

Chapitre 4

Chaînes de MARKOV finies.

7 mai 2004

Introduction

Dans l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps, on s'intéresse avant tout à la loi de ce qui va se passer dans le futur, et pour la préciser, on se sert de toutes les informations obtenues sur le phénomène au cours du passé. Or, de nombreux phénomènes aléatoires ont la propriété suivante : la connaissance de l'état du phénomène à un instant donné apporte sur le futur autant d'informations que la connaissance de tout le passé. Ce sont les processus de MARKOV, appelés "chaînes de MARKOV" si ce sont des processus à temps discret. Il se peut que la connaissance du futur dépende en fait d'un nombre fini (mais fixé) d'étapes dans le passé : c'est alors la succession de ce nombre fini d'étapes qui est dans ce cas un phénomène markovien.

Par exemple :

1. Gestion de stocks : l'état du stock à l'instant $(n + 1)$ dépend de l'état du stock à l'instant n , et des départs et arrivées des différentes composantes du stock entre l'instant n et l'instant $n + 1$.
2. Prix d'une action au temps t : $P_{n+1} = P_n(1 + r_{n+1})$ où r_n est le taux de variation au temps n .
3. Dynamique linéaire : $X_{k+1} = A_k X_k + B_k \varepsilon_{k+1}$.
4. De façon générale, tous les phénomènes définis par une relation de récurrence aléatoire : $X_{n+1} = F(X_n, \varepsilon_{n+1})$, où (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes.

On a ici des liens explicites, donnés par une relation de récurrence, mais on peut avoir la donnée de la valeur d'une étape par sa loi conditionnelle sachant la valeur à l'étape précédente. C'est le cas général que nous allons décrire dans ce qui suit.

1 Chaînes de MARKOV homogènes finies.

1.1 Définition.

Nous verrons plus bas une définition générale des chaînes de MARKOV : (section 5). Pour l'instant, nous ne nous intéresserons qu'au cas particulier des chaînes de MARKOV à valeurs dans un ensemble fini E , qui sont homogènes en temps. Leur loi est entièrement décrite par une matrice carrée (la matrice de transition de la chaîne), et leur étude se ramène alors essentiellement à des problèmes d'algèbre linéaire.

Dans ce qui suit, nous munissons l'ensemble fini E de la tribu $\mathcal{P}(E)$. Nous supposons à partir de maintenant que le cardinal de E est un nombre n fixé. Nous pouvons aussi bien décider que $E = \{1, \dots, n\}$, mais nous ne ferons jouer aucun rôle particulier à l'ordre dans lequel les points de E sont énumérés.

Un chaîne de MARKOV homogène à valeurs dans E est une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans E et qui a la propriété suivante.

$$(1.1) \quad \forall n, \mathcal{L}(X_{n+1}/(X_0, \dots, X_n)) = \mathcal{L}(X_{n+1}/X_n) = \mathcal{L}(X_1/X_0).$$

En d'autres termes, pour tout entier n et pour tout $(n+2)$ -uplet (x_0, \dots, x_{n+1}) de points de E

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}/X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}/X_n = x_n) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = x_{n+1}/X_0 = x_n). \end{aligned}$$

Le tableau de nombres $P(x_0, x_1) = \mathbf{P}(X_1 = x_1/X_0 = x_0)$, qui se représente par une matrice carrée, s'appelle la **matrice de transition** de la chaîne.

1.2 Exemple fondamental.

Les chaînes de MARKOV se rencontrent la plupart du temps dans la situation suivante : on dispose d'une suite de variables aléatoires $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \dots)$

indépendantes et de même loi, à valeurs dans un espace mesurable (E_1, \mathcal{E}_1) , ainsi que d'une fonction mesurable $F : E \times E_1 \mapsto E$.

Alors, si X_0 est donnée et indépendante de la suite (ϵ_i) , la suite définie par la relation de récurrence $X_{n+1} = F(X_n, \epsilon_{n+1})$ est une chaîne de MARKOV homogène. Dans ce cas, la matrice de transition s'écrit

$$\mathbf{P}(x_0, x_1) = \mathbf{P}(F(x_0, \epsilon_1) = x_1).$$

La preuve de ceci est élémentaire : il suffit d'utiliser les propriétés de l'indépendance conditionnelle (section 4). Elle est laissée à titre d'exercice (voir aussi l'exemple 1 dans la section 5).

Toutes les chaînes de MARKOV sur un ensemble fini (et même sur un ensemble mesurable quelconque) s'obtiennent par le procédé de récurrence décrit plus haut : plus exactement, étant donné une matrice de transition P et une loi initiale μ_0 , on peut construire une chaîne de MARKOV de matrice P et de loi initiale μ_0 de la forme $X_{n+1} = F(X_n, \epsilon_{n+1})$ avec une suite (ϵ_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Pour le voir, nous nous donnons une variable X_0 de loi μ_0 , et une suite de ϵ_n variables aléatoires à valeurs dans E^E , indépendantes entre elles et indépendantes de X_0 . Un point ε de E^E est une fonction $\varepsilon(x)$ de E dans E . Si $\varepsilon_k = (\varepsilon_k(x), x \in E)$, alors on choisit la loi de ε_k de telle manière que la loi de $\mathbf{P}(\varepsilon_k(x) = y) = P(x, y)$. Si nous définissons maintenant $F : E^E \times E \rightarrow E$ par $F(x, \varepsilon) = \varepsilon(x)$, alors $F(X_n, \varepsilon_{n+1})$ est bien un chaîne de MARKOV de matrice P . Remarquons qu'on a le choix de la loi jointe des variables $(\varepsilon_k(x), x \in E)$, pour fabriquer la même chaîne de MARKOV.

Bien évidemment, dans la réalité, c'est un procédé trop peu économique, en terme de temps de calcul par exemple, pour être utilisable pour simuler une suite markovienne.

Remarquons que la matrice de transition P étant donnée, ainsi que la loi μ_0 de X_0 (qu'on appelle la loi initiale, nous connaissons la loi de tous les n -uplets (X_0, \dots, X_n) . En effet, pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1}$, on a

$$\mathbf{P}((X_0, \dots, X_n) = (x_0, \dots, x_n)) = \mu_0(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n),$$

comme on le voit par une récurrence immédiate. La donnée de P et de μ_0 caractérise donc entièrement la loi de la suite (X_n) .

Dans la pratique, il est commode de laisser libre la valeur initiale X_0 de la chaîne (qui sera en général, mais pas toujours, une valeur fixée et non aléatoire),

et de se concentrer sur les propriétés de la suite (X_n) qui dépendent de la matrice de transition.

1.3 Matrices Markoviennes

Une fonction sur E à valeurs réelles se représente par le vecteur de \mathbb{R}^n $(f(x)_{x \in E})$, que nous convenons de représenter dans une notation matricielle par un **vecteur colonne** $[f]$, s'il faut préciser qu'on s'intéresse à la matrice de f .

Une mesure μ de probabilité sur E se représente par un vecteur $(\mu(x))_{x \in E}$ de \mathbb{R}^n , dont tous les coefficients sont positifs, et dont la somme des coefficients vaut 1. Nous conviendrons de la représenter par un **vecteur ligne** $[\mu]$, s'il faut préciser qu'on s'intéresse à la matrice de μ . Si on munit cet ensemble des lois de probabilités sur E de la topologie ordinaire de \mathbb{R}^n (qui coïncide ici avec celle de la convergence étroite), nous voyons que c'est un ensemble compact. C'est le simplexe de \mathbb{R}^n , il est homéomorphe à la boule unité de \mathbb{R}^{n-1} .

Nous pouvons alors représenter la dualité usuelle entre fonctions et mesures comme

$$\int_E f d\mu = \sum_{x \in E} f(x)\mu(x) = \langle \mu, f \rangle = [\mu][f].$$

Un noyau de transition P se représente par une matrice carrée $n \times n$, où n est le cardinal de E : $P = (P(x, y))$, qu'on notera $[P]$ s'il faut distinguer le noyau de sa matrice. Si P est la loi de Y sachant X , alors $P(x, y) = \mathbf{P}(Y = y/X = x)$: tous les coefficients de P sont positifs et la somme de chaque ligne est égale à 1.

Définition 1.1. *On appellera **matrice markovienne** une matrice carrée dont tous les coefficients sont positifs et dont la somme de chaque ligne est égale à 1.*

*On dira que la matrice est **sous-markovienne** si ses coefficients sont positifs et la somme de chaque ligne est inférieure ou égale à 1.*

Ainsi, la matrice de transition d'une chaîne de MARKOV est une matrice markovienne, tandis que, si $A \subset E$, $(P(x, y), (x, y) \in A \times A)$ est sous-markovienne.

Dans la section 3 du chapitre 1, nous avons défini l'action d'un noyau sur

les fonctions et les mesures. Si f est une fonction $E \mapsto \mathbb{R}$, alors

$$Pf(x) = \sum_{y \in E} P(x, y)f(y),$$

et de façon similaire, pour une mesure μ sur E ,

$$\mu P(x) = \sum_{y \in E} \mu(y)P(y, x).$$

On a alors, en notations matricielles, pour un noyau P , une probabilité μ et une fonction f :

$$[P(f)] = [P][f]; \quad [\mu P] = [\mu][P]; \quad \langle \mu, Pf \rangle = \langle \mu P, f \rangle = [\mu][P][f].$$

La fonction constante égale à 1 sera notée $\mathbf{1}$, et sa matrice $[\mathbf{1}]$.

Si (X_n) est une chaîne de MARKOV homogène de noyau de transition P , on appellera P la **matrice de la chaîne** X .

Rappelons (chapitre 1, section 3) que, si P est la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n , alors

$$Pf(X_n) = \mathbf{E}(f(X_{n+1})/X_n),$$

tandis que si μ est la loi de X_n , μP est la loi de X_{n+1} . En particulier, si μ est la loi de X_n ,

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1})) = \langle \mu, Pf \rangle = \langle \mu P, f \rangle.$$

Les propriétés suivantes des matrices markoviennes sont élémentaires :

Proposition 1.2.

1. Une matrice est P markovienne si et seulement si elle préserve les fonctions positives et si $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$.
2. Le produit de deux matrices markoviennes est markovienne.
3. Une matrice P est markovienne si et seulement si, pour toute probabilité μ sur E , μP est une probabilité.
4. La ligne $y \mapsto P(x, y)$ de la matrice markovienne P n'est rien d'autre que la mesure $\delta_x P$.
5. Si (X_n) est une chaîne de MARKOV homogène de matrice P et de loi initiale μ_0 , la loi de X_n est $\mu_0 P^n$.

6. Si X_n est une chaîne de MARKOV homogène de matrice P , et si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, alors

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n) = P(f)(X_n).$$

7. Avec les mêmes notations que plus haut

$$\forall n < p, \mathbf{E}(f(X_{n+p})/\mathcal{F}_n) = P^p(f)(X_n).$$

2 Mesure invariante : problèmes d'unicité et de convergence.

2.1 Définition.

Parmi les loi initiales pour la chaîne X , il en est qui jouent des rôles particulier importants :

Définition 2.1. On dit qu'une probabilité μ sur E est **invariante** (on dit aussi **stationnaire**) pour la matrice markovienne P (ou pour la chaîne X homogène de noyau P) si $\mu P = \mu$.

En d'autres termes, si la chaîne a comme loi initiale une mesure μ invariante, la loi de X_n reste égale à μ .

Un cas particulier important est celui des matrices bi-stochastiques, c'est à dire lorsque la matrice P est telle que la somme de toutes ses colonnes vaut 1 (sa transposée est une matrice markovienne). Alors, on voit immédiatement que la mesure uniforme est invariante.

Une autre définition équivalente de l'invariance de la mesure est la suivante :

Proposition 2.2. Une probabilité μ sur E est invariante si, pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_E P(f)(x) \mu(dx) = \int_E f(x) \mu(dx).$$

Démonstration. — Si μ est invariante, nous écrivons

$$\int P(f)(x) \mu(dx) = \sum_x \sum_y f(y) \mu(x) P(x, y) = \sum_y f(y) \mu(y).$$

Réciproquement, si nous écrivons ce qui précède pour $f = \mathbf{1}_y$, alors $P(f)(x) = P(x, y)$, et nous obtenons

$$\mu(y) = \sum_x \mu(x)P(x, y),$$

ce qui est la propriété cherchée. ■

La finitude de E nous assure l'existence d'une probabilité invariante, comme le montre la proposition suivante :

Théorème 2.3. (*Perron-Frobenius*) *Si P est une matrice markovienne, elle admet une probabilité invariante.*

Plus généralement, si P est une matrice à coefficient positifs, non tous nuls, il existe un $\lambda \geq 0$, et un vecteur X à coefficients positifs ou nuls, tel $\mu P X = \lambda \mu$. On peut choisir $\lambda > 0$ dès que la somme de chaque ligne de P est strictement positive.

Remarques

1. Si P est markovienne, une mesure invariante est donc un vecteur propre de la matrice transposée tP de P , de valeur propre 1. Il n'est pas étonnant que tP admette 1 comme valeur propre, puisque $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, et par conséquent 1 est valeur propre de P (les valeurs propres de P et de tP sont les mêmes avec le même ordre de multiplicité). Mais ce que dit le théorème précédent est que le vecteur propre associé peut être choisi à coefficients positifs (et donc à une probabilité en le multipliant par une constante convenable).
2. On a bien sûr le même résultat avec les solutions de $Pf = \lambda f$, la condition suffisante pour que λ soit non nulle est alors que la somme des colonnes de P soit non nulle.

Démonstration. — Commençons par le cas des matrices markoviennes, qui est facile : l'ensemble \mathcal{M} des probabilités sur E est un compact. L'application $\mu \rightarrow \mu P$ est continue et laisse ce compact fixe. Soit alors μ_0 une probabilité quelconque, et considérons la suite

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mu_0 P^i.$$

C'est une suite de probabilités, donc de points dans un compact, elle admet donc une sous-suite convergente vers une valeur μ , dont il nous reste à montrer

que c'est une mesure invariante. Mais si μ_{n_k} converge vers μ , nous avons

$$\mu_{n_k}P = \mu_{n_k} + \frac{\mu_0 P^{n_k+1} - \mu_0}{n_k + 1}.$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, $(\mu_0 P^{n_k+1} - \mu_0)/(n_k + 1)$ converge vers 0, puisqu'il s'agit de la différence de deux mesures de probabilités divisée par $n_k + 1$. Alors, nous voyons en passant à la limite que $\mu = \mu P$.

Le cas des matrices à coefficients positifs est plus difficile (et inutile pour nous dans un premier temps). Commençons par le cas où la somme de toutes les lignes de P est strictement positive, auquel cas on va pouvoir choisir $\lambda > 0$.

Remarquons que $\mu \rightarrow \mu P$ ne préserve plus les lois de probabilité. Appelons $|\mu P|$ la masse totale de la mesure positive μP , c'est à dire

$$|\mu P| = \sum_{x,y} \mu(x)P(x,y).$$

Puisque, par hypothèse, $\sum_y P(x,y) \geq a > 0$, pour un certain $a > 0$, alors $|\mu P| \geq a$ pour toute loi de probabilité, et donc l'application $\mu \rightarrow F(\mu) = \mu P/|\mu P|$, qui transforme les lois de probabilités en lois de probabilités est continue. Mais l'ensemble des lois de probabilités est identique au simplexe de \mathbb{R}^n , qui est homéomorphe à la boule unité de \mathbb{R}^{n-1} .

Or, le théorème du point fixe de Brouwer affirme que toute application continue de la boule unité de \mathbb{R}^{n-1} dans elle même admet un point fixe. Ce théorème reste vrai pour tous les espaces topologiques homéomorphes à la boule, et c'est le cas de l'ensemble des probabilités sur un ensemble fini à n points.

L'application F admet donc un point fixe, c'est à dire et qu'il existe une probabilité μ telle que $\mu P = |\mu P|\mu$. C'est bien la mesure invariante cherchée.

Dans le cas général, nous pouvons toujours ajouter une quantité $1/n > 0$ à tous les coefficients de la matrice. Nous obtenons ainsi une matrice P_n , une probabilité μ_n et un réel $\lambda_n > 0$ tels que $\mu_n P_n = \lambda_n \mu_n$. Extrayons de μ_n une sous-suite μ_{n_k} qui converge vers une probabilité μ . Alors, $\lambda_{n_k} = |\mu_{n_k} P_{n_k}|$ converge vers $\lambda = |\mu P|$, et nous obtenons $\mu P = \lambda P$ à la limite.

■

Remarque. — Dans le cas des matrices markoviennes, le lecteur pourra montrer que, si $m = (m_i)$ est un vecteur propre (éventuellement complexe) de ${}^t P$, de valeur propre 1, alors le vecteur $|m| = (|m_i|)$ est aussi vecteur propre de

valeur propre 1. Ceci redémontre l'existence d'un vecteur propre à coefficients positifs.

2.2 Matrice adjointe, chaînes réversibles.

Nous avons déjà introduit une dualité entre fonction et mesures. La notion de matrice adjointe que nous introduisons ci-dessous est relative à une autre forme de dualité, la dualité dans $L^2(\mu)$ (voir la remarque qui suit la proposition 2.7).

