# Sphères symplectiques à points doubles ordinaires positifs et courbes algébriques dans $\mathbb{CP}^2$.

Jean-François BARRAUD

**Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, UFR MIG, université Paul Sabatier, 31062 Toulouse cedex 4, France.**
**Courriel : barraud@picard.ups-tlse.fr**

**Résumé**

On montre que toute sphère symplectique à points doubles ordinaires positifs de $\mathbb{CP}^2$ est symplectiquement isotope à une courbe algébrique. De même, un arrangement générique de sphères symplectiques plongées de degré 1 et deux à deux positivement transverses est symplectiquement isotope à un arrangement de droites complexes.

**Abstract**

Symplectic spheres with positive ordinary double points and algebraic curves in $\mathbb{CP}^2$.

*We prove that all symplectic sphere having only positive ordinary double points as singularities is symplecticly isotopic to an algebraic curve. In the same way, all generic set of imbeded symplectic spheres of degree 1 which are positively transverse to one another is symplecticly isotopic to a set of complex lines.*

Nous annonçons le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Toute sphère symplectique de $\mathbb{CP}^2$ n'ayant que des points doubles ordinaires positifs est symplectiquement isotope à une courbe algébrique.*

Il s'agit d'une généralisation d'un résultat de M. Gromov [1], qui affirme que toute sphère symplectique plongée de $\mathbb{CP}^2$ est isotope à une droite ou à une conique, et notre preuve s'en inspire largement.

Soit $\mathcal{J}$ l'espace des structures presque complexes $\omega$-positives sur $\mathbb{CP}^2$. Il s'agit d'un espace de sections d'un fibré à fibres contractiles ce qui permet, en suivant les lignes de [1] d'établir que chaque sphère considérée dans le théorème 1 est une courbe $J$-holomorphe pour un $J \in \mathcal{J}$ convenable. Reformulons donc le théorème 1 :

**Théorème 2.** *Soit $J$ une structure presque complexe $\omega$-positive sur $\mathbb{CP}^2$ et $C$ une $J$-courbe rationnelle n'ayant que des points doubles ordinaires. Il existe un chemin $(J_t, C_t)$ où $C_t$ est une $J_t$-courbe à points doubles ordinaires reliant $(J, C)$ à une courbe algébrique.*

La preuve s'inspire largement de celle de [1] : on considère un chemin $(J_t)_{t\in[0,1]}$ dans $\mathcal{J}$ reliant $J$ à $i$, et l'espace $\mathcal{P} = \bigcup_{t\in[0,1]} \mathcal{M}_{J_t}$ des courbes de même degré que $C$, rationnelles, et $J_t$-holomorphes pour un $t \in [0, 1]$. On fixe des points et on choisit le chemin $(J_t)$ de manière à éviter toute courbe “trop singulière”, à rendre $\mathcal{P}$ compact, et à ce que la projection de $\mathcal{P}$ sur $[0,1]$ soit une submersion. On peut alors “suivre” la courbe $C$ le long du chemin $(J_t)$ jusqu'à une courbe algébrique.

La suite de cette note est consacrée à l'esquisse de la preuve de l'existence de tels chemins $J_t$.

Commençons par introduire les objets les plus importants. Notons $\mathcal{U}$ l'espace des applications de classe $C^{k+1,\alpha}$ de $\mathbb{CP}^1$ dans $\mathbb{CP}^2$ de degré $d$ (et quelque part injectives). Rappelons que pour $(u,J)\in\mathcal{U}\times\mathcal{J}$, $u$ est $J$-holomorphe ssi

$$\Phi(u,J) := du + J(u)\,du\,i = 0. \tag{1}$$

Lorsque $u$ est $J$-holomorphe, la linéarisation de $\Phi$ par rapport à $u$ définit, sur les sections de $E := u^*T\mathbb{CP}^2$, un opérateur $D$ de la forme $\bar\partial + a$, où $a$ est d'ordre 0 (non nécessairement complexe). Dans [3], S. Ivashkovich et V. Shevchishin munissent le fibré normal $N$ de la courbe $u(\mathbb{CP}^1)$ d'un opérateur $D^N$, “la composante normale” de $D$, lui aussi de la forme $\bar\partial + a_N$. On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(T\mathbb{CP}^1) \xrightarrow{du} \mathcal{K}\mathrm{er}\, D \longrightarrow \mathcal{K}\mathrm{er}\, D^N \oplus \mathcal{N}_1 \longrightarrow 0 \tag{2}$$

où $\mathcal{N}_1$ est le faisceau gratte-ciel concentré sur les zéros de $du$, et de fibre $\mathbb{C}^{\mu_i}$ où $\mu_i$ est l'ordre d'annulation de $du$ en ce point.

