partial}u = -Q(u)\partial u$ montre alors que $\bar{\partial}u = O(z^{2p})$, et donc u ne contient pas de terme non holomorphe d'ordre $\leq 2p$.

Le choix d'une détermination continue de $\sqrt[p]{1 + a_1 z}$ permet alors de poser $\phi_{p+1}^{-1}(z) = z \sqrt[p]{1 + a_1 z}$ pour obtenir l'automorphisme cherché : (i) \Rightarrow (ii').

De même, pour $2 \leq r \leq p - 1$, en posant

$$\varphi^{-1}(z) = z \sqrt[p]{1 + a_1 z + \dots + a_{r-1} z^{r-1}},$$

on définit un automorphisme de \mathbb{C} qui ne dépend que du jet d'ordre $q - 1$ de u , tel que $\Phi_{p+1} \circ u \circ \varphi$ s'écrive maintenant

$$\Phi_{p+1} \circ u \circ \varphi = \begin{pmatrix} z^p + & 0 & + \dots + a'_r z^{p+r} & + \dots + & a'_{p-1} z^{2p-1} \\ & b'_1 z^{p+1} & + \dots + b'_r z^{p+r} & + \dots + & b'_{p-1} z^{2p-1} \end{pmatrix} + O(z^{2p}).$$

Posons $\theta_{p+r}(\tau^{p+r-1}u) = (b'_1, \dots, b'_{r-1})$, et

$$\Theta_{p+r} = \Theta_{p+1} \oplus \theta_{p+r}.$$

Comme le jet de $u \circ \varphi$ ne dépend que du jet de u , Θ_{p+r} est bien une application de \mathcal{T}_J^{p+r-1} dans \mathbb{C}^{r-1} , et on a bien (ii) \Rightarrow (i).

Soit maintenant u un germe tel que $\Theta_{p+r}(\tau^{p+r-1}(u)) = 0$; il suffit de choisir $\Phi_{p+r} = \Phi_{p+1}$ et $\phi_{p+r}^{-1}(z) = z \sqrt[p]{1 + a_1 z + \dots + a_r z^r}$ pour mettre u sous la forme voulue. On a donc (i) \Rightarrow (ii').

Réurrence. — Supposons la famille $\{\Theta_{k'p+r}, \Phi_{k'p+r}, \phi_{k'p+r}\}_{\substack{1 \leq k' \leq k-1 \\ 1 \leq r \leq p-1}}$ construite.

Commençons par le cas $r = 1$. Soit u un germe de courbe tel qu'il existe $\Phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2)$ et $\phi \in \text{Diff}_0(\mathbb{C})$ tels que (avec $a \in \mathbb{C}$) :

$$(24) \quad \Phi \circ u \circ \phi = \begin{pmatrix} z^p \\ az^{kp+1} \end{pmatrix} + o(z^{kp+1}).$$

Alors, $\Theta_{kp-1}(\tau_0^{kp-2}(u)) = 0$ et, en nous plaçant dans les coordonnées fournies par $\Phi_{kp-1}(\tau_0^{kp-1}(u))$ et $\phi_{kp-1}(\tau_0^{kp-1}(u))$, on a $u = (z^p, a'z^{kp-1}) + o(z^{kp-1})$. Il suffit alors de poser

$$\theta_{kp+1}(\tau_0^{kp-1}(u)) = a' \quad \text{et} \quad \Theta_{kp+1} = \Theta_{kp-1} \oplus \theta_{kp+1}.$$

On vérifie aisément que $\theta_{kp+1}(\tau_0^{kp-1}(u))$ ne dépend effectivement que du jet d'ordre $kp - 1$ de u en 0 et que (ii) \Rightarrow (i).