Définition 2.4. *Lorsque P est une matrice markovienne de mesure invariante μ et que $\mu(x) > 0$ pour tous les points $x \in E$, on appelle matrice adjointe de P la matrice $Q(x, y) = P(y, x)\mu(y)/\mu(x)$.*

Proposition 2.5. *Soit P une matrice markovienne et μ une probabilité invariante telle que $\mu(x) > 0, \forall x \in E$. Alors, la matrice Q définie dans 2.4 est markovienne. Elle admet la mesure μ comme mesure invariante, et on a, pour toutes les fonctions f et g définies sur E à valeurs réelles*

$$(2.2) \quad \int_E P(f)(x)g(x) \mu(dx) = \int_E f(x)Q(g)(x) \mu(dx).$$

De même, si, pour toute probabilité ν sur E , on dénote par $d\nu/d\mu$ la densité $g(x) = \nu(x)/\mu(x)$, alors

$$(2.3) \quad \frac{d(\nu P)}{d\mu}(x) = Q\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)(x).$$

Démonstration. — Montrons d'abord que la matrice Q est markovienne. Il s'agit de démontrer d'abord que la somme des lignes de Q vaut 1, ce qui se traduit par

$$\sum_y \mu(y)P(y, x)/\mu(x) = 1.$$

Or, nous savons que $\mu(x) = \sum_y \mu(y)P(y, x)$ par définition de la mesure invariante.

L'équation 2.2 s'écrit

$$\sum_{(x,y) \in E^2} f(y)g(x)P(x, y)\mu(x) = \sum_{(x,y) \in E^2} f(x)g(y)Q(x, y)\mu(x),$$

ce qui est immédiat d'après la définition.

Enfin, l'équation 2.3 est tout aussi immédiate : on écrit

$$\frac{d(\nu P)}{d\mu}(x) = \sum_y \nu(y)P(y, x)/\mu(x) = \sum_y Q(x, y) \frac{\nu(y)}{\mu(y)}.$$

■

Nous verrons plus bas (proposition 1.2 de la section 5) que, si la suite (X_n) est markovienne, il en va de même de la suite retournée au temps N $(Y_n) = (X_{(N-n)\vee 0})$. Mais, si la chaîne (X) est homogène, il n'en va pas de même avec la chaîne retournée en général (c'est à dire que les probabilités de transition de Y_n à Y_{n+1} peuvent dépendre de n). En effet, si nous appelons μ_p la loi de X_p , alors la loi de X_p sachant X_{p+1} est

$$\mathbf{P}(X_{p+1} = x \mid X_p = y) = \mathbf{P}(X_p = y \mid X_{p+1} = x)\mu_{p+1}(x)/\mu_p(y).$$

Mais, lorsque μ est une mesure stationnaire, alors μ_p est indépendante de p , et la suite markovienne (Y_k) est elle aussi stationnaire. Sa matrice de transition est donnée par $Q(x, y) = P(y, x)\mu(y)/\mu(x)$.

Un cas particulier important est le cas des chaînes réversibles, c'est à dire celles pour lesquelles la matrice adjointe Q est égale à P , et la chaîne a la même loi dans les deux sens du temps : on ne pourra pas distinguer le sens du temps en observant l'évolution de la chaîne. Dans ce cas, l'opérateur $f \rightarrow P(f)$ est **symétrique** dans l'espace $L^2(\mu)$. C'est une façon rapide de vérifier qu'une probabilité donnée est invariante dans quelques cas simples, grâce à la proposition 2.7.

Définition 2.6. *On dira qu'une probabilité μ est réversible si, pour tous les points x et y de E , on a $\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x)$.*

La remarque suivante est fort utile

Proposition 2.7. *Si μ est une mesure réversible, elle est invariante.*

Démonstration. — C'est immédiat. Nous écrivons, pour toute fonction f

$$\int P(f)(x)\mu(dx) = \int f(x)P(\mathbf{1})(x)\mu(dx) = \int f(x)\mu(dx).$$

Il ne nous reste qu'à appliquer la proposition 2.2

■

Remarque. — Si la mesure μ est réversible et charge tous les points, elle munit l'espace \mathbb{R}^n d'une structure euclidienne (la structure de $L^2(\mu)$) donnée par $[f].[g] = \sum_x f(x)g(x)\mu(x)$. Dans ce cas, dans une base orthonormée pour cette structure, l'opérateur $f \mapsto Pf$ est symétrique : les valeurs propres de la matrice P sont donc réelles. On verra plus bas qu'elle sont toujours de module inférieur à 1. Si Q est la matrice adjointe de P , l'opérateur $f \mapsto Q(f)$ n'est rien d'autre que l'opérateur adjoint dans $L^2(\mu)$ de l'opérateur $f \mapsto P(f)$.

Si la loi de X_0 est une mesure invariante, alors la suite $(Y_p)_{p=0,\dots,n}$ retournée égale à $(X_{n-p})_{p=0,\dots,n}$ est homogène. Si cette mesure est réversible, alors elle a même loi que $(X_p)_{p=0,\dots,n}$. C'est de là que vient le nom de réversible.

Un corollaire immédiat mais très utile dans la pratique est le suivant :

Corollaire 2.8. *Si la matrice P est symétrique, alors la mesure uniforme est réversible, donc invariante.*

Exemple. — Exemple de mesure invariante non réversible : La mesure uniforme est invariante pour

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix},$$

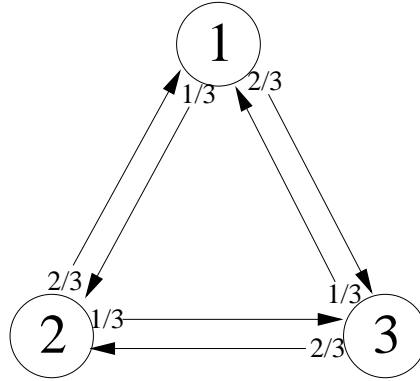
mais non réversible. En effet, relativement à la mesure uniforme, la matrice adjointe est la transposée, or P_1 n'est pas symétrique.

On peut représenter une matrice markovienne de taille n en dessinant entre les n points, apparaissant comme des boules numérotées ici, des flèches quand une transition est possible. A savoir, quand $P(x, y) \neq 0$, on dessine une flèche de x vers y et on indique la valeur de $P(x, y)$ au départ de la flèche, voir la figure 2.2.

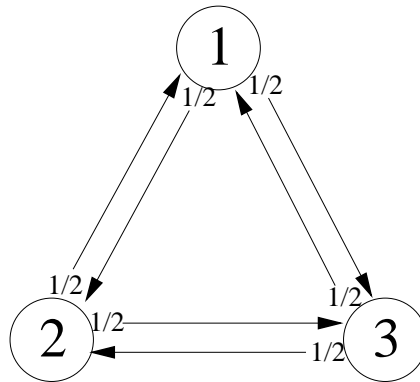
Partant d'un point ou état x , c'est-à-dire sachant $X_p = x$, on repère un certains nombres de flèches au départ de x dont la somme des probabilités doit valoir 1, c'est la loi de X_{p+1} . Dans le cas de P_1 on peut ainsi comprendre, quand on part de la mesure invariante pour X_0 donc pour tout X_p , la différence entre X et la suite retournée Y : La suite X favorise les transitions $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ alors que Y favorise les transitions dans l'autre sens.

Si on ne favorise pas un sens de transition et que l'on considère

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

FIG. 4.1 – Pour P_1 la mesure uniforme n'est pas réversible.

il n'y a plus de différence entre les lois de X et Y , ce qui explique que la mesure uniforme soit réversible pour P_2 .

FIG. 4.2 – Pour P_2 la mesure uniforme est réversible.

Exemple : Considérons la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que l'on appréhendera mieux avec la représentation de la figure 2.2.

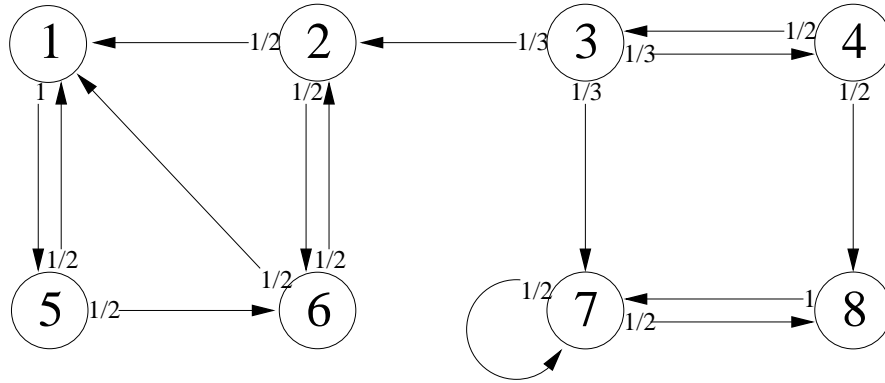


FIG. 4.3 – 3,4 sont transitoires. 1,2,5,6,7,8 récurrents.

On voit entre autres que 3 est transitoire car $3 \ll 2$ mais $2 \not\ll 3$. Par contre 2 est récurrent. Par exemple comme $2 \ll 1$ on doit vérifier $1 \ll 2$, c'est le cas grâce à la suite 1, 5, 6, 2.

Par exemple dans la figure 2.2, il y a deux classes de récurrence ($\{1, 2, 5, 6\}$ et $\{7, 8\}$), et les points 4 et 3 sont transitoires.

Voici un exemple plus compliqué où on détermine la mesure invariante par son caractère réversible.

Exemple. — LE MODÈLE D'ERHENFEST N particules sont placées dans deux récipients A et B . À chaque instant, on choisit au hasard une particule et on la change de récipient. On considère alors le nombre X_n de particules présentes dans le récipient A à l'instant n . C'est une chaîne de MARKOV sur l'ensemble $\{1, \dots, N\}$, dont la probabilité de transition $P = (p(i, j))$ est donnée par

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k - 1 \mid X_n = k) = k/N,$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k + 1 \mid X_n = k) = 1 - k/N,$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k) = 0, \text{ si } j \neq k - 1, k + 1.$$

On voit alors que la probabilité binômiale

$$p_N(k) = C_N^k / 2^N, \quad k = 0, \dots, N,$$

est réversible, et donc invariante. En effet, pour tout $k = 0, \dots, N$, on a

$$p_N(k)p(k, k + 1) = p_N(k + 1)p(k + 1, k).$$

Ceci restant vrai en posant $p_N(N + 1) = p_N(-1) = 0$. L'équation précédente suffit à assurer la réversibilité, quitte à changer k en $k - 1$, car tous les autres coefficients de la matrice sont nuls.

2.3 Classification des états

Dans cette section, nous allons caractériser les chaînes de MARKOV pour lesquelles la mesure invariante est unique. Cette caractérisation s'exprime en terme d'unicité d'une classe d'équivalence pour une relation d'équivalence sur l'ensemble E que nous définissons dans ce qui suit.

Définition 2.9. Soit $P = (P(x, y))$ une matrice markovienne.

1. Nous dirons que $x < y$ si $P(x, y) > 0$.
2. Nous dirons que $x \ll y$ si il existe une suite finie de points de E : $x = x_0, x_1, \dots, x_p = y$, telle que , pour tout $k = 0, \dots, p - 1$, $x_k < x_{k+1}$.
3. Nous dirons qu'un point x est récurrent si,

$$\forall y \in E, x \ll y \implies y \ll x.$$

4. Nous dirons qu'un point x est transitoire s'il n'est pas récurrent.

Nous noterons \mathcal{T} l'ensemble des points transitoires et \mathcal{R} l'ensemble des points récurrents.

Remarques

1. Pour tout x de E , puisque $\sum_y P(x, y) = 1$, il y a au moins un point y tel que $x < y$.
2. $x \ll y$ si et seulement si il existe un entier $p \geq 1$ tel que $P^p(x, y) > 0$.
En effet,

$$P^p(x, y) = \sum_{(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{p-1}}) \in E^{p-1}} P(x, x_{i_1})P(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdots P(x_{i_{p-1}}, y).$$

Dans la somme précédente, tous les termes sont positifs ou nuls ; la somme n'est donc non nulle que si un des termes au moins ne l'est pas : c'est la définition de $x \ll y$.

3. Lorsque $P^p(x, y) > 0$, nous dirons pour les raisons qui précèdent qu'il existe un chemin de longueur p qui va de x à y .
4. La relation $x \ll y$ est transitive : en effet, si $P^p(x, y) > 0$ et $P^q(y, z) > 0$, alors $P^{p+q}(x, z) > 0$, puisque

$$P^{p+q}(x, z) = \sum_{y_1} P^p(x, y_1)P^q(y_1, z) \geq P^p(x, y)P^q(y, z) > 0.$$

5. On n'a pas nécessairement $x < x$, ni $x \ll x$. Mais, si le point x est récurrent, alors nécessairement $x \ll x$, puisqu'il existe au moins un point y tel que $x < y$, et donc alors $y \ll x$ et par suite $x \ll x$. Par contre, un point transitoire x peut ou non satisfaire $x \ll x$: considérons les deux matrices markoviennes suivantes sur les deux points $\{1, 2\}$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, le point 1 est transitoire, mais la relation $1 \ll 1$ est fausse pour P_1 et vraie pour P_2 .

6. Si $x \ll y$ et si x est récurrent, alors y est récurrent : il suffit d'appliquer la propriété de transitivité de la relation \ll .

L'ensemble des points transitoires peut être vide, mais pas l'ensemble des points récurrents si l'ensemble E lui-même est non vide. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Lemme 2.10. *Soit t un point transitoire. Alors, il existe un point récurrent r tel que $t \ll r$*

Démonstration. — Notons pour simplifier $t \dashv t'$ si la relation $t \ll t'$ est fausse. Soit $t_0 \in \mathcal{T}$, et raisonnons par l'absurde.

Puisque t_0 est transitoire, il existe un point t_1 tel que $t \ll t_1$ et tel que $t_1 \dashv t$. Par hypothèse, t_1 est transitoire et nous pouvons répéter l'opération avec t_1 . On construit ainsi une suite de points t_n dans E , qui ont la propriété suivante : pour tout $i \geq 0$, $t_i \ll t_{i+1}$ et $t_{i+1} \dashv t_i$. En utilisant la transitivité de la relation \ll , on en conclut aisément que les points t_i sont tous distincts, ce qui est en contradiction avec le fait que E est un ensemble fini. ■

La proposition suivante permet de définir les classes de récurrence :

Proposition 2.11. *Sur l'ensemble \mathcal{R} des points récurrents, la relation $x \ll y$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — Nous savons déjà qu'elle est transitive. Par définition, elle est symétrique sur l'ensemble \mathcal{R} . Elle y est également réflexive puisque,

$$\forall x \in E, \exists y \in E, x \ll y.$$

■

Définition 2.12. On appelle classe de récurrence les classes d'équivalence de \mathcal{R} pour cette relation d'équivalence.

Nous dirons qu'une matrice markovienne est **irréductible** s'il n'y a pas de points transitoires et une seule classe de récurrence.

Par abus de langage, on dit aussi qu'une chaîne de MARKOV homogène est irréductible si sa matrice l'est.

Remarques

1. Si une chaîne de MARKOV est à l'instant initial dans une classe de récurrence, elle y reste à jamais. On peut donc toujours réduire l'espace d'état de la chaîne à une classe de récurrence. Par contre, au sein d'une classe de récurrence, elle visitera avec une probabilité positive tous les points. On verra plus bas (théorème 4.9) qu'elle visite tous les points avec probabilité 1, et même une infinité de fois. On ne peut donc pas la réduire.
2. Une matrice markovienne est irréductible si et seulement si, pour tout couple de points (x, y) , on a $x \ll y$.
3. Si R est une classe de récurrence et $x \in R$, alors $P(x, y) = 0, \forall y \notin R$. Par conséquent, la matrice $P^R = (P^R(x, y))$ définie sur $R \times R$ comme la restriction de la matrice P est encore une matrice markovienne. Si f_R désigne la restriction de la fonction f à la classe R , alors

$$P^R(f_R) = P(f)_R.$$

La proposition suivante montre qu'une mesure invariante ne charge pas les points transitoires. Pour le démontrer, nous énonçons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.13. Si μ est une mesure invariante et que $\mu(x) = 0$,

$$y \ll x \implies \mu(y) = 0.$$

Démonstration. — Soit x tel que $\mu(x) = 0$. Il suffit bien évidemment de montrer le résultat lorsque $y < x$. La mesure μ étant invariante, on a

$$\mu(x) = \sum_y \mu(y)P(y, x) = 0.$$

C'est une somme de termes positifs, donc tous les termes sont nuls, ce qui veut dire que $\mu(y) = 0$ si $P(x, y) > 0$. C'est ce que nous voulions démontrer. ■

Proposition 2.14. *Soit μ une mesure invariante et $t \in \mathcal{T}$. Alors $\mu(t) = 0$.*

Démonstration. — Nous allons montrer que

$$\mu(\mathcal{T}) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \mu(t) = 0.$$

Nous commençons par écrire que μ est invariante :

$$\forall x \in E, \mu(x) = \sum_{y \in E} \mu(y)P(y, x).$$

Sommons ensuite sur tous les éléments de x de \mathcal{T} : il vient

$$\mu(\mathcal{T}) = \sum_{y \in E} \mu(y) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(y, x).$$

Si $x \in \mathcal{T}$, alors $P(y, x) = 0$ si $y \notin \mathcal{T}$, et donc nous pouvons écrire

$$\mu(\mathcal{T}) = \sum_{y \in \mathcal{T}} \mu(y) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(y, x).$$

Remarquons d'abord que, pour tout $y \in \mathcal{T}$,

$$\mu(y) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(y, x) \leq \mu(y) \sum_{x \in E} P(y, x) = \mu(y).$$

En sommant ceci sur $y \in \mathcal{T}$, on voit que, pour tout $y \in \mathcal{T}$,

$$\mu(y) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(y, x) = \mu(y).$$

En d'autres termes, pour tout $y \in \mathcal{T}$, si $\mu(y) > 0$, alors $\forall x \in \mathcal{R}, P(y, x) = 0$.