Nous utiliserons aussi l'opérateur associé “aux sections qui s'annulent en certains points” : considérons $m$ points lisses distincts $p_1,\ldots,p_m$ de $u(\mathbb{CP}^1)$. Notons $p_i = u(z_i)$ et $P = -\sum z_i$ le diviseur associé. Soit $\tilde E = E\otimes P$.

**Proposition 1.** *Il existe un unique opérateur $\tilde D = \bar\partial + \tilde a$ sur le fibré $\tilde E$ tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} L^{1p}(\tilde E) & \longrightarrow & L^{1p}(E) \\ {\scriptstyle \tilde D}\big\downarrow & & {\scriptstyle D}\big\downarrow \\ L^p(\Lambda^{01}\mathbb{CP}^1\otimes\tilde E) & \longrightarrow & L^p(\Lambda^{01}\mathbb{CP}^1\otimes E) \end{array}$$

*soit commutatif.*

*Preuve* :Il ne se pose de difficulté qu'au voisinage des points $p_i$ où il suffit de poser $\tilde D = \bar\partial + \frac{1}{z-z_i}\,a\,(z-z_i)$. L'opérateur $\tilde a$ est alors de classe $L^\infty$, ce qui est suffisant pour pouvoir appliquer tous les résultats usuels liés à l'ellipticité de $\bar\partial$. □

Cet opérateur permet de former la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\tilde D \longrightarrow \mathrm{Ker}\, D \xrightarrow{\varepsilon} \oplus_{i=1}^m E_{z_i} \longrightarrow 0,$$

où $\varepsilon$ est l'application d'évaluation en chaque $z_i$ et donc d'étudier l'image de $\varepsilon$.

Enfin nous utiliserons un résultat de [2] :

**Proposition 2.** *Pour un opérateur $D_0 = \bar\partial + a_0$ (où $a_0$ est d'ordre 0) sur un fibré en droites complexes $L$ sur $\mathbb{CP}^1$, on a $\mathrm{ind}_{\mathbb{R}}\, D_0 = 2(c_1.L+1)$ et*

$$\begin{cases} c_1.L \geq -1 \Rightarrow \mathrm{Coker}\, D_0 = 0 \\ c_1.L \leq -1 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, D_0 = 0 \end{cases}.$$

*En particulier, le noyau et le conoyau de $D_0$ sont toujours de dimension réelle paire.*

Considérons à présent la définition suivante : on se donne un entier $d\geq 1$ et $3d-1$ points distincts $p_1,\ldots,p_{3d-1}$ dans $\mathbb{CP}^2$.

**Définition 1.** Une structure presque complexe $J$ est dite *générique* pour le genre 0, le degré $d$ et les points $(p_1, \dots, p_{3d-1})$ si

(i) les courbes rationnelles de degré $d$ passant par $p_1, \dots, p_{3d-1}$ sont toutes immergées à points doubles ordinaires, et forment une variété[1] de dimension 0,

(ii) $\forall d' < d$, il n'existe pas de courbe rationnelle de degré $d'$ passant par $3d'$ des points $p_i$.

Dans l'espace $\mathcal{J}$ des structures presque complexes sur $\mathbb{CP}^2$, les structures génériques pour le genre 0, le degré $d$ et les points $p_1, \dots, p_{3d-1}$ forment un $G_\delta$ dense. Le théorème 2 sera une conséquence du résultat suivant :

**Proposition 3.** *L'espace des structures presque complexes génériques pour le genre 0, le degré $d$ et les points $p_1, \dots, p_{3d-1}$ est connexe par arc.*

*Esquisse de preuve :*

**Construction des espaces $\mathcal{P}$.** Considérons le fibré $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$ dont la fibre au-dessus d'un point $(u, J)$ est l'espace $\Gamma^{k,\alpha}(\Lambda^{01}\mathbb{CP}^1 \otimes u^*T\mathbb{CP}^2)$. En posant $\Phi(u, J) = du + J\, du\, i$, on définit une section $\Phi$ de $\mathcal{F}$, et l'espace des couples $(u, J)$ où $u$ est $J$-holomorphe, est l'espace $\mathcal{P} = \Phi^{-1}(0)$. On adapte cette construction en définissant des sous-variétés $\mathcal{S}$ adéquates de l'espace $\mathcal{T}_{hol}$ des jets d'applications de $\mathbb{CP}^1$ dans $\mathbb{CP}^2$ compatibles avec l'équation (1) : on caractérise ainsi l'espace $\mathcal{P}_0$ des triplets $(u, J, z)$ où $u$ est $J$-holomorphe et satisfait $u(z_i) = p_i$, de même que les espaces analogues $\mathcal{P}_s$ des courbes passant par les points $p_i$ et ayant des singularités, et les espaces $\mathcal{P}'$ des courbes de degré $d'$ passant par $3d'$ des points $p_i$.