L'expression obtenue pour Θ_{kp+1} montre de plus que 0 est valeur régulière et que

$$\text{codim}_{\mathbb{R}} \Theta_{kp+1}^{-1}(0) = \text{codim}_{\mathbb{R}} \Theta_{kp-1}^{-1}(0) + 2.$$

Considérons à présent un germe u tel que $\Theta_{kp+1}(\tau^{kp-1}(u)) = 0$. Dans les coordonnées fournies par Φ_{kp-1} et ϕ_{kp-1} , on a alors

$$(25) \quad u = \begin{pmatrix} z^p + a_0z^{kp} + a_1z^{kp-1}\bar{z} + \dots + a_{kp}\bar{z}^{kp} \\ 0 + b_0z^{kp} + b_1z^{kp-1}\bar{z} + \dots + b_{kp}\bar{z}^{kp} \end{pmatrix} + o(z^{kp}).$$

Comme $Q(0) = 0$, l'équation (25) montre qu'au moins jusqu'à l'ordre $kp - 1$, le développement de $Q(u)$ ne contient que des puissances de z ou de \bar{z} multiples de p (*i.e.* des termes de la forme $z^{ip}\bar{z}^{jp}$). La relation $\bar{\partial}u = -Q(u)\partial u$ montre alors que les termes de degré $kp - 1$ du développement de $\bar{\partial}u$ sont de la forme $z^{ip}\bar{z}^{jp-1}$. On en déduit que la partie d'ordre kp du développement de u est en fait un polynôme en z^p et \bar{z}^p . Le changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi_{kp+1}} \begin{pmatrix} x - \sum a_{ip}x^{k-i}\bar{x}^i \\ y - \sum b_{ip}x^{k-i}\bar{x}^i \end{pmatrix},$$

qui ne dépend que du jet d'ordre kp de u , permet alors de se ramener au cas où $a_i = b_i = 0$ pour tout i . Dans ces nouvelles coordonnées :

$$(26) \quad u = \begin{pmatrix} z^p + a_0z^{kp+1} + a_1z^{kp}\bar{z} + \dots + a_{kp+1}\bar{z}^{kp+1} \\ b_0z^{kp+1} + b_1z^{kp}\bar{z} + \dots + b_{kp+1}\bar{z}^{kp+1} \end{pmatrix} + o(z^{kp+1}).$$

Comme $Q(0) = 0$, $Q(u)\partial u$ ne contient pas de terme de degré total kp , on en déduit que dans (26), il n'y a en fait que des termes holomorphes. Il ne reste plus qu'à poser $\phi_{kp+1}^{-1}(\tau(u)) = z\sqrt[p]{1 + a_0z^{(k-1)p}}$ pour obtenir (i) \Rightarrow (ii').

Traisons maintenant les cas $2 \leq r \leq p-1$. En fait, les coordonnées construites à l'étape précédente sont déjà très bonnes : toujours en exploitant la relation $\bar{\partial}u = -Q(u)\partial u$, on montre que le développement de u dans ces coordonnées ne contient que des termes holomorphes jusqu'à l'ordre $kp + (p - 1)$:

$$\Phi_{kp+1} \circ u \circ \phi_{kp+1} = \begin{pmatrix} z^p + a_1 z^{kp+1} + \dots + a_{p-1} z^{kp+p-1} \\ b_1 z^{kp+1} + \dots + b_{p-1} z^{kp+p-1} \end{pmatrix} + O(z^{(k+1)p}).$$

La construction est maintenant exactement identique à celle effectuée dans le cas $k = 1, 2 \leq r \leq p - 1$.

Ceci achève la preuve de la proposition 7.

3.2.3. Transversalité pour les singularités non immergées. — Soit $(u_0, j_0) \in \widetilde{\mathcal{M}}$ un paramétrage d'une J -courbe ayant en un point $c = u_0(z_0)$ une singularité non immergée à laquelle sont associés les entiers p et q , et V_s une sous-variété de V passant par c . On note $\widetilde{\mathcal{M}}_{\blacktriangleleft}$ et $\mathcal{M}_{\blacktriangleleft}$ les espace associés à cette contrainte.