Disons qu'un point transitoire t est à la frontière s'il existe $x \in \mathcal{R}$ tel que $P(t, x) = 0$. Appelons $\partial\mathcal{T}$ l'ensemble des points frontière. Nous venons donc de voir que, si $t \in \partial\mathcal{T}$, $\mu(t) = 0$.

Par ailleurs, pour tout point transitoire t , nous avons vu (lemme 2.10) qu'il existe un point récurrent x tel que $t \ll x$. En écrivant un chemin

$$t < t_1 < t_2 \dots < x$$

qui va de t à x , on voit que dans cette liste il y a un dernier point transitoire, c'est à dire un point t' de $\partial\mathcal{T}$ tel que $t \ll t'$.

Supposons alors qu'il y ait un point $t \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(t) > 0$. Choisissons $t' \in \partial\mathcal{R}$ tel $t \ll t'$. D'après le lemme 2.13, on a $\mu(t') > 0$. Nous avons vu que c'est impossible. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette section :

Théorème 2.15. *Soit P une matrice markovienne : la mesure invariante est unique si et seulement si il n'y a qu'une seule classe de récurrence.*

Démonstration. — Commençons par montrer que la condition est nécessaire : s'il y a plusieurs classes de récurrence, la restriction de la matrice P à chacune de ces classes est markovienne, et à chacune de ces classes R correspond au moins une mesure invariante μ_R . Ces mesures μ_R , qui sont aussi par extension des mesures sur E portées par R , sont des mesures invariantes pour la matrice P elle-même.

Pour la partie directe, puisque nous savons qu'une mesure invariante ne charge pas l'ensemble des points transitoires, nous pouvons nous restreindre au cas des chaînes irréductibles (rappelons que ceci signifie sans points transitoires et unicité de la classe de récurrence). Il nous faut alors démontrer que l'espace propre associé à la matrice transposée tP pour la valeur propre 1 est de dimension 1. Or, les valeurs propres de P et tP sont les mêmes, et ont même ordre de multiplicité. Il nous suffit donc de démontrer que l'espace propre associé à P pour la valeur propre 1 est de dimension 1, c'est à dire que toute fonction f solution de $P(f) = f$ est constante.

Appelons une telle fonction une fonction invariante et choisissons une mesure invariante μ . Le lemme 2.13 nous montre que, si un point x est tel que $\mu(x) = 0$, alors il en va de même de tous les autres points $y \in E$, car $y \ll x$ puisque la chaîne est irréductible. Puisque μ est une probabilité, ceci est impossible et $\mu(x) > 0$ pour tous les points de E .

Pour toute fonction f , introduisons la quantité $\Gamma(f) = f^2 - 2fP(f) + P(f^2)$. Un simple calcul montre que

$$\Gamma(f)(x) = \sum_y P(x, y) (f(x) - f(y))^2 \geq 0.$$

D'autre part, on a aussi, puisque μ est invariante

$$\int \Gamma(f)(x) d\mu(x) = 2 \int f^2 - fP(f) d\mu = \int f(f - P(f)) d\mu.$$

Nous voyons donc que, si f est invariante, alors

$$\int \Gamma(f) d\mu = \sum_x \Gamma(f)(x)\mu(x) = 0,$$

d'où nous déduisons que, pour tout $x \in E$, $\Gamma(f)(x) = 0$, puisque $\Gamma(f) \geq 0$ et que $\mu(x) > 0$. Finalement, si nous revenons à l'expression de $\Gamma(f)(x)$, nous voyons que

$$P(x, y) > 0 \implies f(x) = f(y).$$

On en déduit que

$$y \ll x \implies f(x) = f(y),$$

et donc que f est constante si la chaîne est irréductible. ■

Remarques

1. La démonstration précédente nous a aussi appris que la mesure invariante de chaque classe de récurrence charge tous les points de la classe avec une mesure strictement positive, et qu'une fonction invariante est constante sur chaque classe de récurrence.
2. Une autre façon de voir qu'une fonction invariante est constante est de considérer un point x_0 où f atteint son maximum. Alors, en ce point,

$$f(x_0) = \sum_y P(x_0, y)f(y) \leq \sum_y P(x, y)f(x_0),$$

et donc

$$\sum_y P(x_0, y)(f(x_0) - f(y)) = 0,$$

ce qui montre que $P(x_0, y) \neq 0 \implies f(y) = f(x_0)$, et cette identité se propage partout pour démontrer que f est constante.

Corollaire 2.16. *Soit P une matrice markovienne. Soit (R_1, \dots, R_k) ses classes de récurrence, et (μ_1, \dots, μ_k) les probabilités invariantes de ces classes. Alors, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension k , toutes les solutions de $\nu P = \nu$ s'écrivent*

$$\nu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i.$$

En particulier, pour les probabilités invariantes, on a $\alpha_i \geq 0$ et $\sum_i \alpha_i = 1$.

S'il n'y a pas de points transitoires, toute les fonctions invariantes s'écrivent

$$f = \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{1}_{R_i}.$$

Démonstration. — Commençons par la décomposition d'une solution de $\nu P = \nu$. Appelons ν_i la restriction de ν à la classe R_i . Si P^i désigne la restriction de la matrice P à la classe R_i , qui est irréductible, alors $\nu_i P^i = \nu_i$, et donc $\nu_i = \alpha_i \mu_i$, avec $\alpha_i = \nu(R_i) = \sum_{x \in R_i} \nu(x)$. D'autre part, nous savons que la mesure positive $|\nu|$ est invariante. La restriction de ν à l'ensemble des points transitoires est donc nulle (proposition 2.2), alors nous obtenons la décomposition cherchée.

Ceci nous montre que l'espace propre associée à la valeur propre 1 pour ${}^t P$ est de dimension k . Comme par ailleurs, c'est aussi la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 pour P , et que les fonctions $\mathbf{1}_{R_i}, i = 1, \dots, k$ sont invariantes, cela nous donne la décomposition des fonctions invariantes. ■

Lorsqu'il y a des points transitoires, la valeur des fonctions invariantes sur ces points est un peu plus compliquée à déterminer. Sans entrer dans les détails, signalons que les fonctions invariantes sont engendrées par les fonctions f_i indexées par les classes de récurrence R_i et qui valent

$$f_i(x) = \mathbf{P}(T_{R_i} < \infty \mid X_0 = x),$$

où T_{R_i} désigne le temps d'atteinte de la classe R_i , c'est à dire

$$T_{R_i} = \inf\{n \mid X_n \in R_i\}.$$

Notons également un corollaire de l'unicité de la mesure invariante.

Corollaire 2.17. *S'il n'y a qu'une seule classe de récurrence, et si μ est l'unique probabilité invariante, alors, pour toute probabilité μ_0 , la suite*

$$\mu_n = (\mu_0 + \mu_0 P + \dots + \mu_0 P^{n-1})/n$$

converge vers μ .

Démonstration. — Nous avons vu plus dans la démonstration du théorème d'existence (théorème 2.3) que toute valeur d'adhérence de la suite ν_n est invariante. Si cette mesure invariante est unique, alors la suite ν_n , suite dans un compact, n'a qu'une valeur d'adhérence possible, et donc converge vers μ . ■

Le corollaire précédent s'énonce en disant que, quelle que soit la loi de X_0 , la moyenne des lois de (X_0, \dots, X_n) converge vers la mesure μ . Plus bas, nous démontrerons à l'aide la théorie des martingales le résultat plus fort de convergence presque sûre des mesures empiriques vers la mesure μ (section 3).

Remarques

1. Si P est irréductible et f est un vecteur propre associé à une valeur propre λ différente de 1, alors, si μ est la probabilité invariante, on a

$$\int f d\mu = \int P(f) d\mu = \lambda \int f d\mu,$$

et on voit donc que $\int f d\mu = 0$. La valeur propre 1 est donc la seule associée à un vecteur propre positif.

2. De même qu'une mesure invariante est positive partout sur une classe de récurrence, on voit que si f une fonction positive invariante ($P(f) = f$) et si $f(x) = 0$ et si $x \ll y$, alors $f(y) = 0$. En particulier, s'il n'y a qu'une classe de récurrence, une fonction invariante positive non nulle sur la classe ne s'annule pas sur les points transitoires.

2.4 Cas des matrices sous-markoviennes.

Une matrice à coefficients positifs est toujours égale à une matrice sous-markovienne à un coefficient près. Pour une telle matrice, nous pouvons définir de même la notion de classe de récurrence. La seule chose qui change est qu'il est fort possible que $\{y \mid x < y\}$ soit vide. Pour faire simple, contentons nous de considérer les matrices sous-markoviennes irréductibles, c'est à dire celles pour lesquelles, pour tout couple de points $(x, y) \in E^2$, on ait $x \ll y$.

Soit alors f une solution positive ou nulle (mais non identiquement nulle) de $Pf = \lambda f$, avec $\lambda > 0$ (valeur propre donnée par le théorème de Perron-Frobenius). La démonstration du lemme 2.13 s'adapte immédiatement et montre que $f(x) > 0$ partout.

On peut alors considérer la matrice

$$Q(x, y) = \frac{1}{\lambda f(x)} P(x, y) f(y).$$

On a $Q(g) = \frac{1}{\lambda f} P(fg)$. Q est une matrice markovienne, toujours irréductible.

Nous avons $Pg = \lambda h$ si et seulement si $h = g/f$ vérifie $Qh = h$.

L'espace propre associé à λ est donc de dimension 1, et il n'y a à une constante près qu'une solution de $Q(h) = h$, donc qu'une seule solution de $P(f) = \lambda f$.

Si $m = (m(x))$ est un vecteur propre de tP , de valeur propre λ , alors $\mu = f.m$ ($\mu(x) = f(x)m(x)$) est solution de $\mu Q = \mu$: la mesure invariante de Q est donc liée à la solution de $mP = \lambda m$ par la relation $\mu = cf.m$, où c est une constante de normalisation.

Montrons qu'il n'y a qu'une seule valeur propre associée à une fonction propre positive.

Si on a $Pf' = \lambda'f'$, avec $f' \geq 0$, f' non identiquement nulle, alors, en posant $h = f'/f$ et $\rho = \lambda'/\lambda$, on voit que $Q(h) = \rho h$. Mais si μ est la mesure invariante pour Q , on a

$$\int hd\mu = \int Q(h)d\mu = \rho \int hd\mu.$$

Or $\int hd\mu > 0$, car h est positive non identiquement nulle, et μ charge tous les points. Donc $\rho = 1$.

Ce qu'on vient de voir s'applique à toutes les matrices à coefficients positifs irréductibles, qu'elles soient sous-markoviennes ou non.

Pour les matrices P sous-markoviennes (c'est à dire si, pour tout x , $\sum_y P(x, y) \leq 1$), irréductibles, on peut voir que la valeur propre de Perron-Frobenius est majorée par 1. En effet, soit f la fonction propre positive associée, et choisissons x_0 où f atteint son maximum. On a

$$0 < \lambda f(x_0) = \sum_y P(x_0, y) f(y) \leq \left(\sum_y P(x_0, y) \right) f(x_0) \leq f(x_0).$$

Un exemple important de matrice sous-markovienne est obtenue lorsqu'on restreint la matrice P à un sous-ensemble A de E . Dans ce cas, notons P_A cette matrice et supposons qu'elle soit irréductible (ce n'est pas automatique, même si P est irréductible). Soit λ_A la valeur propre de Perron-Frobenius associée. Soit (X_n) la chaîne de MARKOV associée, on suppose que $X_0 \in A$, et on appelle A_n l'événement

$$A_n = \{\omega \mid X_i \in A, \forall i \leq n\}.$$

Nous avons

Proposition 2.18. *Il existe deux constantes $0 < c < C$ telles que*

$$c\lambda_A^n \leq \mathbf{P}(A_n) \leq C\lambda_A^n.$$

Démonstration. — Soit f_A une fonction propre positive associée à λ_A (on sait qu'elle est unique à une constante près). Soit $M_n = \lambda_A^{-n} f_A(X_n) \mathbf{1}_{A_n}$. Alors M_n est une martingale. En effet $\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_A(X_0) \dots \mathbf{1}_A(X_n)$, et

$$\mathbf{E}(M_n/\mathcal{F}_{n-1}) = \lambda_A^{-n} \mathbf{1}_{A_{n-1}} P(f_A \mathbf{1}_A)(X_n).$$

Mais $\mathbf{1}_A(x)P(f\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_A(x)P_A(f)$, et donc

$$\mathbf{E}(M_n/\mathcal{F}_{n-1}) = \lambda_A^{-n} \mathbf{1}_{A_{n-1}} \lambda_A f_A(X_{n-1}) = M_{n-1}.$$

On obtient donc $\mathbf{E}(M_0) = \mathbf{E}(M_n)$, ce qui donne

$$\mathbf{E}(f_A(X_0)) = \lambda_A^{-n} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n} f_A(X_n)).$$

Il nous suffit maintenant d'encadrer f_A entre deux valeurs $0 < f_* \leq f \leq f^*$, pour obtenir

$$f_* \leq f^* \lambda_A^{-n} \mathbf{P}(A_n) \text{ et } f^* \geq f_* \lambda_A^{-n} \mathbf{P}(A_n),$$

ce qui donne l'encadrement cherché, avec $c = f_*/f^*$ et $C = f^*/f_*$. ■

Remarquons que, dans la proposition précédente, on voit que, si $T_A = \inf\{n \mid X_n \notin A\}$, alors $\mathbf{E}(s^{T_A}) < \infty$ si et seulement si $s < 1/\lambda_A$. En effet, $\mathbf{P}(T_A > n) = \mathbf{P}(A_n)$, et l'estimation précédente permet de conclure.

En fait, si on conditionne la loi de (X_0, \dots, X_n) par l'événement de probabilité positive A_k , avec $k \geq n$, et qu'on fait converger k vers ∞ , on voit que cette loi converge vers celle d'une chaîne de MARKOV de matrice de transition Q_A qui est $Q_A(f) = \frac{1}{\lambda_A f_A} P(f_A f)$.

Cette matrice markovienne est donc la loi de la chaîne de MARKOV "conditionnée à rester dans A " (Voir le problème ??).

D'autre part, cette estimation de $\mathbf{P}(A_n)$ montre que la fonction $A \mapsto \lambda_A$ est une fonction croissante de A . Une autre façon de le voir est de remarquer que, s'il existe une fonction positive non nulle f telle que $P_A(f) \leq \lambda f$, alors $\lambda \geq \lambda_A$. En effet, on se ramène comme plus haut au cas des matrices markoviennes, pour lesquelles, si f est positive et $P(f) \leq \lambda f$, alors $\lambda \geq 1$, qu'on obtient en intégrant par rapport à la probabilité invariante.

Il suffit ensuite de remarquer que, si $A \subset B$, alors $P_A(f_B) \leq \lambda_B f_B$.

On verra par ailleurs plus bas que toutes les autres valeurs propres (complexes) de la matrice P sont de module inférieur à la valeur propre de Perron Frobenius (proposition 2.28).

2.5 Périodes, chaînes apériodiques.

Dans la section précédente, nous avons vu que si la chaîne est irréductible, alors la suite $(\mu_0 + \mu_0 P + \dots + \mu_0 P^{n-1})/n$ converge vers l'unique mesure μ invariante pour P . Nous nous préoccupons dans ce chapitre de la convergence de la loi de X_n elle-même vers μ .

Dans cette section, nous nous intéresserons essentiellement aux chaînes irréductibles, c'est à dire sans points transitoires et n'ayant qu'une seule classe de récurrence, mais les notions introduites s'appliquent aux matrices markoviennes générales, ou plus exactement aux classes de récurrence des chaînes générales.

Un premier exemple élémentaire montre que le simple fait pour P d'être irréductible n'est pas suffisant. Considérons pour cela la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice d'une chaîne de MARKOV sur deux points $\{1, 2\}$. On voit que, si la chaîne associée X_0 part du point $\{1\}$, c'est à dire si la loi de X_0 est $\delta_{\{1\}}$, alors la loi de X_{2p} est $\delta_{\{1\}}$ tandis que la loi de X_{2p+1} est $\delta_{\{2\}}$, et donc la loi de X_n ne converge pas vers l'unique mesure invariante qui est dans ce cas la mesure uniforme, la matrice P étant symétrique et irréductible.

Pour traiter ce problème de convergence, nous introduisons une nouvelle notion, la période.

Définition 2.19. Soit x un point récurrent de E , et $N(x) = \{n \mid P^n(x, x) > 0\}$. La période $p(x)$ de x est le plus grand diviseur commun (PGCD) de $N(x)$.

Remarquons tout d'abord que $N(x)$ est un semigroupe pour l'addition : si n et m sont des éléments de $N(x)$, alors $n + m$ est dans $N(x)$, puisque

$$P^{n+m}(x, x) = \sum_y P^n(x, y)P^m(y, x) \geq P^n(x, x)P^m(x, x).$$

D'autre part, ce PGCD est le diviseur d'un nombre fini de points de $N(x)$ (le PGCD d'une famille croissante est décroissant, donc constant à partir d'un certain rang).