On adapte la démarche classique [4] à l'aide de [6] pour montrer que les applications $\Phi_{\mathcal{S}}$ associées (i.e. $\Phi \oplus \tau$ où $\tau$ est une application d'évaluation de jets) ont une différentielle surjective en tout point des espaces $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_s$ ou $\mathcal{P}'$ correspondants. On en déduit que les espaces $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_s$, et $\mathcal{P}'$ sont tous des variétés banachiques.

**Projections sur $\mathcal{J}$.** Le diagramme suivant (écrit pour un triplet $(u, J, z) \in \mathcal{P}_0$)

$$\begin{array}{ccccc} T\mathcal{P}_0 & \longrightarrow & \Gamma(u^*T\mathbb{CP}^2) \oplus T(\mathbb{CP}^1)^{3d-1} & \xrightarrow{L_\tau} & T(\mathcal{T}^0_{hol})^{3d-1} = T(\mathbb{CP}^2)^{3d-1} \\ {\scriptstyle \pi_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle D\oplus 0} & & \\ T\mathcal{J} & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(\Lambda^{01} \otimes u^*T\mathbb{CP}^2) & & \end{array} \tag{3}$$

et ses analogues permettent de vérifier que les projections naturelles $\pi : \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_s, \mathcal{P}' \longrightarrow \mathcal{J}$ sont Fredholm. On a en général $\operatorname{ind} \pi = \operatorname{ind} D - \operatorname{codim} \mathcal{S}$. On a de plus choisi le bon nombre de points pour que (avec des notations évidentes)

$$\operatorname{ind}_{\mathbb{R}} \pi_0 = 6 \quad \operatorname{ind}_{\mathbb{R}} \pi_s = 4 \quad \operatorname{ind}_{\mathbb{R}} \pi' = 4.$$

**Connexité.** La discussion ci-dessus montre que pour des raisons de codimension, un choix générique de chemin de structures presque complexes évite les structures pour lesquelles il existe des courbes rationnelles de degré $d$ passant par les points $p_i$ et "trop singulières" ou non irréductibles. Nous pouvons donc maintenant ne travailler qu'avec des courbes à points doubles ordinaires. Montrons que $\pi_0$ est une submersion (en fait, un difféomorphisme local). On sait déjà que le long d'un chemin générique, on a $\operatorname{Coker} \pi_0 = 0$ ou 1.

[1] au sens d'image réciproque d'un point par une submersion

Notons $z_i = u^{-1}(p_i)$ et $P = -\sum z_i$ le diviseur associé. Le diagramme (3) montre que $\mathrm{Ker}\,\pi_0 = \mathrm{Ker}\,D \cap \mathrm{Ker}\,L_\tau = \mathrm{Ker}\,\tilde{D}$, où $\tilde{D}$ est l'opérateur induit par $D$ sur $E \otimes P$. En tensorisant (2) par $P$ et en en prenant la suite exacte longue de cohomologie, on obtient

$$0 \to H^0(\mathcal{O}(3-3d)) \to \mathrm{Ker}\,\tilde{D} \to \mathrm{Ker}\,\widetilde{D^N} \to \dots$$

(car $\mathcal{N}_1 = 0$). On a $c_1(N) = (3d-2) - (3d-1) = -1$, donc $\mathrm{Ker}\,\widetilde{D^N} = 0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\,\pi_0$ est de dimension paire, et donc $\mathrm{Coker}\,\pi_0$ aussi.

Finalement, il est impossible d'avoir $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Coker}\,\pi_0 = 1$. On en déduit que pour tout $t$, $J_t$ est générique pour le degré $d$ et les points $p_i$, ce qui achève la preuve de la connexité. □

Dans le même ordre d'idées, nous annonçons, sans démonstration le résultat suivant :

**Théorème 3.** *Tout arrangement de $J$-droites n'ayant que des points doubles est isotope (au sens du théorème 2) à un arrangement de droites complexes.*

# Références


[1] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifold. *Inventiones mathematicae*, 82 :307–347, 1985.

[2] H. Hofer, V. Lizan, et J.-C. Sikorav. On genericity of holomorphic curves in 4 dimensional almost complex manifolds. à paraître, *Journ. Goem. Anal.*

[3] S. Ivashkovich et V. Shevchishin. Pseudo-holomorphic curves and envelopes of meromorphy of two spheres in $\mathbb{CP}^2$. preprint, 1995 (http ://xxx.lanl.gov ... 9804014).

[4] D. McDuff. Examples of symplectic structures. *Inventiones mathematicae*, 89 :13–36, 1987.

[5] D. McDuff et D. Salamon. $J$-holomorphic curves and quantum cohomology. *Univ. Lect. Series*, 6, 1994.

[6] J.-C. Sikorav. Local properties of $J$ curves. Dans *Holomorphic curves in symplectic geometry* Audin et Lafontaine éditeurs *Progr. in Math.*, pages 165–189.