Comme pour les singularités immergées, on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}} \times \Sigma & \xrightarrow{f} & \mathcal{T}_J^{\tilde{q}-1} \\ \pi \downarrow & & \cup \\ & & \mathcal{S}_{\blacktriangleleft} \\ \widetilde{\mathcal{M}} & & \end{array}$$

où f coïncide avec l'application d'évaluation des jets à l'ordre $\tilde{q} - 1$, notée τ dans la partie 2.

Soit \widetilde{V}_s l'espace des jets $(z, \tau^0, \dots, \tau^{\tilde{q}-1}) \in \mathcal{T}_J^{\tilde{q}-1}$ tels que $\tau^0 \in V_s$, et $\mathcal{S}_{\blacktriangleleft} = \mathcal{S}_{p,q} \cap \widetilde{V}_s$, qui est une sous-variété de $\mathcal{T}_J^{\tilde{q}-1}$. L'espace des courbes paramétrées satisfaisant la contrainte associée à c est caractérisé localement par :

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\blacktriangleleft} = \pi(f^{-1}(\mathcal{S}_{\blacktriangleleft})).$$

La linéarisation $L_u f$ de f par rapport à u en $((u_0, j_0), z_0)$ a été étudiée dans la section 2.2. Rappelons les notations : $A = \sum_i \mu_i [z_i]$ désigne le diviseur associé aux zéros de du (en chacun de ces points u se met sous la forme $(z^{p_i}, z^{q_i}) + o(z^{q_i})$, on a alors $\mu_i = p_i - 1$), $P = -\tilde{q}[z_0]$, $T = (T\Sigma \otimes A)$, $\tilde{T} = T \otimes P$, $\tilde{E} = E \otimes P$, et enfin $\tilde{N} = N \otimes P$.

Dans notre situation, le diagramme (11) prend la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \tilde{\delta} \downarrow & & \delta \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H^0(\tilde{T}) & \longrightarrow & H^0(T) & \xrightarrow{L_u f_h} & \mathbb{C}^{\tilde{q}} & \longrightarrow & H^1(\tilde{T}) & \longrightarrow & H^1(T) & \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \\
 (27) & 0 & \rightarrow & H^0(\tilde{E}) & \longrightarrow & H^0(E) & \xrightarrow{L_u f} & \mathbb{C}^{2\tilde{q}} & \longrightarrow & H^1(\tilde{E}) & \longrightarrow & H^1(E) & \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H^0(\tilde{N}) & \longrightarrow & H^0(N) & \xrightarrow{L_u f_v} & \mathbb{C}^{\tilde{q}} & \longrightarrow & H^1(\tilde{N}) & \longrightarrow & H^1(N) & \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Si $c_1(\tilde{N}) \geq 2g - 1$, c'est-à-dire $c_1 \cdot C \geq 1 + \mu + \tilde{q}$, on a $H^1_{\tilde{D}N}(\tilde{N}) = 0$ et la flèche $L_u f_v$ est surjective.

De même, si $c_1(T) \geq 2g - 1$, alors $H^1(T) = 0$, la flèche δ est donc nulle et on en déduit que $L_u f = L_u f_h \oplus L_u f_v$.

Si $c_1(T) \geq 2g - 1 + p$, alors l'application sous-jacente à $L_u f_h$ qui consiste à n'évaluer les jets qu'au rang $p - 1$ est surjective.

Grâce à la proposition 8, les conditions $c_1 \cdot C \geq 1 + \mu + \tilde{q}$ et $c_1(T) \geq 2g - 1 + p$ suffisent pour que f soit transverse à $\mathcal{S}_\blacktriangleleft$. En effet, dans le diagramme (27), la décomposition de l'espace des jets $T_{\tau(u_0)}\mathcal{T}_{J,z_0}^{\tilde{q}-1} \simeq \mathbb{C}^{2\tilde{q}}$ donnée par la colonne du milieu coïncide avec la décomposition évoquée plus haut en composantes verticale et horizontale.