Nous noterons dans cette section $p \mid q$ si p est un diviseur de q . Si nous notons $D(x)$ l'ensemble des diviseurs de $N(x)$, alors $p(x)$ est caractérisé par

$$p(x) \in D(x) ; \forall q \in D(x), q \mid p(x).$$

La première remarque importante est la suivante :

Proposition 2.20. *Dans une classe de récurrence, tous les points ont même période.*

Démonstration. — Soient x et y deux points de E . Il suffit de démontrer que $p(x) \mid p(y)$, car alors par symétrie nous aurons l'égalité.

Grâce à la caractérisation précédente, il suffit pour cela de démontrer que $p(x)$ est un diviseur de $N(y)$. Soit alors m un élément de $N(y)$ c'est à dire que $P^m(y, y) > 0$. Maintenant, x et y étant dans la même classe de récurrence, nous avons $x \ll y$ et $y \ll x$, c'est à dire qu'il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que

$$P^{n_1}(x, y) > 0 ; P^{n_2}(y, x) > 0.$$

Alors, $n_1 + n_2$ et $n_1 + n_2 + m$ appartiennent tous les deux à $N(x)$, puisque

$$P^{n_1+n_2}(x, x) = \sum_z P^{n_1}(x, z)P^{n_2}(z, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^{n_2}(y, x) > 0,$$

et d'autre part, pour les mêmes raisons,

$$P^{n_1+m+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^m(y, y)P^{n_2}(y, x) > 0.$$

Donc, $p(x) \mid n_1 + n_2$ et $p(x) \mid n_1 + n_2 + m$, et par différence $p(x) \mid m$. ■

Grâce à la proposition précédente, nous pouvons maintenant donner la définition d'apériodicité :

Définition 2.21. *On dira qu'une classe de récurrence R est apériodique si la période d'un point quelconque de R est égale à 1. Si la chaîne est irréductible, nous dirons qu'elle est apériodique son unique classe de récurrence est apériodique.*

La proposition précédente montre alors immédiatement que

Corollaire 2.22. *Si une matrice markovienne P est irréductible et s'il existe un point x pour lequel $P(x, x) > 0$, alors elle est apériodique.*

Le corollaire précédent provient de ce que $1 \in N(x)$. La propriété fondamentale des matrices markoviennes irréductibles apériodiques est la suivante :

Proposition 2.23. *Soit P une matrice markovienne irréductible et apériodique. Alors, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, et pour tous les couples (x, y) de E^2 , on ait $P^n(x, y) > 0$.*

Démonstration. —

Nous commençons par remarquer que, sous l'hypothèse d'apériodicité, il y a pour tout point x de E deux entiers consécutifs $n(x)$ et $n(x) + 1$ dans $N(x)$.

En effet, considérons des entiers n_1, \dots, n_k dans $N(x)$ dont le PGCD soit égal à 1. Alors, le théorème de Bezout affirme qu'il existe k entiers relatifs q_1, \dots, q_k tels que

$$\sum_i q_i n_i = 1.$$

En écrivant $q_i^+ = \sup(q_i, 0)$ et $q_i^- = \sup(-q_i, 0)$, nous avons

$$\sum_i q_i^+ n_i = 1 + \sum_i q_i^- n_i,$$

et on peut donc choisir $n = \sum_i q_i^- n_i$. (Rappelons que $N(x)$ est un semigroupe pour l'addition, et donc que la somme d'éléments de $N(x)$ est un élément de $N(x)$.)

Remarquons alors que, si $n \geq n(x)^2 - 1$, alors $n \in N(x)$. En effet, nous pouvons alors écrire la division euclidienne de n par $n(x)$, $n = pn(x) + r$, avec $r \leq n(x) - 1$. Dans ce cas, $p \geq r$ sinon $n < r(n(x) + 1) \leq n^2(x) - 1$. Nous pouvons alors écrire $p = r + q$, et donc $n = qn(x) + r(n(x) + 1)$, ce qui montre que $n \in N(x)$.

Nous avons donc mis en évidence pour tout $x \in E$ un entier que nous noterons $n_1(x)$ tel que, pour tout $n \geq n_1(x)$, alors $n \in N(x)$.

Choisissons maintenant pour tout couple (x, y) un entier $n(x, y)$ tel que $P^{n(x, y)} > 0$, ce qui est possible puisque la chaîne est récurrente irréductible. Appelons $M = \max\{n_1(x) + n(x, y), (x, y) \in E \times E\}$. Alors, pour $n \geq M$, $P^n(x, y) > 0$.

En effet, pour tout couple (x, y) on a $n = n(x, y) + p$, avec $p \geq n_1(x)$, et donc

$$P^n(x, y) \geq P^{n(x, y)} P^p(x, x) > 0,$$

par définition de $n_1(x)$. ■

Avant de donner le résultat de convergence en loi de (X_n) vers μ , il nous reste à établir un lemme important. Rappelons que, si une matrice markovienne est irréductible et que μ désigne son unique mesure invariante, alors $\mu(x) > 0$, pour tous les points $x \in E$. Rappelons aussi que, si ν est une probabilité sur E , alors $(d\nu/d\mu)(x)$ désigne la densité $\nu(x)/\mu(x)$ de ν par rapport à μ .

Lemme 2.24. *Soit P une matrice markovienne irréductible et soit μ son unique probabilité invariante. Pour toute mesure de probabilité ν , notons*

$$\sigma(\nu) = \int_E ((d\nu/d\mu)(x) - 1)^2 d\mu(x).$$

Alors,

$$\sigma(\nu P) \leq \sigma(\nu).$$

De plus, s'il existe un $y \in E$ tel que, $\forall x \in E$, $P(x, y) > 0$, alors

$$\sigma(\nu P) = \sigma(\nu) \implies \nu = \mu.$$

Démonstration. — Tout d'abord, rappelons que, si Q désigne la matrice adjointe de P , c'est à dire $Q(x, y) = \mu(y)P(y, x)/\mu(x)$, alors Q est markovienne, de mesure invariante μ et $d(\nu P)/d\mu = Q(d\nu/d\mu)$ (cf 2.5). Appelons alors $f(x)$ la densité $\nu(x)/\mu(x)$. Nous avons

$$\sigma(\nu P) = \int_E (Q(f) - 1)^2 d\mu; \quad \sigma(\nu) = \int_E (f - 1)^2 d\mu.$$

Mais, Q étant markovienne, alors, pour tout x ,

$$(2.4) \quad (Qf - 1)^2(x) = (Q(f - 1))^2 \leq Q((f - 1)^2),$$

puisque pour toute matrice markovienne Q et toute fonction h , on a en tout point x $Q(h^2)(x) \leq Q(h^2)(x)$. (C'est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ $\mathbf{E}(X)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)$ appliquée avec la probabilité $q_x(y) = Q(x, y)$.) et il n'y a égalité dans cette équation (pour un point x) que si $f - 1$ est constante presque partout pour la mesure $q_x(y)$.

D'autre part, μ étant une mesure invariante pour Q , nous savons que

$$\int Q(f - 1)^2 d\mu = \int (f - 1)^2 d\mu.$$

L'inégalité du lemme s'ensuit immédiatement.

De plus, s'il y a égalité, alors $(Q(f - 1))^2$ et $Q(f - 1)^2$ ayant même intégrale sont égales partout (rappelons que la seconde est plus grande que la première), et donc il y a égalité partout dans 2.4. Puisqu'il existe un point x pour lequel la mesure $q_x(y) = Q(x, y)$ est non nulle partout, la fonction $f - 1$ est constante, et par suite est nulle puisque f est une densité de loi de probabilité. Cette condition est réalisée dès que P a une de ses colonnes qui ne s'annule pas (puisque les 0 des colonnes de P s'échangent avec les 0 des lignes de Q). ■

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat fondamental de cette section :

Théorème 2.25. *Soit P une matrice markovienne irréductible. Alors, il y a équivalence entre*

1. *Pour toute probabilité initiale μ_0 , la suite $\mu_0 P^n$ converge vers la probabilité invariante μ .*
2. *La matrice P est apériodique.*

Rappelons que, si X_n est une chaîne de MARKOV homogène de matrice P , et si μ_0 est la loi de X_0 , alors $\mu_0 P^n$ est la loi de X_n . Par ailleurs, s'il y a irréductibilité, la mesure invariante est unique et donc $\frac{1}{n+1}(\mu_0 + \dots + \mu_0 P^n)$ converge vers μ (corollaire 2.17). Puisque la convergence ordinaire implique la convergence des moyennes de CÉSARO, on voit que la seule limite possible de la suite $\mu_0 P^n$ est la mesure invariante μ .

Démonstration. — Commençons par remarquer que la condition d'apériodicité est nécessaire. En effet, si T est la période et que $T > 1$, et si μ_0 est la masse de Dirac en un point x , alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_{kT+1} = x) = 0$, et donc $\mu_0 P^{kT+1}(x) = 0$, alors que $\mu(x) > 0$. Il n'y a donc pas convergence vers $\mu(x)$. Rappelons qu'il y a convergence des moyennes de Césaro vers $\mu(x)$, et donc la seule limite possible de la suite est μ . La suite $\mu_0 P^n(x)$ ne converge pas.

Pour démontrer l'inverse, choisissons une probabilité μ_0 et appelons μ la probabilité invariante. Appelons μ_n la suite $\mu_n = \mu_0 P^n$, et σ_n la quantité $\sigma(\mu_n)$ définie dans le lemme 2.24. Alors, ce lemme nous dit que la suite $\sigma_n = \sigma(\mu_n) = \sigma(\mu_{n-1}P)$ est décroissante. Appelons σ sa limite.

Pour montrer la convergence de μ_n vers μ , il suffit de montrer que toute sous-suite convergente admet μ comme limite. (N'oublions pas que l'ensemble des lois de probabilité sur un ensemble fini est compact). Soit alors μ_{n_k} une sous-suite de limite ν . La quantité $\sigma(\nu)$ étant clairement une fonction continue de ν , nous voyons que $\sigma(\nu) = \lim_k \sigma(\mu_{n_k}) = \sigma$. Mais, de la même manière, pour tout m fixé dans \mathbb{N} , $\sigma(\nu P^m) = \lim \sigma(\mu_{n_k+m}) = \sigma$.

Nous voyons donc que $\sigma(\nu P^m) = \sigma(\nu)$, et ceci pour tout m . Mais nous savons aussi d'après la proposition 2.23 qu'il existe un entier m tel que P^m ait tous ses coefficients positifs. Comme par ailleurs P^m admet μ comme unique probabilité invariante, nous sommes dans le cas d'égalité du lemme 2.24, nous en déduisons que $\nu = \mu$ (et qu'en fait $\sigma = 0$).

■

Remarquons que ce résultat revient à dire que toutes les lignes de la matrice P^n convergent vers μ .

Corollaire 2.26. *Si une matrice P est irréductible apériodique, et si μ désigne l'unique mesure invariante, alors, pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $P^n(f)$ converge vers $\int f d\mu$ lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Démonstration. — cela revient à dire que, pour toutes les mesures δ_x

$$\langle \delta_x, P^n f \rangle \rightarrow \langle \mu, f \rangle.$$

Mais $\langle \delta_x, P^n(f) \rangle = \langle \delta_x P^n, f \rangle$, et on applique le théorème 2.25. ■

Enfin, nous cloturons ce chapitre par une caractérisation des valeurs propres de module 1 de la matrice P en termes de la période de P .

Théorème 2.27. *Soit P une matrice markovienne irréductible. Alors, toutes les valeurs propres de P sont des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Les valeurs propres de module 1 sont exactement les nombres de la forme $\exp(2i\pi k/T)$, où T est la période, et $k = 0, \dots, T-1$. En particulier, la chaîne est apériodique si, et seulement si, 1 est la seule valeur propre de module 1.*

Démonstration. — Commençons par montrer que toutes les valeurs propres ont un module égal à 1 au maximum.

Tout d'abord, remarquons que si M est une matrice markovienne et f une fonction définie sur E à valeurs complexe,

$$(M(|f|^2) - fM(\bar{f}) - \bar{f}M(f) + |f|^2)(x) = \sum_y M(x, y)|f(y) - f(x)|^2 \geq 0,$$

et par conséquent, si μ est une mesure invariante pour M , alors

$$2 \int |f|^2 d\mu \geq \int fM(\bar{f}) + \bar{f}M(f) d\mu.$$

Maintenant, considérons une matrice markovienne P irréductible, sa mesure invariante μ et sa matrice adjointe Q définie par

$$Q(x, y) = \mu(y)P(y, x)/\mu(x).$$

La mesure μ est invariante pour la matrice markovienne $M = QP$, et, si f est un vecteur propre (complexe) de P de valeur propre complexe λ , nous avons

$$\int fM(\bar{f}) d\mu = \int \bar{f}M(f) d\mu = \int P(f)P(\bar{f}) d\mu = |\lambda|^2 \int |f|^2 d\mu.$$

On en déduit donc que

$$\int |f|^2 d\mu \geq |\lambda|^2 \int |f|^2 d\mu,$$

d'où le résultat, si l'on se souvient que pour tout x , $\mu(x) > 0$, et donc qu'une fonction f non nulle est telle que $\int |f|^2 d\mu > 0$.

Remarquons également que, si $\lambda = \exp(i\theta)$ est une valeur propre de module 1, et si f est un vecteur propre, alors $P^n(f) = \exp(in\theta)f$, et donc ne peut converger que si $\lambda = 1$. Cela montre qu'une matrice markovienne irréductible apériodique n'a pas d'autres valeurs propres de module 1 autres que 1.

Il en va de même si la matrice n'a pas de point transitoires, et que toutes les classes de récurrence sont apériodiques. Il suffit pour cela de restreindre une fonction propre aux classes de récurrence, et c'est encore une fonction propre de la matrice restreinte.

Considérons maintenant une matrice P irréductible de période $T > 1$. Choisissons un point x de E , et, pour $i = 0, \dots, T-1$, appelons R_i la classe suivante

$$R_i = \{y \in E \mid \exists k \in \mathbb{N}, P^{kT+i}(x, y) > 0\}.$$

T étant la période, il n'est pas difficile de voir qu'on peut également décrire R_i comme

$$R_i = \{y \in E \mid \exists k \in \mathbb{N}, P^{kT-i}(y, x) > 0\}.$$

La matrice P étant irréductible, elles recouvrent l'ensemble E . On voit aisément que les classes R_i sont disjointes : elles forment une partition de E et ce sont exactement les classes de récurrence de P^T . De plus, par définition même de la période de P , on voit également que ces classes sont apériodiques pour la matrice markovienne P^T .

La matrice P^T n'a donc pas de points transitoires et toutes ses classes de récurrence sont apériodiques. Elle n'a donc pas de valeurs propres de module 1 autre que 1, et, si λ est valeur propre de T , λ^T est valeur propre de P^T , donc $\lambda^T = 1$. On voit donc ainsi que les seules valeurs propres de module 1 de P sont de la forme $\exp(2i\pi k/T)$.

Réciproquement, on voit directement sur la définition de R_i que $P(\mathbf{1}_{R_i}) = \mathbf{1}_{R_{i-1}}$, $P(\mathbf{1}_{R_0}) = \mathbf{1}_{R_{T-1}}$, (on ne peut passer que de R_i à R_{i+1} par une transition de la chaîne) et donc que la fonction

$$f_k = \sum_{q=0}^{T-1} \exp(2iqk\pi/T) \mathbf{1}_{R_q}$$

est un vecteur propre de P de valeur propre $\exp(2ik\pi/T)$. C'est ce que nous voulions démontrer. ■

Enfin, considérons le cas des matrices à coefficients positifs générales. On a

Proposition 2.28. *Soit P une matrice irréductible à coefficients positifs. Soit $\lambda > 0$ pour lequel il existe une fonction propre f positive ($Pf = \lambda f$). Alors, toutes les autres valeurs propres μ de P sont telles que $|\mu| \leq \lambda$. En particulier, λ est unique, et c'est une valeur propre simple.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu que λ est une valeur propre simple, et aussi que dans ces conditions, la fonction f est strictement positive partout. On considère alors la matrice markovienne donnée par $Q(h) = \frac{1}{\lambda f} P(hf)$. Puisque c'est une matrice markovienne, toutes ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1 (et même strictement inférieur pour peu que la matrice soit apériodique). Alors, si g est un vecteur propre de P , de valeur propre μ , (éventuellement complexe), on sait que g/f est un vecteur propre de Q , de valeur propre μ/λ . D'où le résultat. ■

Remarque. — Il y a bien sûr d'autres méthodes pour démontrer la convergence de la loi de X_n vers la mesure stationnaire. La plus célèbre utilise des arguments de couplage, et permet de donner dans les bons cas des convergences exponentielles vers la mesure invariante (voir le chapitre ??).

2.6 Une représentation explicite de la mesure invariante.

Nous concluons ce chapitre sur les chaînes de MARKOV finies par une formule générale donnant une formulation explicite de la mesure invariante dans le cas irréductible. Cette formule est dans la pratique presque inutilisable, mais elle montre par exemple que la mesure invariante en un point x quelconque est une fonction homographique de chaque coefficient de la matrice.

Définition 2.29. *Un graphe est une partie G de $E \times E$. Si G est un graphe, on note $x \rightarrow y$ si $(x, y) \in G$. On note $x \rightsquigarrow y$ s'il existe une suite de points $x \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow y$.*

Un x -graphe est un graphe ayant les propriétés suivantes :

1. $\forall y \neq x, \exists! z, y \rightarrow z$.

2. Il n'y a aucun $y \in E$ pour lequel $y \rightsquigarrow y$.

Le lecteur aura intérêt à faire un dessin et à considérer un x -graphe comme un réseau de rivières qui se jettent vers le point x . En particulier, pour un x -graphe, il n'y a aucun $z \in E$ tel que $x \rightarrow z$. (Utiliser le fait que E est fini.) On note $\mathcal{G}(x)$ l'ensemble des x -graphes. Si $g \in \mathcal{G}(x)$, on note $\lambda(g) = \prod_{(y,z) \in g} P(y, z)$. On a alors

Proposition 2.30. *La fonction $\nu(x) = \sum_{g \in \mathcal{G}(x)} \lambda(g)$ satisfait $\nu P = \nu$.*

Si la matrice P est irréductible, alors $\nu(x) > 0, \forall x \in E$. En particulier, si P est irréductible, l'unique mesure invariante s'écrit

$$\mu(x) = \frac{\nu(x)}{\sum_{y \in E} \nu(y)}.$$

Démonstration. — Nous allons tout d'abord démontrer ce résultat dans le cas où, pour tout $x \in E$, $P(x, x) = 0$.

Remarquons qu'il y a toujours au moins un x -graphe : $g = \{(y, x), y \neq x\}$. Il est moins évident de voir que $\nu(x) > 0$, pour une chaîne irréductible.

Pour cela, nous construisons un x -graphe de la façon suivante. Prenons un point $y \neq x$ et un chemin $y = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$, où l'on peut choisir les points tous distincts. Tous les couples (x_i, x_{i+1}) sont dans g . Choisissons maintenant un autre point y' , qui n'est pas dans la liste $E_1 = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, et un autre chemin $y' = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_k = x$, de points tous distincts, et on regarde le premier indice p tel que $x'_p \in E_1$. On rajoute à g tous les couples (x'_i, x'_{i+1}) , avec $i \leq p-1$. On pose $E_2 = E_1 \cup \{x'_0, \dots, x'_{p-1}\}$. On recommence ainsi tant qu'il reste des points dans l'espace. On construit ainsi un x -graphe pour lequel $\lambda(g) > 0$.

Nous voulons maintenant montrer que

$$\sum_x \nu(x) P(x, y) = \nu(y).$$

Pour cela, nous allons construire, pour $y \neq x$ une application $\Phi : \mathcal{G}(x) \mapsto \mathcal{G}(y)$ de la façon suivante. On rajoute dans $g \in \mathcal{G}(x)$ l'arête (x, y) . D'autre part, il existe un unique $z(y)$ tel que $(y, z) \in g$. On enlève cette arête à g . Il est facile de voir qu'on a ainsi construit un y -graphe. On a

$$\lambda(g) P(x, y) = P(y, z(y)) \lambda(\Phi(g)).$$

Quelle est l'image de Φ ? C'est l'ensemble des y -graphes tels que $x \rightarrow y$. En effet, si g_1 est un y -graphe tel que $x \rightarrow y$, et si z est tel que $z \rightsquigarrow x$ (dans g') ou bien si $z = x$, alors en enlevant à g' l'arête (x, y) et en lui rajoutant l'arête (y, z) , nous fabriquons un x -graphe g tel que $\Phi(g) = g'$. Dans cet x -graphe, le point $z(y)$ (le successeur de y , est n'importe lequel des antécédents de x dans le y -graphe g' (y compris x -lui-même).

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \sum_{x \neq y} \nu(x)P(x, y) &= \sum_x \sum_{g \in \mathcal{G}(x)} \lambda(g)P(x, y) = \sum_x \sum_{g \in \mathcal{G}(x)} \lambda(\Phi(g))P(y, z(y)) \\ &= \sum_{g' \in \mathcal{G}(y)} \sum_{x \rightarrow y} \sum_{\{z \rightsquigarrow x\} \cup \{x\}} \lambda(g')P(y, z) \\ &= \sum_{g' \in \mathcal{G}(y)} \lambda(g') \sum_{z \neq y} P(y, z) = \nu(y)(1 - P(y, y)). \end{aligned}$$

Il suffit d'ajouter $\nu(y)P(y, y)$ aux deux membres pour obtenir le résultat. \blacksquare

3 Théorème ergodique et théorème de la limite centrale.

Dans cette section, nous présentons les résultats de convergence presque sûre (théorème ergodique) et de convergence en loi (théorème central limite) pour les chaînes de MARKOV. Ce sont les conséquences immédiates des résultats équivalents pour les martingales (propositions 12.3 et 12.10).

Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.1. *Soit P une matrice markovienne irréductible de mesure invariante μ . Soit f une fonction de moyenne nulle pour μ . Il existe une unique fonction g de moyenne nulle pour μ , telle que $(P - I)g = f$. De plus, si (X_n) est une chaîne de MARKOV de matrice P , et f est une fonction de moyenne nulle pour μ , la suite*

$$M_n = g(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$$

est une martingale pour la filtration naturelle $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ de la suite (X_n) .

Démonstration. — Puisque la matrice P est irréductible, les seules fonctions telles que $P(f) = f$ sont constantes. D'autre part, si F_0 désigne l'espace vectoriel (de dimension finie) des fonctions définies sur E et de moyenne nulle pour μ , alors l'opérateur linéaire P envoie F_0 dans lui-même (car μ est invariante par définition). Finalement, nous voyons que 1 n'est pas valeur propre de P sur F_0 , puisqu'une fonction invariante par P est constante et donc nulle. $P - I$ est donc inversible sur F_0 .

Si f est de moyenne nulle, il existe donc une (unique) fonction g de moyenne nulle telle que $(P - I)g = f$.

La suite de variables aléatoires $M_n = g(X_n) - f(X_0) - \dots - f(X_{n-1})$ est une martingale, pour la filtration naturelle \mathcal{F}_n associée à (X_n) . En effet,

$$\mathbf{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = P(g)(X_n) - f(X_0) - \dots - f(X_n) = M_n,$$

puisque $P(g) = g + f$.

■

Nous commençons par le théorème ergodique.

Proposition 3.2. *Soit (X_n) une chaîne de MARKOV définie sur un espace fini E , homogène, irréductible. Soit μ son unique probabilité invariante. Alors, quelle que soit la loi de X_0 , et quelle que soit la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{n+1} (f(X_0) + \dots + f(X_n))$$

converge presque sûrement vers $\int_E f(x) \mu(dx)$.

Ceci s'énonce encore sous la forme : si $\nu(\omega, dx)$ désigne la mesure empirique $(\delta_{X_0} + \dots + \delta_{X_{n-1}})/n$, alors cette mesure converge presque sûrement vers la mesure invariante μ .

Démonstration. — Nous nous ramenons au cas où $\int f d\mu = 0$. Soit P la matrice de transition de la chaîne X_n , que nous identifions comme d'habitude à l'opérateur linéaire agissant sur les fonctions $P(f)(x) = \mathbf{E}[f(X_1) \mid X_0 = x]$, et considérons la fonction g de moyenne nulle telle que $(P - I)(g) = f$, donnée par le lemme 3.1. Considérons alors la martingale

$$M_n = -g(X_n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k),$$

et posons $\Delta_n = M_{n+1} - M_n$ et $\Sigma_n = \mathbf{E}(\Delta_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1})$, et $\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \Sigma_k$. Nous voyons que

$$\Delta_n = f(X_{n-1}) + g(X_{n-1}) - g(X_n),$$

et, en développant Δ_n^2 , que $\Sigma_n = K(X_{n-1})$, avec

$$K = (f + g)^2 - 2(f + g)P(g) + P(g^2) = P(g^2) - P(g)^2.$$

On peut alors appliquer la proposition 12.5 pour obtenir la convergence vers 0 de M_n/n , et par suite de $(f(X_1) + \cdots + f(X_n))/n$.

La formulation en terme de mesure empirique provient de l'application de ce résultat à l'ensemble des fonctions $\mathbf{1}_x$. ■

Enfin, la même méthode nous donne le résultat de convergence en loi des chaînes de MARKOV .

Proposition 3.3. *Soit (X_n) une chaîne de MARKOV irréductible sur l'ensemble fini E , de matrice de transition P , de mesure invariante μ . Soit f une fonction d'intégrale nulle pour la mesure invariante et g la fonction donnée de moyenne nulle pour μ donnée par le lemme 3.1. Si*

$$\sigma^2 = \int g^2 - P(g)^2 d\mu > 0,$$

alors la suite $[f(X_0) + \cdots + f(X_{n-1})]/\sqrt{n}$ converge en loi vers une loi gaussienne $N(0, \sigma^2)$.

Démonstration. — Reprenons la martingale

$$M_n = -g(X_n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$$

introduite dans la démonstration du théorème 3.2. Nous avons vu que son crochet $\langle M \rangle_n$ vaut $\sum_0^{n-1} K(X_p)$, où $K(x) = P(g^2) - P(g)^2$. Nous voyons d'abord que le théorème ergodique 3.2 pour voir que $\langle M \rangle_n/n$ converge presque sûrement vers $\int K(x) d\mu(x) = \sigma^2$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème central limite pour les martingales 12.10 pour obtenir la convergence en loi de M_n/\sqrt{n} vers une gaussienne $N(0, \sigma^2)$. Ensuite, il ne reste plus à remarquer que les quantités M_n/\sqrt{n} et $(f(X_0) + \cdots + f(X_{n-1}))/\sqrt{n}$ ne diffèrent que par une quantité qui converge

vers 0, uniformément (mais la convergence en probabilité serait suffisante ici), pour obtenir le résultat. ■

Remarque. — Dans le théorème précédent, il ne faut pas croire qu'on a automatiquement $\sigma^2 > 0$ dès que g est non constante. Par exemple, si la chaîne est périodique de période T , et si R_1, \dots, R_{T-1} sont les classes de récurrence successives de P^T , alors la fonction $g = \mathbf{1}_{R_1} - \mathbf{1}_{R_2}$ est d'intégrale nulle pour la mesure invariante, et vérifie $P(g^2) = P(g)^2$, sans être constante. Par contre, on peut montrer que si Q est la matrice adjointe de P et si QP est irréductible, alors

$$\{P(g^2) = P(g)^2\} \implies g = \text{cste.}$$

(Indication : montrer d'abord que $P(fg) = P(f)P(g)$ pour toute fonction f , puis utiliser la mesure invariante pour en déduire que $QP(g) = g$.)

4 Application : les algorithmes de Monte Carlo par chaînes de MARKOV .

Les algorithmes de Monte Carlo permettent de donner une valeur approchée de $\int f(x)\mu(dx)$ en simulant une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes de loi μ , en remplaçant le calcul de l'intégrale par $\frac{1}{n}(f(X_1) + \dots + f(X_n))$.

Dans la pratique, il n'est pas toujours aisé de simuler de telles variables, surtout dans des ensembles de grande taille, et il est souvent bien plus commode de simuler une chaîne de MARKOV dont la mesure stationnaire est μ . Si cette chaîne est irréductible, on utilise alors le théorème ergodique au lieu de la loi des grands nombres.

Le principe général est le suivant. On cherche à construire une chaîne de MARKOV qui admette μ comme mesure réversible, c'est à dire dont la matrice $q(x, y)$ satisfasse à $\mu(x)q(x, y) = \mu(y)q(y, x)$. Dans ce qui suit, on suppose que $\mu(x) > 0, \forall x \in E$.

Pour cela, le plus simple est de disposer d'une fonction symétrique positive $k(x, y)$ et de poser pour $x \neq y$

$$q(x, y) = \frac{k(x, y)}{\mu(x)},$$

et $q(x, x) = 1 - \sum_{y \neq x} q(x, y)$.

Encore faut-il être sûr que la dernière quantité est positive.

Une façon de s'en assurer est de choisir une matrice markovienne $(p(x, y))$, irréductible et de poser

$$k(x, y) = \mu(x)p(x, y) \wedge \mu(y)p(y, x), \quad (x \neq y).$$

Dans ce cas, $q(x, y) \leq p(x, y)$ et

$$\sum_{y \neq x} q(x, y) \leq 1.$$

L'autre avantage de cette situation est que dans ce cas

$$q(x, y) = p(x, y) \wedge \frac{\mu(y)}{\mu(x)}p(y, x),$$

et que la valeur de $q(x, y)$ ne dépend que du rapport

$$\frac{\mu(y)}{\mu(x)},$$

qui peut être infiniment plus simple à calculer que $\mu(x)$ elle même.

La chaîne de MARKOV (X_n) associée peut se décrire ainsi. Lorsque $X_n = x$, on simule une variable Y_n de loi $p(x, y)$. Lorsque $Y_n = y$, on pose $p = \frac{\mu(y)p(y, x)}{\mu(x)p(x, y)} \wedge 1$. Ensuite, on tire une variable de Bernoulli Z_n prenant la valeur 1 avec probabilité p . (Par exemple en tirant une variable uniforme U_n sur $[0, 1]$ et en posant $Z_n = \mathbf{1}_{U_n \leq 1-p}$.) Si $Z_n = 1$, on pose $X_{n+1} = Y_n = y$, sinon, on pose $X_{n+1} = X_n = x$. On vérifie immédiatement que ceci est une chaîne de MARKOV ayant la bonne matrice de transition. C'est l'algorithme de HASTINGS.

Le choix de la matrice $(p(x, y))$ dépend de la structure du problème.

Lorsqu'on choisit $p(x, y) = p(y, x)$, alors

$$q(x, y) = \left(\frac{\mu(y)}{\mu(x)} \wedge 1\right)p(x, y),$$

et ceci correspond à l'algorithme de METROPOLIS.

Lorsque qu'on a une structure de voisinage (c'est à dire une structure de graphe), on note $x \sim y$ pour indiquer que x est voisin de y . Si le graphe est

connexe, on peut choisir $p(x, y) = 1/N(x)$ pour $x \sim y$, et $p(x, y) = 0$ sinon, où $N(x)$ désigne le nombre de voisins de x (cela correspond à la marche aléatoire qui va au plus proche voisin avec égale probabilité), alors on obtient

$$\begin{cases} q(x, y) &= \frac{1}{N(x)} \wedge \frac{\mu(y)}{\mu(x)N(y)}, & (x \sim y), \\ q(x, x) &= 1 - \sum_{x \sim y} q(x, y), \\ q(x, y) &= 0, & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

L'avantage de cette technique est qu'on n'a besoin que de connaître les rapports $\mu(y)/\mu(x)$ pour $x \sim y$ pour déterminer la matrice $(q(x, y))$.

Ceci est particulièrement utilisé lorsque qu'on a affaire à une mesure sur un espace produit de la forme $\hat{E} = E^N$, où N est grand. Dans ce cas, la loi μ est la loi d'un N -uplet (U_1, \dots, U_N) . L'idée est qu'il est en général simple de simuler la loi d'un des facteurs (c'est à dire la loi d'une variable à valeurs dans E), alors que le problème croît exponentiellement en complexité avec N . Lorsque les composantes U_i sont indépendantes, il suffit de simuler séparément chaque U_i de façon indépendantes, et le problème est simple. On utilise en fait un algorithme un peu différent, l'échantillonneur de GIBBS lorsque ce sont les lois conditionnelles de U_i sachant $(U_j, j \neq i)$ qui sont simples à calculer (et à simuler). Si, pour deux points $x = (x_i)$ et $y = (y_j)$ de E^N , on note $x \underset{i}{\sim} y$ lorsque $x_j = y_j, j \neq i$, alors on peut poser, pour $x \neq y$,

$$q(x, y) \begin{cases} = \frac{1}{N} \frac{\mu(y)}{\sum_{z \underset{i}{\sim} x} \mu(z)} & y \underset{i}{\sim} x \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Dans cette définition, on a compté $x \underset{i}{\sim} x$.) En effet, dans ce cas, le rapport

$$\frac{\mu(y)}{\sum_{z \underset{i}{\sim} x} \mu(z)}$$

représente la loi conditionnelle $\mathbf{P}(U_i = y_i / (U_k = x_k, k \neq i))$. On vérifie immédiatement la propriété $\mu(x)q(x, y) = \mu(y)q(y, x)$.

Cet algorithme s'appelle l'échantillonneur de Gibbs. Cela revient à la procédure suivante. Lorsque $X_n = (x_i^n)$, on choisit au hasard le site i , puis on tire x_i^{n+1} selon la loi conditionnelle de $\mathcal{L}(U_i / U_j = x_j^n, j \neq i)$, sans changer les coordonnées de X_n différentes de i .

Un exemple où l'on peut aisément voir la pertinence de cette méthode est donnée par le modèle d'Ising. C'est un modèle issu du ferromagnétisme : on

suppose qu'on dispose d'un cristal métallique, et les atomes sont situés aux points d'un réseau, soit par exemple $\Lambda = [-N, N]^d \subset \mathbb{Z}^d$, avec $d = 2$ ou $d = 3$. On dit que deux sites i et j sont voisins si $|i - j| = 1$, et on note $i \sim j$. En chaque site i de Λ , un atome produit un champ magnétique (spin) ω_i , et on suppose qu'il ne prend que deux valeurs possible $+1$ et -1 (haut et bas). Une configuration est la donnée de tous les spins du cristal, c'est à dire un élément $(\omega_i) \in \{-1, 1\}^\Lambda$. Chaque configuration possède une énergie de la forme

$$H(\omega) = -\beta \sum_{i \sim j} \omega_i \omega_j - h \sum_i \omega_i.$$

(β représente une constante d'interaction, positive dans le cas du ferromagnétisme, et h l'influence d'un champ extérieur.)