Il reste alors à étudier la position relative de $f^{-1}(\mathcal{S}_\blacktriangleleft)$ et des fibres de la projection $\pi : \tilde{\mathcal{M}} \times \Sigma \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$. La composante horizontale de $Lf(0, \dot{z})$ fait apparaître des dérivées d'ordre p de u_0 appliquées à \dot{z} : elle s'annule si et seulement si $\dot{z} = 0$.

On en déduit que si $c_1 \cdot C \geq 1 + \mu + \tilde{q}$ et $4g - 3 \leq \mu - p$, $\tilde{\mathcal{M}}_\blacktriangleleft$ est une sous-variété de $\tilde{\mathcal{M}}$ de codimension réelle $2((p - 1) + (\tilde{q} - k) - 1) + \text{codim}_{\mathbb{R}} V_s$.

3.3. Contraintes multiples.

On se donne maintenant une courbe $C \in \mathcal{M}$ et un jeu de contraintes $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_i\}$ sur C .

Les sections 3.1 et 3.2 nous ont permis de caractériser chaque contrainte \mathfrak{S}_i sur les courbes paramétrées à l'aide d'une application f_i de $\tilde{\mathcal{M}} \times \Sigma^{m_i}$ dans un espace \mathcal{T}_i et d'une variété $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{T}_i$. La somme directe de ces applications permet alors de caractériser l'espace $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathfrak{S}}$ des paramétrages satisfaisant toutes

les contraintes simultanément :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}} \times (\Sigma)^m & \xrightarrow{f=(f_1, \dots, f_n)} & \mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_n \\ \pi \downarrow & & \cup \quad \cup \quad \cup \\ \widetilde{\mathcal{M}} & & \mathcal{S}_{\mathfrak{S}} = \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \end{array}$$

On a $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathfrak{S}} = \pi(f^{-1}(\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}))$.

On étudie la transversalité de f et $\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}$ comme on l'a fait pour les contraintes élémentaires : on utilise le diagramme (11) associé au diviseur $P = \sum P_i$. Pour que Lf soit transverse à $\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}$, il suffit que les applications $L\tau_h$ et $L\tau_v$ soient « assez surjectives » (τ_v doit être surjective, et τ_h doit être surjective sur les jets d'ordre $p_i - 1$ en chaque point z_i non immergé) : les grandeurs $d_h(\mathfrak{S})$ et $d_v(\mathfrak{S})$ ont précisément été définies pour que les inégalités

$$4g - 3 \leq \mu - d_h(\mathfrak{S}) \quad \text{et} \quad c_1 \cdot C \geq 1 + \mu + d_v(\mathfrak{S})$$

permettent d'appliquer la généralité automatique aux fibrés $T\Sigma \otimes A \otimes P$ et $N \otimes P$, et donc de contrôler l'image de Lf .

Ainsi, si les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites, $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathfrak{S}}$ est une sous-variété de $\widetilde{\mathcal{M}}$ de la codimension annoncée.

Pour passer des courbes paramétrées aux courbes non paramétrées, il reste à faire agir le mapping class group de Σ . Comme $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathfrak{S}}$ est stable sous cette action, le quotient $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ est une sous-variété de \mathcal{M} de la codimension attendue.

Ceci achève la preuve du théorème 2.

4. Le cas réduit

4.1. Contraintes admissibles.

Tout le travail précédent supposait C irréductible, c'est-à-dire Σ connexe et u primitif. Le cas réduit, c'est-à-dire lorsque C est une union finie de courbes irréductibles deux à deux distinctes, est sensiblement plus complexe.