Dans la théorie classique de Gibbs, la probabilité de trouver une configuration ω est proportionnelle à $\exp(-H(\omega)/T)$, où T est la température. L'énergie d'une configuration donnée est assez facile à calculer, mais le calcul de la constante de normalisation suppose de faire la somme de $2^{(2N+1)^d}$ termes. Même pour des petites valeurs de N , ($N = 10^5$ par exemple, qui est très loin des valeurs raisonnables qui sont de l'ordre du nombre d'Avogadro), et pour $d = 3$, il est impensable de faire ce calcul sur ordinateur.

Par contre, les lois conditionnelles ici sont très faciles à calculer, car la loi de ω_i sachant $(\omega_j, j \neq i)$ ne dépend que de $(\omega_j, j \sim i)$, et ne nécessite que de faire la somme de 2 termes. Ainsi, si on appelle $P_{i,\omega}$ cette loi, on a par exemple

$$P_{i,\omega}(\omega_i = 1) = \frac{\exp(h/T + \beta/T \sum_{j \sim i} \omega_j)}{\exp(h/T + \beta/T \sum_{j \sim i} \omega_j) + \exp(-h/T - \beta/T \sum_{j \sim i} \omega_j)}.$$

L'algorithme décrit plus haut permet de calculer par simulation la valeur d'expressions du type

$$m(\beta, T, h) = \mathbf{E}(\omega_0),$$

où ω_0 désigne la valeur du spin au centre de Λ , qui ne possède pas d'expressions aisément calculable.

5 Chaînes de MARKOV images.

En général, l'image d'une chaîne de MARKOV sur un ensemble E par une application $f : E \mapsto F$ n'est pas une chaîne de MARKOV, à moins que f

ne soit injective. Mais il existe cependant des situations où c'est le cas. Pour simplifier l'écriture, nous nous restreignons dans ce qui suit au cas des chaînes sur les ensembles finis, mais l'extension au cas dénombrable ou même au cas général ne pose aucun problème.

Une fonction $f : E \mapsto F$ non injective est entièrement décrite par la partition $\{A_y = f^{-1}(y), y \in F\}$. Nous avons alors un premier critère.

Proposition 5.1. (Critère de DYNKIN.) *Notons $P(x, A) = \sum_{y \in A} P(x, y)$. Si, pour tout couple $y \in F$, la fonction $P(x, A_y)$ est constante sur chaque ensemble $A_{y'}$, $y' \in F$, alors $Y_n = f(X_n)$ est une chaîne de MARKOV. De plus, si on note $Q(y', y)$ la valeur de $P(x, A_y)$ sur l'ensemble $A_{y'}$, alors Y_n est une chaîne de MARKOV de matrice Q , quelle que soit la loi initiale de la chaîne X .*

Dans ce cas, l'image par f d'une probabilité invariante pour X_n est une probabilité invariante pour Y_n .

Démonstration. — Une fonction $h : E \mapsto \mathbb{R}$ s'écrit $h = k \circ f$, où $k : F \mapsto \mathbb{R}$ si et seulement si $h(x) = \sum_{y \in F} k(y) \mathbf{1}_{A_y}$.

Par ailleurs, l'hypothèse nous dit que, si $h = \sum_y k(y) \mathbf{1}_{A_y}$, alors $P(f) = \sum_y Q(y', y) k(y) \mathbf{1}_{A_{y'}}$.

En d'autres termes,

$$P(k \circ f) = Q(k) \circ f.$$

Alors, si \mathcal{F}_n est la tribu $\sigma(X_0, \dots, X_n)$,

$$\mathbf{E}(k(Y_{n+1})/\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(k \circ f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n) = P(k \circ f)(X_n) = Q(k) \circ f(X_n) = Q(k)(Y_n).$$

Ceci montre que (Y_n) est une chaîne de MARKOV de matrice Q . ■

Remarque. — En fait, comme nous l'avons vu dans la preuve, la condition se ramène à écrire que, pour toute fonction $k : F \mapsto \mathbb{R}$ $P(k \circ f) = K \circ f$, et alors l'application linéaire $k \mapsto K$ s'écrit $K = Q(k)$, où Q est le noyau de la chaîne (Y_n) .

On a un critère plus subtil (et plus difficile à démontrer), mais qui ne donne des chaînes de MARKOV que lorsque la chaîne (X_n) a une mesure initiale particulière.

Proposition 5.2. (Critère de PITMAN-ROGERS.) *Supposons qu'on ait des mesures μ_y sur E , portées par A_y , et telles que, pour tout $y \in F$,*

$$(5.5) \quad \mu_y P = \sum_{y' \in F} Q(y, y') \mu_{y'}.$$

Alors, si X_0 a une loi initiale de la forme $\sum_y \theta_y \mu_y$, la suite $Y_n = f(X_n)$ est une chaîne de MARKOV de matrice Q .

Lorsque la matrice P est irréductible, les seules mesures μ_y satisfaisant éventuellement aux hypothèses sont les restrictions de la mesure invariante de P aux ensembles A_y , normalisées pour en faire des probabilités.

Remarque. — Ce critère est en quelque sorte un critère dual du précédent, qui s'écrivait

$$(5.6) \quad P\mathbf{1}_{A_y} = \sum_{y'} Q^*(y, y')\mathbf{1}_{A_{y'}},$$

où Q^* désigne la matrice transposée de Q .

Démonstration. — Commençons par remarquer que la condition s'écrit $MP = QM$, où $M(y, x) = \mu_y(x)$, et où $MP(y, x) = \sum_z M(y, z)P(z, x)$. On a donc $MP^n = Q^n M$.

Remarquons que, les mesures μ_y étant portées par les ensembles $A_y = f^{-1}(y)$, si X est une variable à valeurs dans E , la loi de X est de la forme $\sum_y \theta_y \mu_y$ si et seulement si la loi conditionnelles $\mathcal{L}(X/f(X) = y)$ est μ_y .

La condition initiale sur la loi de X_0 nous dit donc que la loi conditionnelle de $\mathcal{L}(X_0/Y_0 = y) = \mu_y$. La loi de X_n est

$$\sum_y \theta_y \mu_y P^n = \sum_y \theta_y Q^n(y, y') \mu_{y'} :$$

c'est une combinaison linéaire des lois μ_y , et donc la loi conditionnelle de $\mathcal{L}(X_n/Y_n = y)$ est aussi μ_y .

Ensuite, nous allons montrer par récurrence sur n que la loi de X_n sachant $(Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_0)$ est la loi de X_n sachant Y_n , c'est à dire que c'est le noyau M .

Remarquons que cela revient à montrer que, pour toute fonction $g : E \mapsto \mathbb{R}$ et toute fonction $h : F \mapsto \mathbb{R}$, on a

$$(5.7) \quad \mathbf{E}(g(X_{n+1})h(Y_{n+1})/\sigma(Y_n, \dots, Y_0)) = \mathbf{E}(M(g)(Y_{n+1})h(Y_{n+1})/\sigma(Y_n, \dots, Y_0)),$$

et ceci en supposant que cette propriété est vraie à l'ordre n .

Pour cela, introduisons l'opérateur R , qui transforme les fonctions définies sur F en fonctions définies sur E , défini par $Rg(x) = g \circ f(x)$, alors que l'opérateur M transforme les fonctions sur E en fonctions sur F .

On a $MR = Id$, et même un peu mieux : si $g : E \mapsto \mathbb{R}$ et $h : F \mapsto \mathbb{R}$, alors $M(gR(h)) = hM(g)$, comme on le voit immédiatement en appliquant les définitions.

Pour calculer le premier membre de (5.7), écrivons $g(X_{n+1})h(Y_{n+1}) = gR(h)(X_{n+1})$. Nous pouvons d'abord conditionner par rapport à la tribu plus grosse $\sigma(X_0, \dots, X_n)$, et nous obtenons

$$\mathbf{E}(g(X_{n+1})h(Y_{n+1})/\sigma(Y_n, \dots, Y_0)) = \mathbf{E}(P(gR(h))(X_n)/\sigma(Y_0, \dots, Y_n)).$$

Nous pouvons alors utiliser l'hypothèse de récurrence et nous obtenons

$$\mathbf{E}(g(X_{n+1})h(Y_{n+1})/\sigma(Y_n, \dots, Y_0)) = M(P(gR(h)))(Y_n).$$

Si nous faisons la même opération sur le second membre de (5.7), nous obtenons

$$\mathbf{E}(M(g)(Y_{n+1})h(Y_{n+1})/\sigma(Y_n, \dots, Y_0)) = M(P(R(hM(g))))(Y_n).$$

Montrons que ce sont les mêmes fonctions. Nous avons $MP = QM$. Donc,

$$MP(gR(h)) = QM(gR(h)) = Q(hM(g)),$$

et par ailleurs

$$MPR(hM(g)) = QMR(hM(g)) = Q(hM(g)).$$

Une fois cette identité établie, il ne reste qu'à écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(g(Y_{n+1})/\sigma(Y_0, \dots, Y_n)) &= \mathbf{E}(Rg(X_{n+1})/\sigma(Y_0, \dots, Y_n)) \\ &= \mathbf{E}(PRg(X_n)/\sigma(Y_0, \dots, Y_n)) \\ &= MPRg(Y_n) = Qg(Y_n), \end{aligned}$$

ce qui montre que Y_n est une chaîne de MARKOV de matrice Q .

Il reste à voir que les mesures μ_y sont les restrictions de la mesure invariante aux classes A_y , normalisées pour en faire des probabilités.

Tout d'abord, il est aisé de voir que la matrice Q est nécessairement irréductible : si la chaîne Y_n ne visite pas tous les points, la chaîne X_n non plus. Ensuite, appelons $\rho(y)$ la probabilité invariante pour la matrice Q . Alors, l'équation $\mu_y = \sum_{y'} Q(y, y')\mu_{y'}$ nous montre que la probabilité $\mu = \sum_y \rho(y)\mu_y$ est une mesure invariante pour P , ce qui montre l'assertion.

Remarquons au passage que la probabilité invariante pour Q n'est rien d'autre que l'image par f de la probabilité invariante pour P , ou encore que $\rho(y) = \mu(A_y)$.

Ceci étant observé, la mesure μ_y est égale à $\mathbf{1}_{A_y}(x) \frac{1}{\rho(y)} \mu$, et on voit donc que la condition (5.5) n'est rien d'autre que la condition (5.6) appliqué à la matrice adjointe $Q(x, y) = \frac{\mu(y)}{\mu(x)} P(y, x)$. Le critère de DYNKIN nous montre alors que sous les hypothèses du critère de PITMAN-ROGERS, et si la chaîne X_n part avec la mesure invariante μ , alors la chaîne Y_n est la retournée en temps d'une chaîne homogène sous sa mesure invariante, et c'est donc une chaîne de MARKOV homogène. Ce qui n'est pas évident, c'est que cette propriété reste vraie avec des mesures initiales plus générales (en fait, la mesure initiale de Y_n peut être choisie quelconque, c'est la loi conditionnelle de X_0 sachant Y_0 qui est imposée). ■

Donnons quelques exemples d'application du critère de DYNKIN.

Le dédoublement.

Lorsqu'on a une chaîne de MARKOV qui admet des points x pour lesquels $P(x, x) > 0$, il est parfois commode de la représenter à l'aide d'une chaîne de MARKOV qui n'a pas de tels points. L'idée est alors de considérer deux copies de E , E_1 et E_2 , et de construire une chaîne de MARKOV sur $E_1 \cup E_2 = E \times \{1, 2\}$ de la façon suivante. Pour $x \in E$ et $i \in \{1, 2\}$, on pose $Q((x, i), (y, j)) = 0$ si $i \neq j$, et $x \neq y$, $Q((x, i), (y, i)) = P(x, y)$, si $x \neq y$, et $Q((x, i), (x, j)) = P(x, x)$ si $i \neq j$, et enfin $Q((x, i), (x, i)) = 0$.

La fonction $f : E \times \{1, 2\} \mapsto E$ est la projection. Alors, on vérifie immédiatement que $Q((x, i), (y, 1)) + Q((x, i), (y, 2)) = P(x, y)$ pour tous les points x et y de E . La chaîne de matrice Q a donc une image par f qui est une chaîne de matrice P .

Le produit de chaînes.

Si on a deux chaînes de MARKOV X_n et Y_n sur des ensembles E et F respectivement, de matrices respectives P et Q , et qu'elles sont indépendantes, alors il n'est pas difficile de voir que la chaîne (X_n, Y_n) à valeurs dans le produit $E \times F$ est encore une chaîne de MARKOV, de matrice

$$R((x, y), (x', y')) = P(x, x')Q(y, y').$$

En général, on note cette matrice $P \otimes Q$. Les images par les projections π_1 et π_2 de $E \times F$ sur E et F vérifient le critère de {sc Dynkin}.

En effet, prenons la première projection par exemple. Pour un point $x \in E$, $\pi_1^{-1}(x) = \{x\} \times F$, que nous appelons A_x . Alors

$$R((x, y), A_{x'}) = \sum_{z \in A_{x'}} R((x, y), z) = \sum_{y'} P(x, x')Q(y, y') = P(x, x').$$

Cette quantité ne dépend pas du point $z \in A_x$, et par conséquent l'image de cette chaîne par π_1 est une chaîne de MARKOV de matrice P . (C'est un peu une tautologie puisqu'on était parti du fait que la première composante de la chaîne sur le produit était X_n).

Remarquons que la chaîne produit n'est pas toujours irréductible, même si les chaînes (X_n) et (X'_n) le sont. dans le cas où $E = F$ et où les chaînes X et Y ont même matrice de transition, on a même le résultat suivant.

Proposition 5.3. *Soit $\mathbf{X}_n = (X_n, X'_n) \in E \times E$ le couple formé par deux chaînes indépendantes et de même matrice P irréductible.*

Alors, \mathbf{X} est irréductible si et seulement si X est apériodique.

Démonstration. — Montrons que la condition est nécessaire. Si la chaîne a une période $T > 1$, appelons R_0, \dots, R_{T-1} les classes de récurrences successives de P^T . Alors, si $X_0 \in R_0$ et $X'_0 \in R_1$, au temps $n = kT + p$, on a $X_n \in R_p$ et $X'_n \in R_{p+1}$, avec la convention $R_T = R_0$. Donc, la chaîne (X_n, X'_n) n'atteint jamais un point de la forme (x, x) .

Par ailleurs, si la chaîne est apériodique, pour tout couple de couples de points $((x, y), (x', y')) \in (E \times E) \times (E \times E)$, il existe un entier n tel que $P^n(x, x') > 0$ et $P^n(y, y') > 0$. Donc, $(P \otimes P)^n((x, y), (x', y')) = P^n(x, x')P^n(y, y') > 0$. La chaîne est donc irréductible.

Le lecteur pourra à titre d'exercice décrire les classes de récurrence de la chaîne produit lorsque la période T est supérieure ou égale à 1. (Il y en a T .) Il pourra aussi montrer que la chaîne couplée est apériodique si la chaîne d'origine l'est. ■

Le couplage

On considère une chaîne de MARKOV X_n de matrice P . L'idée, qui sera utilisée pour montrer la convergence vers la mesure stationnaire, comme nous

le verrons au chapitre ??, est de construire sur le produit $E \times E$ une chaîne de MARKOV qui se comportent comme deux chaînes de MARKOV indépendantes de même loi que X_n jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, et qui restent ensuite égales à partir du premier instant où elles se rencontrent.

Pour commencer, considérons une chaîne de MARKOV (X_n) de matrice P , et considérons sur le produit $E \times E$ la chaîne de MARKOV $\mathbf{X}_n = (X_n, X'_n)$ formée de deux copies indépendantes de la chaîne (X_n) . Elle admet comme matrice de transition

$$Q((x, x'), (y, y')) = P(x, y)P(x', y').$$

Appelons alors T le premier temps où les deux composantes sont égales :

$$T = \inf\{n \mid X_n = X'_n\}.$$

Ce temps peut être éventuellement infini, mais c'est un temps d'arrêt. T est appelé le temps de couplage de la chaîne ; c'est aussi le temps d'atteinte de la diagonale dans $E \times E$.

Nous pouvons alors définir un nouveau processus Y_n sur $E \times E$ de la façon suivante

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n \mathbf{1}_{\{n \leq T\}} + (X_n, X_n) \mathbf{1}_{\{n > T\}}.$$

C'est le processus couplé : après le temps de couplage, on impose aux deux coordonnées de rester égales. Remarquons qu'il est aussi égal à

$$\mathbf{X}_n \mathbf{1}_{\{n-1 \leq T\}} + (X_n, X_n) \mathbf{1}_{\{n-1 > T\}}.$$

Alors, ce processus est aussi une chaîne de MARKOV, et son noyau de transition est

$$Q_1((x, x'), (y, y')) = \begin{cases} P(x, y)P(x', y') & \text{si } x \neq x' \\ 0 & \text{si } x = x' \text{ et } y \neq y' \\ P(x, y) & \text{si } x = x' \text{ et } y = y' \end{cases}$$

Pour le voir, on remarque que

$$\mathcal{F}_n^{\mathbf{Y}} = \sigma(\mathbf{Y}_0, \dots, \mathbf{Y}_n) \subset \mathcal{F}_n^{\mathbf{X}} = \sigma(\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_n).$$

On voit aussi que le temps d'atteinte de la diagonale pour \mathbf{Y}_n ou pour \mathbf{X}_n est le même, de telle façon que T est aussi un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{F}_n^{\mathbf{Y}}$.