Dans les constructions précédentes, la transversalité de f et de $\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}$ peut s'interpréter comme la possibilité de détruire complètement les contraintes en perturbant C . Pour chaque contrainte on compte donc le nombre de degrés de libertés sur les perturbations de C dont on a besoin pour la détruire. Lorsqu'une contrainte porte sur plusieurs composantes, les perturbations permettant de la détruire peuvent venir de l'une ou de l'autre composante, ou même d'une combinaison des deux. La connaissance globale de $c_1 \cdot C$, ou même de la valeur de c_1 évaluée sur chaque composante, ne suffit plus à déterminer efficacement si on peut ou non détruire toutes les contraintes : il faut en plus choisir une façon de répartir le poids de chaque contrainte sur les différentes composantes.

À titre d'exemple, considérons un cycle $C = C_1 + C_2$ formé de deux courbes irréductibles. Demander que C ait un point triple ordinaire dont deux branches sont portées par C_1 et une par C_2 peut s'interpréter comme une condition sur C_1 seulement, à savoir avoir un point double sur la courbe C_2 , ou comme une condition sur C_2 seulement, à savoir passer par le point double de C_1 (un tel point est en effet stable par perturbation).

Pour obtenir une condition effective garantissant la transversalité, on a recours à la notion de contraintes induites. Comme dans l'exemple ci-dessus, on peut toujours décomposer une contrainte portant sur une courbe réduite, en contraintes portant sur chaque composante : au besoin, certaines composantes jouent le rôle des variétés notées V_s jusqu'ici dans les jeux de contraintes imposés aux autres composantes. À l'image de l'exemple ci-dessus, la façon de décomposer une contrainte en contraintes induites n'est en général pas unique.

REMARQUE. — On suppose en fait ici que l'ensemble des types de contraintes considérés est « stable par décomposition et combinaison ». Par souci de clarté, nous nous sommes jusqu'ici limités aux contraintes les plus faciles à expliciter pour les points immergés. On peut bien sûr se limiter au cas des points multiples ordinaires (ce qui suffit pour l'étude des arrangements de droites ci-dessus), ou remarquer que le travail précédent s'adapte facilement pour considérer des contraintes beaucoup plus générales, et en particulier pour permettre d'imposer des contacts d'ordre > 0 avec la sous-variété V_s .

On pose alors la définition algorithmique suivante.

DÉFINITION 1. — *Un jeu de contraintes \mathfrak{S} sur une courbe C est dit admissible si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

- (i) *C est irréductible et les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites ;*
- (ii) *il existe une décomposition $C = C' + C''$ de C et une décomposition de \mathfrak{S} en contraintes admissibles \mathfrak{S}' sur C' et \mathfrak{S}'' sur C'' .*

En d'autres termes, on demande qu'il existe une façon de répartir les contraintes de \mathfrak{S} sur chaque composante irréductible, de façon à satisfaire les conditions de transversalité données dans le théorème 2. Il en résulte :

PROPOSITION 9. — *Soit \mathfrak{S} un jeu de contraintes admissible sur une courbe réduite $C = \sum_{\alpha} C_{\alpha}$. Alors, au voisinage de C dans $\mathcal{M}_C = \prod_{\alpha} \mathcal{M}_{C_{\alpha}}$, l'espace des courbes satisfaisant à ces contraintes est une sous-variété dont la codimension se calcule en fonction de \mathfrak{S} comme dans le cas irréductible.*

4.2. Arrangements de droites de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Cette section propose une application de la proposition 9 à l'étude des arrangements de J -droites de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

On note \mathcal{J}_ω l'espace des structures presque complexes sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ calibrées par la forme de Kähler canonique ω de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Pour $J \in \mathcal{J}_\omega$, une J -droite est une courbe J -holomorphe de degré 1. La formule d'adjonction montre qu'une telle courbe est nécessairement plongée et rationnelle. Un arrangement de J -droites est une collection finie $C = \sum_{i=1}^d \Delta_i$ de J -droites.