Ensuite, on remarque que

$$\mathbf{E}(G(\mathbf{Y}_{n+1})/\mathcal{F}_n^{\mathbf{Y}}) = \mathbf{E}(G(\mathbf{Y}_{n+1})/\mathcal{F}_n^{\mathbf{X}}/\bar{\mathcal{F}}_n^{\mathbf{Y}}),$$

puis on calcule $\mathbf{E}(G(\mathbf{Y}_{n+1})/\mathcal{F}_n^{\mathbf{X}})$:

$$\mathbf{E}(G(X_{n+1}, X'_{n+1})/\mathcal{F}_n^{\mathbf{X}})\mathbf{1}_{\{T \leq n\}} + \mathbf{E}(G(X_{n+1}, X_{n+1})/\mathcal{F}_n^{\mathbf{X}})\mathbf{1}_{T > n}.$$

On applique la propriété de Markov de (\mathbf{X}_n) sur le premier terme et celle de (X_n) sur le second, car, par indépendance de (X_n) et (X'_n) ,

$$\mathbf{E}(h(X_{n+1})/\mathcal{F}_n^{\mathbf{X}}) = \mathbf{E}(h(X_{n+1})/\sigma(X_0, \dots, X_n)).$$

On obtient alors

$$Q(G)(X_n, X'_n)\mathbf{1}_{T \leq n} + P(h)(X_n)\mathbf{1}_{T > n},$$

où $h(x) = G(x, x)$.

Cette quantité est s'écrit bien $K(\mathbf{Y}_n)$, où $K(x, x') = Q(G)(x, x')\mathbf{1}_{x \neq x'} + P(h)(x)\mathbf{1}_{x=x'}$.

On voit donc que (\mathbf{Y}_n) est bien une chaîne de MARKOV, et la formule de la ligne précédente nous permet de calculer son noyau Q_1 , dont on vérifie aussitôt que c'est bien la formule annoncée.

Alors, les deux applications $(x, x') \mapsto x$ et $(x, x') \mapsto x'$ vérifient le critère de DYNKIN pour la matrice Q_1 , avec comme image la matrice P .

Remarquons que la proposition 5.3 nous dit que le temps T est presque sûrement fini si et seulement si la chaîne est apériodique.

Chapitre 5

Chaînes de MARKOV générales.

1 Définitions.

Nous introduisons ici la notion de chaîne de MARKOV , en général, sans nous restreindre au cas des chaînes de MARKOV finies. Nous en donnons les premières propriétés élémentaires.

Définition 1.1. *On appelle chaînes de MARKOV sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans (E, \mathbf{E}) tel que pour tout $B \in \mathcal{F}$, et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in B / X_0, \dots, X_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} \in B / X_n).$$

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 1.2. *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans E , et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.*

1. *(X_n) est une chaîne de MARKOV si et seulement si, pour tout n , pour presque tout (x_0, \dots, x_n) de E^n , la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_0, \dots, X_n) = (x_0, \dots, x_n)$ ne dépend que de x_n . (Ici la notion de "presque tout" se réfère à la loi de (X_0, \dots, X_n) .)*
2. *(X_n) est une chaîne de MARKOV si et seulement si, pour tout n ,*

$$(X_{n+1}, X_n) \perp_{X_n} (X_0, \dots, X_n).$$

3. *Si (X_n) est une chaîne de MARKOV , si $p_n(x, dy)$ désigne pour tout n la loi de X_{n+1} sachant X_n , et si $\mu_0(dx)$ est la loi de X_0 , alors la loi de*

(X_0, \dots, X_n) est

$$\mu_0(dx_0) \times p_0(x_0, dx_1) \times \dots \times p_{n-1}(x_{n-1}, dx_n).$$

4. Avec les mêmes notations que dans le point précédent, la loi de $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+k})$ sachant que $X_n = x_n$ est

$$p_n(x_n, dx_{n+1}) \times \dots \times p_{n+k-1}(x_{n+k-1}, dx_{n+k}).$$

5. Si (X_n) est une chaîne de MARKOV, alors pour $0 < n < p$, on a

$$(X_0, \dots, X_n) \perp_{X_n} (X_n, \dots, X_p).$$

(On dit que le futur est conditionnellement indépendant du passé sachant le présent.)

6. Plus généralement, si (X_n) est une chaîne de MARKOV, pour tous $0 < n < p < q$, on a

$$(X_0, \dots, X_p) \perp_{(X_n, \dots, X_p)} (X_n, \dots, X_q).$$

7. Si (X_n) est une chaîne de MARKOV, si, pour $N > 0$, on pose $Y_n = X_{(N-n) \vee 0}$, alors Y_n est une chaîne de MARKOV. On l'appelle la chaîne retournée de la chaîne X à l'instant n .

Démonstration. — Compte tenu des rappels précédents sur les lois conditionnelles et l'indépendance conditionnelle, les démonstrations sont élémentaires et laissées au lecteur à titre d'exercice. ■

Exemple. — L'exemple le plus fondamental de chaîne de MARKOV est le suivant. On se donne une suite de variables aléatoires (ε_n) à valeurs dans un espace mesuré (F, \mathcal{F}) , indépendantes, et une suite de fonctions mesurables $F_n : E \times F \mapsto E$. Si X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans E , indépendante de toute la suite (ε_n) , alors, la suite définie par la relation de récurrence $X_{n+1} = F_n(X_n, \varepsilon_n)$ est une chaîne de MARKOV à valeurs dans E .

Pour le voir, il suffit de remarquer que, si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, alors la variable aléatoire X_n est mesurable par rapport à \mathcal{F}_n (immédiat par récurrence), et donc la loi de X_{n+1} sachant $(X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (x_0, e_1, \dots, e_n)$ est la loi de $F(x_n, \varepsilon_{n+1})$: elle ne dépend que de x_n , et par conséquent

$$(X_{n+1}, X_n) \perp_{X_n} (X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

et a fortiori

$$(X_{n+1}, X_n) \perp_{X_n} (X_0, X_1, \dots, X_n).$$

On voit dans cet exemple qu'en fait on peut avoir la propriété d'indépendance conditionnelle par rapport à une filtration plus grosse que la filtration naturelle de la suite (X_n) .

Définition 1.3. Soit Q une probabilité de transition de (E, \mathcal{E}) dans lui-même et ν une probabilité sur (E, \mathcal{E}) . Une chaîne de MARKOV $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est **homogène de loi initiale ν et de transition Q** si

$$\forall B \in \mathbf{E}, \mathbf{P}(X_0 \in B) = \nu(B); \forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X_{n+1} \in B / X_0, \dots, X_n) = Q(X_n, B).$$

Une chaîne **non homogène** serait telle que $\mathbf{P}(X_{n+1} \in B / X_0, \dots, X_n) = Q_n(X_n, B)$, où le noyau Q_n dépendrait de n .

Exemple. — Dans l'exemple précédent $X_{n+1} = F_n(X_n, \varepsilon_{n+1})$, la chaîne est homogène lorsque

1. La fonction F ne dépend pas de n .
2. La loi de la variable aléatoire ε_n ne dépend pas de n .

Dans ce cas, le noyau $Q(x, dy)$ est la loi de $F(x, \varepsilon_1)$.

Si (X_n) est une chaîne homogène de noyau de transition Q , la donnée de la loi de X_0 détermine pour tout n la loi de (X_0, \dots, X_n) . C'est une conséquence élémentaire de la proposition précédente. Nous appellerons (provisoirement) cette loi \mathbf{P}_n .

On a en particulier

Proposition 1.4. Soit (X_n) une chaîne homogène de noyau Q .

1. Si μ_0 désigne la loi de X_0 , alors la loi de X_n est $\mu_0 Q^{(n)}$.
2. Si $f : E \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée ou positive, et si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, alors pour tout n

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1}) / \mathcal{F}_n) = Q(f)(X_n).$$

Il faut faire attention à ce que, en général, la chaîne retournée à l'instant n d'une chaîne homogène n'est plus homogène. Cette propriété dépendra du choix de la loi initiale μ_0 .

Remarque. — Si une suite X_n adaptée à la filtration \mathcal{F}_n a la propriété que, pour tout n , et toute fonction mesurable bornée f , $\mathbf{E}(f(X_{n+1}) / \mathcal{F}_n)$ est une

fonction de $g(X_n)$, alors c'est une chaîne de MARKOV. L'application qui à f associe la fonction g est linéaire et se représente par un noyau markovien $g = Q_n(f)$. On obtient donc une chaîne homogène de noyau Q dès que ce noyau ne dépend pas de n .

2 L'espace canonique.

Dans la suite, nous fixerons la plupart du temps le noyau de transition Q , mais nous ferons varier la loi initiale μ_0 . Nous pouvons alors nous poser la question suivante :

Si l'on se donne l'espace d'états (E, \mathcal{E}) , la probabilité ν et la probabilité de transition Q de (E, \mathcal{E}) dans lui-même, existe-t-il toujours un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et un processus X qui serait une chaîne de MARKOV homogène de loi initiale ν et de transition Q .

Une réponse positive est apportée avec l'espace $\Omega = E^{\mathbb{N}}$, c'est à dire l'ensemble des suites à valeurs dans E . Si $\omega = (\omega_n)$, alors on pose $X_n(\omega) = \omega_n$, c'est à dire que X_n est la n ème coordonnée. Sur cet espace, on considère la tribu $\mathcal{A} = \sigma(X_n, n \geq 0)$, c'est à dire la plus petite tribu qui rende mesurable ces fonctions coordonnées : on l'appelle la tribu cylindrique.

On admettra le résultat suivant, qui n'est rien d'autre qu'un théorème de construction de probabilités sur un produit infini d'espaces ; c'est une conséquence d'un théorème général de Kolmogorov.

Proposition 2.1. *Si l'ensemble E est fini ou dénombrable, et plus généralement si c'est un espace topologique localement compact muni de sa tribu borélienne, il existe une unique probabilité sur cet espace (Ω, \mathcal{A}) , que nous noterons \mathbf{P}_ν ayant la propriété suivante : pour tout entier n , la loi de (X_0, \dots, X_n) sous cette probabilité est la probabilité \mathbf{P}_n définie ci-dessus pour la chaîne de MARKOV de noyau Q et de loi initiale ν :*

$$\mathbf{P}_\nu((X_0, \dots, X_n) \in B_0 \times \dots \times B_n) = \int_{B_0 \times B_1 \times \dots \times B_n} \nu(dx_0) Q(x_0, dx_1) \cdots Q(x_{n-1}, dx_n).$$

Cet exemple est connu comme la **version canonique** de la chaîne de MARKOV homogène de loi initiale ν et de transition Q . L'espace lui-même est appelé **l'espace canonique**.

L'avantage de cette version canonique est que les trajectoires sont intrinsèques : elles ne dépendent ni de ν ni de Q . Cela facilite l'étude simultanée de familles de processus correspondant à des familles de couples (ν, Q) .

Puisque la plupart du temps, Q sera fixée, mais que ν variera, on utilise la notation \mathbf{P}_ν pour indiquer la dépendance en ν . Lorsque ν est la mesure de Dirac au point $x \in E$, \mathbf{P}_ν se note \mathbf{P}_x . Nous noterons l'espérance d'une variable mesurable Z pour cette probabilité $\mathbf{E}_\nu(Z)$ (ou $\mathbf{E}_x(Z)$ si $\nu = \delta_x$).

Supposons maintenant que l'on ait une autre chaîne de MARKOV (Y_n) sur un autre espace $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbf{P}_1)$, de même noyau Q et de même loi initiale ν . Nous pouvons considérer l'application $Y : \Omega_1 \mapsto \Omega$, qui à un $\omega \in \Omega_1$ associe la suite $(Y_n(\omega))$. Tout est fait pour que cette application soit une variable aléatoire à valeurs dans l'espace canonique. Dans ce cas, la mesure image de \mathbf{P}_1 par cette application Y n'est rien d'autre que la mesure \mathbf{P}_ν . On ne perd donc rien en général à supposer que l'espace de probabilité sur lequel nous nous situons est l'espace canonique. Nous verrons plus bas l'intérêt de travailler dans ce cadre.

La connaissance des mesures \mathbf{P}_x suffit en général, en vertu du résultat suivant :

Proposition 2.2. *Soit ν une loi initiale, et B un borélien de l'espace canonique. Alors,*

$$\mathbf{P}_\nu(B) = \int_E \mathbf{P}_x(B) \nu(dx).$$

Si Z est une variable \mathcal{A} mesurable sur l'espace canonique, positive ou bornée, alors

$$\mathbf{E}_\nu(Z) = \int_E \mathbf{E}_x(Z) \nu(dx).$$

En d'autres termes, il suffit d'étudier le comportement de la chaîne lorsqu'elle part d'une mesure initiale concentrée en un point x .

Démonstration. — Puisque la tribu est engendrée par les variables (X_n) , il suffit de le démontrer lorsque $B \in \sigma(X_0, \dots, X_n)$, ou mieux lorsque $B = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_n$, car de telles parties forment une classe stable par intersection qui engendre la tribu (par définition).

Dans ce cas, pour un tel B ,

$$\mathbf{P}_x(B) = \mathbf{1}_{B_0}(x) \int_{E^n} \mathbf{1}_{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n} Q(x, dx_1) Q(x_1, dx_2) \cdots Q(x_{n-1}, dx_n),$$

tandis que

$$\mathbf{P}_\nu(B) = \int_{E^{n+1}} \mathbf{1}_{B_0 \times B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n} \nu(dx_0) Q(x_0, dx_1) Q(x_1, dx_2) \cdots Q(x_{n-1}, dx_n).$$

La formule est donc immédiate.

Le passage des ensembles aux variables aléatoires est immédiat (argument de classes monotones ou bien limites). ■

Remarque. — On a donc pour toute variable Z \mathcal{F}_∞ -mesurable et bornée $\mathbf{E}(Z/X_0) = K(X_0)$, où

$$K(x) = \mathbf{E}_x(Z) = \int_{\Omega} Z(\omega) P_x(d\omega).$$

La famille de mesures $P_x(d\omega)$ est un noyau sur l'espace Ω (l'espace des suites à valeurs dans E), qui donne la loi conditionnelle de la chaîne sachant sa valeur initiale $X_0 = x$.

3 La propriété de MARKOV forte

Dans ce qui suit, nous considérerons toujours une chaîne de MARKOV homogène (X_n) , de noyau de transition P (fixé une fois pour toute), et de mesure initiale ν (qui pourra varier). Il n'est pas nécessaire dans cette section de supposer que l'espace E est fini ou dénombrable.

Désormais, nous considérerons que la chaîne (X_n) est réalisée sur l'espace **canonique** $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ des suites (ω_n) à valeurs dans E . Nous dénoterons par \mathcal{F}_n la filtration naturelle de la suite $X_n(\omega)$: une fonction \mathcal{F}_n mesurable est une fonction qui ne dépend que des n premières coordonnées de la suite ω . La loi de la chaîne sera notée \mathbf{P}_ν et \mathbf{P}_x si $\nu = \delta_x$.

Nous définissons alors

$$\theta(\omega) = \theta((\omega_n)) = (\omega_{n+1});$$

en d'autres termes, $X_n(\theta(\omega)) = X_{n+1}(\omega)$.

Cet opérateur est appelé l'opérateur de translation sur Ω . C'est une application mesurable de Ω dans lui-même. Si Z est une variable aléatoire définie sur Ω , nous posons

$$\theta Z(\omega) = Z(\theta(\omega)),$$

et de même, si A est une partie mesurable de Ω , alors $\theta A = \theta^{-1}(A)$, pour avoir

$$\theta \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{\theta A}.$$

Donnons quelques exemples :

1. Si $Z = F(X_0, X_1, \dots, X_n)$, $\theta Z = F(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$;
2. Si $T(\omega) = \inf\{n \geq 0 \mid X_n(\omega) \in A\}$, alors $\theta T = \inf\{n \geq 1 \mid X_n \in A\} - 1$.
En particulier $1 + \theta T = T$ sur $\{T \geq 1\}$.
3. Toujours avec $T = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}$, $\{T = \infty\} = \{X_0 \notin A\} \cap \theta\{T = \infty\}$.

De même, nous poserons $\theta_2 = \theta \circ \theta$, et $\theta_n = \theta \circ \theta_{n-1}$ désigne la n ème composition de θ avec lui-même, c'est à dire la translation de n -indices dans la suite (ω_i) .

Si T est un temps d'arrêt fini presque sûrement, nous noterons θ_T l'opérateur

$$\theta_T = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mathbf{1}_{T=n}.$$

Si T peut prendre la valeur $T = \infty$ avec une probabilité positive, l'opérateur θ_T ne sera défini que sur l'événement $\{T < \infty\}$.