M. Gromov a montré [3] que toute J -droite est isotope, parmi les droites presque complexes, à une droite standard, et plus précisément, que par deux points distincts, il passe une unique J -droite. Le schéma de démonstration utilisé est le suivant. On considère l'espace \mathcal{U}_1 des applications de classe $C^{k+1,\alpha}$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ vers $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, de degré 1. Dans l'espace produit $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{J}_\omega$, on considère alors l'espace

$$\tilde{P} = \{(u, J) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{J}_\omega ; u \text{ est } J\text{-holomorphe}\}$$

et

$$P = \tilde{P} / \text{Aut}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1).$$

Avec les notations précédentes, on a $\tilde{P} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_\omega} \tilde{\mathcal{M}}(J) \times \{J\}$ (en identifiant (u, i) à (u)) et $P = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_\omega} \mathcal{M}(J) \times \{J\}$.

On montre les trois propriétés suivante :

- P est une variété de Banach ;
- la projection $\pi : P \rightarrow \mathcal{J}_\omega$ est une submersion locale ;
- la projection $\pi : P \rightarrow \mathcal{J}_\omega$ est propre.

La propriété de submersion locale de la projection tient à la dimension 4. Le conoyau de la linéarisation en $(u, J) \in \tilde{P}$ de la projection s'identifie naturellement à $H_D^1(E)$. La suite exacte longue de cohomologie associée à (5) permet alors de montrer que $H^1(E) = 0$; en effet, comme les J -droites sont plongées, on a $\mu = 0$, et la généralité automatique donne le résultat.

La propriété de la projection repose sur le théorème de compacité de M. Gromov, puisque des courbes de degré 1 ne peuvent pas faire de bulle (le degré 1 est indécomposable en classes ω -positives).

Cela permet de construire une homotopie entre une J_0 -droite et une droite standard. De plus, toute droite presque complexe étant plongée, notre homotopie est une isotopie.

On se propose maintenant de généraliser ce résultat aux cas des arrangements de droites, en démontrant le théorème 3.

Rappelons qu'un arrangement de d J -droites est simplement un d -uplet de J -droites, qu'un arrangement réduit est un arrangement dans lequel toutes les droites sont distinctes et qu'un point spécial d'un arrangement est un point par lequel passent au moins trois droites distinctes.

REMARQUE. — Pour construire une isotopie entre deux arrangements, on peut bien sûr se contenter de travailler avec les arrangements réduits sous-jacent. Les

arrangements que nous essaierons de déformer seront donc toujours supposés réduits. Cependant, les arrangements non réduits apparaissent naturellement comme limites d'arrangements réduits. L'espace total dans lequel il nous faut travailler est donc celui de tous les arrangements (P^d).

L'idée de la preuve est que, si on peut leur appliquer la proposition 9, les arrangements «dégénérés» vivent dans un espace de codimension réelle 2 dans l'espace des arrangements ayant la même configuration que l'arrangement initial. Le complémentaire est donc connexe.

REMARQUE. — Le théorème 2 et la proposition 9 n'ont été donnés que pour une structure presque complexe J fixée. Dans ces énoncés, le terme de «sous-variété» signifie cependant «niveau d'une submersion» : l'espace $\mathcal{M}_{\mathfrak{S}}$ associé à un jeu de contraintes \mathfrak{S} se met localement sous la forme $f^{-1}(0)$ où f est une submersion définie sur l'espace de tous les paramètres. En particulier, f dépend différentiablement de la structure presque complexe J , et dans la situation qui nous intéresse ici, $f^{-1}(0)$ définit en fait (avec des notations analogues à celles adoptées ci-dessus) une sous-variété $P_{\mathfrak{S}}$ de P . De plus, pour les arrangements de droites, comme dans le cas sans contrainte, la projection $\pi : P_{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathcal{J}$ est une submersion locale.

4.2.1. *Contraintes admissibles pour les arrangements de droites.* — Rappelons encore qu'une J -droite est toujours plongée, que deux J -droites distinctes se coupent toujours transversalement en un point, et que l'espace des J -droites (non paramétrées) est une variété compacte de dimension réelle 4.

Les seuls jeux de contraintes sur une J -droite satisfaisant les hypothèses du théorème 2 consistent à imposer à la droite de passer par un ou deux points, la codimension associée est respectivement 2 ou 4, et les espaces associés à ces contraintes sont globalement des variétés, respectivement difféomorphes à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et à un singleton [3].

Le fait de travailler avec des arrangements de droites simplifie donc considérablement la notion de contrainte. Une contrainte sur un arrangement de droites $C = \sum \Delta_i$ admet en effet une description combinatoire : c'est simplement la donnée d'un ensemble d'indices $\{i_1, \dots, i_k\}$ ($k \geq 3$) correspondant aux droites qui doivent être concourantes. Il en résulte de plus que l'espace $P_{\mathfrak{S}}$ associé à un jeu de contraintes \mathfrak{S} est maintenant défini globalement : lorsque la proposition 9 s'applique, l'espace $P_{\mathfrak{S}}$ est une sous-variété globale de $(P)^d$.

Enfin, la notion de contrainte induite se trouve elle aussi très simplifiée, et la définition 1 prend la forme suivante :

PROPOSITION 10. — *Un jeu de contrainte \mathfrak{S} sur un arrangement de droites est admissible si on peut construire cet arrangement droite après droite, de telle sorte que \mathfrak{S} n'oblige à faire passer chaque nouvelle droite que par zéro, un ou deux points.*

PROPOSITION 11. — Soit \mathfrak{S} un jeu de contraintes sur un arrangement de J -droites C . Si \mathfrak{S} compte au plus six contraintes, alors \mathfrak{S} est admissible.

Démonstration. — Soit p un point associé à une contrainte de \mathfrak{S} . Par p passent au moins trois droites de C . Elles ne peuvent donc pas toutes porter deux autres contraintes (il y en aurait alors au moins 7). Une des droites de C n'est donc concernée que par deux contraintes. On est donc amené à étudier l'admissibilité des contraintes induites sur le reste de l'arrangement. Il s'agit d'un arrangement ayant au plus six contraintes et une droite de moins que l'arrangement initial. Par une récurrence finie, on obtient que \mathfrak{S} est admissible. \square

4.2.2. *Construction de l'isotopie.* — Soit C un arrangement réduit de d J -droites, ayant au plus cinq points spéciaux, et \mathfrak{S} le jeu de contrainte induit naturellement par ces points. Ce jeu de contraintes est admissible et définit une sous-variété $P_{\mathfrak{S}} \subset (P)^d$.

Dans [3], M. Gromov montre que pour tout chemin (p_t, q_t) de paires de points et tout chemin $(J(t))$ de structures complexes, il existe un chemin de $J(t)$ -droites passant par (p_t, q_t) . L'interprétation de l'admissibilité des jeux de contraintes pour les arrangements de droites donnée plus haut (déf. 10) permet d'en déduire qu'un arrangement C muni d'un jeu de contraintes admissible \mathfrak{S} peut toujours être déformé, parmi les arrangements satisfaisant \mathfrak{S} , en un arrangement standard.

Bien sûr, rien ne garantit qu'il s'agisse là d'une isotopie : ce chemin d'arrangements peut passer par des arrangements « dégénérés », ayant plus de points spéciaux que ceux imposés par \mathfrak{S} , des points spéciaux « confondus », des points spéciaux par lesquels passent plus de droites que ne l'impose \mathfrak{S} , ou enfin ayant des droites multiples.

Le point important est que dans chacun de ces cas (sauf peut-être le dernier), un arrangement dégénéré est un arrangement qui satisfait au moins une contrainte de plus que \mathfrak{S} . Ce nouveau jeu de contrainte \mathfrak{S}' est encore admissible, et définit donc une sous-variété $P_{\mathfrak{S}'} \subset (P)^d$ tel que

$$(28) \quad \text{codim}_{\mathbb{R}} P_{\mathfrak{S}'} \geq \text{codim}_{\mathbb{R}} P_{\mathfrak{S}} + 2$$

Pour les apparitions de droites doubles qui ne peuvent s'interpréter à l'aide de contraintes supplémentaires, il faut remarquer que l'arrangement réduit sous-jacent compte une droite de moins (ce qui représente une perte de dimension de 4), et satisfait presque les mêmes contraintes que l'arrangement initial : au plus une contrainte est modifiée, et la codimension associée diminue au plus de 2. Ici encore, les arrangements dégénérés appartiennent à une sous-variété $P_{\mathfrak{S}'} \subset (P)^d$ satisfaisant (28).

Désignons par K la composante connexe de C dans $P_{\mathfrak{S}}$. Nous avons déjà vu que $\pi(K) = \mathcal{J}_{\omega}$. De plus $P_{\mathfrak{S}'}$ rencontre $P_{\mathfrak{S}}$ suivant une sous-variété de

codimension au moins 2. Donc $K \setminus P_{\mathcal{E}}$ est connexe. On peut donc trouver un chemin d'arrangements de droites reliant C à un arrangement standard qui évite toute dégénérescence.

Ceci achève la preuve du théorème 3.

REMARQUE. — La limite sur le nombre de points spéciaux est très basse. Elle peut être un peu améliorée si on accepte de ne considérer que des structures génériques. Le théorème de Pappus fournit cependant une limite à 8 points spéciaux. Il donne en effet un exemple de configuration de 9 droites avec 8 points triples pour laquelle, s'il s'agit de droites algébriques, il existe automatiquement un 9-ième point triple. Ce neuvième point triple est très lié à l'intégrabilité de la structure complexe : une perturbation de la structure standard le fait facilement disparaître, et fournit donc des arrangements de droites presque complexes stables qui ne sont isotopes à aucun arrangement standard.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUROUX (D.). — *Symplectic 4-manifolds as Branched Coverings of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$* , preprint (auroux@math.polytechnique.fr).
- [2] BARRAUD (J.-F.). — *Sphères symplectiques à points doubles ordinaires positifs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$* , C.R. Acad. Sciences Paris, t. **327**, Série I, 1998, p. 661–668.
- [3] GROMOV (M.). — *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Inventiones Math., t. **82**, 1985, p. 307–347.
- [4] HOFER (H.), LIZAN (V.), SIKORAV (J.-C.). — *On genericity of holomorphic curves in 4 dimensional almost complex manifolds*, J. Geometric Anal., t. **7**, 1997, p. 149–159.
- [5] IVASHKOVICH (S.), SHEVCHISHIN (V.). — *Structure of the moduli space in a neighborhood of a cusp curve and meromorphic hulls*, Invent. Math., t. **136**, 1999, p. 571–602.
- [6] LIU (A.). — *Some new applications of general wall-crossing formula, Gompf's conjecture and its applications*, Math. Research. Lett., t. **3**, n° 5, 1996, p. 569–585.
- [7] MCDUFF (D.). — *The local behaviour of holomorphic curves in almost complex 4-manifolds*, J. Differential Geom., t. **34**, 1991, p. 143–164.
- [8] MCDUFF (D.). — *Examples of symplectic structures*, Inventiones Math., t. **89**, 1987, p. 13–36.

- [9] MCDUFF (D.), SALAMON (D.). — *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, Amer. Math. Soc. Univ. Lect. Notes, t. **6**, 1994.
- [10] MCDUFF (D.) et D. Salamon. — *A survey of symplectic 4-manifolds with $b^+ = 1$* , Turk. J. Math., t. **20**, n° 1, 1996, p. 47–60.
- [11] SIKORAV (J.-C.). — *Local properties of J curves*. — Chapitre V de *Holomorphic curves in symplectic geometry*, M. Audin et J. Lafontaine éd., Progress in Math., Birkhäuser, Basel, 1994.
- [12] SIKORAV (J.-C.). — *Singularities of J-holomorphic curves*, Math. Zeit., t. **226**, 1997, p. 359–373.