Par exemple, si $T = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}$, alors $\theta_T(T) = 0$. Par contre, si $T = \inf\{n > 0 \mid X_n \in A\}$ est le premier temps de retour dans A , alors $T + \theta_T(T)$ est le second temps de retour dans A .

Rappelons que nous avons désigné par $\mathbf{E}_x(Z)$ l'espérance d'une variable Z (bornée ou positive), lorsque la chaîne de MARKOV a comme mesure initiale δ_x .

Théorème 3.1. Propriété de MARKOV forte. *Soit Z une variable \mathcal{A} -mesurable bornée ou positive.*

1. $\mathbf{E}(\theta_n Z / \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}_{X_n}(Z)$.
2. Soit T un temps d'arrêt. Alors

$$\mathbf{E}(\theta_T Z / \mathcal{F}_T) \mathbf{1}_{T < \infty} = \mathbf{E}_{X_T}(Z) \mathbf{1}_{T < \infty}.$$

Démonstration. — Commençons par le premier point. Comme d'habitude, il suffit de démontrer la formule pour une famille de fonctions Z mesurables et bornées engendrant la tribu \mathcal{A} et stable par multiplication. Nous choisissons

pour cela les fonctions qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées : $Z = F(X_0, \dots, X_p)$. Alors, $\theta_n Z = F(X_n, \dots, X_{n+p})$. Tout d'abord, par la propriété de MARKOV ,

$\mathbf{E}(\theta_n Z / \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\theta_n Z / X_n)$, car $\theta_n Z$ est une fonction de (X_n, \dots, X_{n+p}) . Soit $\mu_n(dx)$ la loi de X_n . La loi du n-uplet (X_n, \dots, X_{n+p}) est

$$\mu_n(dx_n)P(x_n, dx_{n+1}) \cdots P(x_{n+p-1}, dx_{n+p}).$$

La loi conditionnelle de (X_n, \dots, X_{n+p}) sachant $X_n = x_n$ est donc

$$P(x_n, dx_{n+1}) \cdots P(x_{n+p-1}, dx_{n+p}) :$$

c'est la loi de (X_0, \dots, X_p) lorsque $X_0 = x_n$. Et donc

$$\mathbf{E}(\theta Z / X_n = x_n) = \mathbf{E}_{x_n}(F(X_0, \dots, X_p)) = \mathbf{E}_{x_n}(Z).$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

Pour le second point, considérons un événement A de \mathcal{F}_T . Il s'agit de démontrer que

$$\mathbf{E}(\theta_T Z \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T < \infty}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T < \infty} \mathbf{E}_{X_T}(Z)).$$

Le premier membre s'écrit

$$\sum_n \mathbf{E}(\theta_n Z \mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}}) = \sum_n \mathbf{E}(\mathbf{E}_{X_n}(Z) \mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}}),$$

en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{F}_n , ce qui est licite car $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. En regroupant les termes, on obtient exactement l'expression cherchée. ■

Remarques

1. On peut enlever la condition $\{T < \infty\}$ à condition d'ajouter à l'espace E un point δ , appelé **point cimetièrre** ou **poubelle**, où on envoie les trajectoires de la chaîne lorsqu'elle ne nous servent plus : formellement, on pose $P(\delta, \delta) = 1$, si bien qu'une fois arrivée en δ , la chaîne de MARKOV n'en bouge plus, et on pose alors $X_T = \delta$ sur $\{T = \infty\}$. On définit $\theta_\infty Z$ de la même manière, en définissant de manière arbitraire la valeur de $Z(\omega)$ sur la trajectoire constante égale à δ (on choisit la plupart du temps la valeur 0, si aucune autre valeur n'est naturelle). La propriété de MARKOV forte s'énonce alors

$$\mathbf{E}(\theta_T Z / \mathcal{F}_T) = \mathbf{E}_{X_T}(Z).$$

S'il en est besoin, on désignera l'espace canonique des trajectoires à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$ par $\hat{\Omega}$.

2. La raison pour laquelle nous nous restreignons à l'espace canonique est qu'on a une définition claire de ce qu'est l'opérateur θ . Si on n'avait pas pris cette précaution, il n'aurait été défini que sur la tribu engendrée par la suite de variables (X_n) , à partir de la formule $\theta X_n = X_{n+1}$.

4 Temps de retour.

Nous allons appliquer les identités qui précèdent pour obtenir des informations sur les temps de passage en un point, ou les temps d'atteinte des ensembles.

Proposition 4.1. *Soit (X_n) une chaîne de MARKOV homogène sur un ensemble fini E , et soit $x \in E$. Soit $T_x = \inf\{n > 0 \mid X_n = x\}$. (T_x est le temps de retour au point x , si $X_0 = x$.)*

Alors, si x est récurrent, $\mathbf{P}_y(T_x < \infty) = 1$, pour tous les points de la classe de récurrence de x . Si x est transitoire, $\mathbf{P}_x(T_x < \infty) < 1$.

Démonstration. — Le cas des points transitoires est facile, et ne nécessite pas ce qui précède. Si x est transitoire, il existe un point récurrent, un entier n , tel que $\mathbf{P}_x(T_x > n; X_n = y) > 0$. (Il existe une probabilité positive d'aller vers un point récurrent sans repasser par le point x). Sur l'événement

$$\{T_x > n; X_n = y\},$$

on a $T_x = \infty$.

Pour les points récurrents, c'est plus délicat. Introduisons

$$S_x = \inf\{n \geq 0 \mid X_n = x\},$$

de telle façon que si $X_0 = y$, $S_x = T_x$ si $x \neq y$, mais que $S_x = 0$ si $y = x$. (S_x est le temps d'atteinte de x , qui n'est pas le même que le temps de retour si la chaîne part de x .)

On fixe x et on considère la fonction $F(y) = \mathbf{P}_y(S_x = \infty)$. On a $0 \leq F(y) \leq 1$ et $F(x) = 0$. De plus, si $y \neq x$, alors

$$\{S_x = \infty\} = \{X_1 \neq x\} \cap \theta\{S_x = \infty\}.$$

D'où l'on tire, pour $y \neq x$,

$$\begin{aligned} F(y) &= \mathbf{E}_y[\mathbf{1}_{X_1 \neq x} \mathbf{E}(\theta \mathbf{1}_{S_x = \infty} / \mathcal{F}_1)] \\ &= \mathbf{E}_y[\mathbf{1}_{X_1 \neq x} \mathbf{E}_{X_1}(\mathbf{1}_{S_x = \infty})] \\ &= \mathbf{E}_y[\mathbf{1}_{X_1 \neq x} F(X_1)] \\ &= \mathbf{E}_y[F(X_1)] \end{aligned}$$

On a donc $F(y) = PF(y)$ si $y \neq x$. Si $y = x$, on a $PF(x) \geq 0 = F(x)$. Donc partout $PF \geq F$. Plaçons nous sur une classe de récurrence, et introduisons la mesure invariante μ de cette classe. Nous savons qu'elle charge tous les points, et que $\int PF d\mu = \int F d\mu$. Donc, $F = PF$ partout sur la classe de récurrence, et puisque les fonctions invariantes sont constantes sur les classes de récurrence, $F(y) = F(x) = 0$.

Nous avons donc que, sur une classe de récurrence, le temps d'atteinte de tous les points est fini presque sûrement. C'est donc aussi le cas du temps de retour au point x . ■

Nous pouvons de même étudier les probabilités d'atteinte de toutes les parties de E :

Définition 4.2. Soit B une partie de E , et posons $T_B = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in B\}$. On appelle potentiel d'équilibre de B , et on note $V_B(x)$, la fonction $\mathbf{P}_x(T_B < \infty)$.

Proposition 4.3. $V_B = 1$ sur B ; $PV_B = V_B$ sur B^c .

Si B est inclus dans une classe de récurrence R , alors $V_B = V_R$, $PV_B = V_B$ partout, et V_B est nulle sur les autres classes de récurrence.

Toutes les fonctions solutions de $PF = F$ sont combinaisons linéaires des fonctions V_R , lorsque R parcourt l'ensemble des classes de récurrence.

Démonstration. — On fait même démonstration que pour les temps d'atteinte des points :

$$\{T_B = \infty\} = \{X_1 \notin B\} \cap \theta\{T_B = \infty\},$$

puis on fait le même calcul que précédemment.

Si B est inclus dans une classe de récurrence R , nous avons d'après ce qui précède que le processus atteint B dès qu'il atteint R , et donc $V_B = V_R$. Par ailleurs, $V_R = 1$ sur R , et si une fonction V est constante sur R il en va de même de PV . Donc $PV_R = 1 = V_R$ sur R , et donc $PV_R = V_R$ partout.

S'il y a k classes de récurrence, nous obtenons donc ainsi k fonctions sur E linéairement indépendantes qui sont solutions de $PV = V$. Comme l'espace des fonctions invariantes est exactement de dimension k , nous avons ainsi toutes les fonctions invariantes. ■

Les fonctions V_B peuvent être définies directement comme solution de certaines équations :

Proposition 4.4. *La fonction V_B est la plus petite fonction positive satisfaisant $PV \leq V$, avec $V = 1$ sur B .*

Démonstration. — Comme la fonction V_B est positive et majorée par 1, nous voyons que $PV_B \leq V_B$, partout.

Soit alors une autre solution positive de $PV \leq V$, avec $V = 1$ sur B . La suite $V(X_n)$ est une surmartingale positive. Appliquons le théorème d'arrêt au temps $T_B \wedge n$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \mathbf{E}_x[V(X_{T_B \wedge n})] \\ &\geq \mathbf{E}_x[V(X_{T_B})\mathbf{1}_{T_B \leq n}] \\ &= \mathbf{P}_x(T_B \leq n). \end{aligned}$$

En faisant converger n vers l'infini, nous voyons que $V(x) \geq V_B(x)$. ■

Remarque. — Rappelons qu'une sous-martingale positive est bornée dans L^1 (ici c'est automatique puisque l'ensemble est fini et toutes les fonctions sont bornées), et donc cette suite $V(X_n)$ doit converger. D'après ce qu'on a vu du comportement de la suite X_n , elle finit par arriver dans une classe de récurrence et y tourne ensuite indéfiniment. La suite $V(X_n)$ ne peut donc converger que si la fonction V est constante sur les classes de récurrence. (Mais nous l'avions déjà vu par un autre argument faisant intervenir la mesure invariante.)

Nous allons maintenant nous intéresser à la loi du temps de retour $T_y = \inf\{n > 0 | X_n = y\}$, lorsque $X_0 = x$. On a

Théorème 4.5. *Soit P la matrice de la chaîne X et soit $\lambda > 0$. On pose $G_\lambda(x, y) = \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda n} P^n(x, y)$. Alors*

$$\mathbf{E}_x(e^{-\lambda T_y}) = \frac{G_\lambda(x, y)}{1 + G_\lambda(y, y)}.$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que puisque P^n est une matrice markovienne, alors tous ses termes sont dominés par 1, et la série qui définit la fonction G_λ est convergente. Ensuite, nous posons

$$Z_y = \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda n} \mathbf{1}_{X_n=y},$$

de telle sorte que $G_\lambda(x, y) = \mathbf{E}_x(Z_y)$.

On a, en décomposant la somme en le premier passage en y et les autres temps,

$$Z_y = e^{-\lambda T_y} [1 + \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda n} \mathbf{1}_{X_{n+T_y}=y}],$$

ce qui s'écrit

$$Z_y = e^{-\lambda T_y} [1 + \theta_{T_y} Z_y].$$

Remarquons que tout est nul $\{T_y = \infty\}$, et nous pouvons intégrer : il vient

$$\mathbf{E}_x(Z_y) = \mathbf{E}_x[e^{-\lambda T_y} \mathbf{E}(1 + \theta_{T_y} Z_y) / \mathcal{F}_{T_y}] = \mathbf{E}_x[e^{-\lambda T_y} (1 + \mathbf{E}_{X_{T_y}}(Z_y))].$$

Mais $X_{T_y} = y$ sur $\{T_y < \infty\}$, et donc

$$G_\lambda(x, y) = \mathbf{E}_x[e^{-\lambda T_y} (1 + \mathbf{E}_y(Z_y))] = \mathbf{E}_x[e^{-\lambda T_y} (1 + G_\lambda(y, y))].$$

D'où finalement

$$G_\lambda(x, y) = \mathbf{E}_x[e^{-\lambda T_y}] (1 + G_\lambda(y, y)).$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

Remarque. — La fonction $G_\lambda(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda n) P^n(x, y)$ s'appelle le **λ -potentiel** de la chaîne (ici $\lambda > 0$).

Si l'on définit une norme sur les matrices par

$$\|M\| = \sup_x \sum_y |M(x, y)|,$$

alors $\|MN\| \leq \|M\| \|N\|$. En effet, si on définit $\|f\| = \sup_x |f(x)|$, alors $\|M\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Mf\|$, et c'est donc une norme d'opérateurs. Pour une matrice markovienne, on a $\|P\| = 1$. Dans ce cas, la série $\sum_n \exp(-\lambda n) P^n$ converge, et sa somme n'est rien d'autre que

$$[Id - \exp(-\lambda)P]^{-1}.$$

$G_\lambda(x, x)$ n'est rien d'autre que le terme diagonal de cette matrice.

En d'autres termes, si f est une fonction $E \mapsto \mathbb{R}$, alors

$$G_\lambda(f)(x) = \sum_y G_\lambda(x, y) f(y)$$

est la solution de $G_\lambda(f) = e^{-\lambda} P(G_\lambda(f)) + f$.

■

Corollaire 4.6. *Posons $G(x, y) = \sum_{n \geq 1} P^n(x, y)$. La fonction G est l'espérance du temps total passé en y à partir du temps 1, lorsque $X_0 = x$. Alors*

$$\mathbf{P}_x(T_x < \infty) < 1 \iff G(x, x) < \infty.$$

De plus, si $G(y, y) < \infty$, alors $G(x, y) < \infty$ et

$$\mathbf{P}_x(T_y < \infty) = G(x, y) / [1 + G(x, x)].$$

En particulier, si x est transitoire si et seulement si $G(x, x) < \infty$, et alors $G(y, x) < \infty$ pour tout point y . En particulier, $P^n(x, y)$ converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, et le temps total passé en x est fini quel que soit le point de départ.

Démonstration. — Le fait que $G(x, y)$ soit l'espérance du temps total passé en y provient directement de la définition.

Ensuite, il suffit de faire converger λ vers 0 dans le théorème précédent. $G_\lambda(x, y)$ converge vers $G(x, y)$ par convergence monotone, et $\mathbf{E}_x(e^{-\lambda T_y})$ converge vers $\mathbf{P}_x(T_y < \infty)$ par convergence dominée.

■

Remarques

1. Un point est donc récurrent si et seulement si $G(x, x) = \infty$. De plus, si x et y sont dans la même classe de récurrence, alors $G(x, y) = \infty$, puisque sinon $\mathbf{P}_x(T_y < \infty) = 0$. En particulier, le temps total passé en un point récurrent est d'espérance infinie, quel que soit le point de départ situé dans la même classe de récurrence.
2. La chaîne ne passe qu'au plus un temps fini dans chaque point transitoire. Puisque le nombre de points transitoires est fini, alors elle ne passe qu'un temps fini dans l'ensemble des points transitoires. En particulier, le temps d'entrée dans l'ensemble des points récurrents est presque sûrement fini.

On verra plus bas (théorème 5.1) que ce nombre de passages en x pour un point transitoire suit en fait une loi géométrique, et est identiquement infini pour un point récurrent.

Par ailleurs, en regardant d'un peu plus près le théorème de convergence vers la mesure invariante dans le cas périodique, on pourrait voir directement que $G(x, x)$ est infini pour un point récurrent.

Une autre conséquence de la propriété de MARKOV forte est l'extension de la propriété de MARKOV à un temps d'arrêt.

Théorème 4.7. *Soit T un temps d'arrêt fini. Considérons la suite $Y_n = X_{n+T}$. Posons $\mathcal{G}_T = \sigma(Y_n, n \geq 0)$ et appelons μ_T la loi de X_T . Alors Y_n est une chaîne de MARKOV de même matrice de transition que X , et de loi initiale μ_T . De plus*

$$\mathcal{F}_T \perp_{X_T} \mathcal{G}_T.$$

En d'autres termes, la suite X_n repart après le temps T en oubliant le passé, avec la même structure markovienne.

Si le temps T est infini avec probabilité positive, la propriété reste vraie si nous supposons l'existence d'un point cimetière δ et si nous posons $X_\infty = \delta$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que, pour toute fonction U de la forme $F(Y_0, \dots, Y_n)$, $\mathbf{E}(U/\mathcal{F}_T)$ est une fonction de X_T et que

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}_{\mu_T}(F(X_0, \dots, X_n)).$$

Posons $Z = F(X_0, \dots, X_n)$: on a $U = \theta_T Z$, et donc

$$\mathbf{E}(U/\mathcal{F}_T) = \mathbf{E}_{X_T}(Z); \quad \mathbf{E}(\mathbf{E}_{X_T}(Z)) = \mathbf{E}_{\mu_T}(Z).$$

On obtient donc le résultat annoncé. ■

Un cas particulier important est celui où X_T est constant.

Corollaire 4.8. *Si T est un temps d'arrêt fini presque sûrement tel que la variable X_T soit constante et égale à x , alors \mathcal{F}_T est indépendante de \mathcal{G}_T , et la chaîne Y_n suit la loi \mathbf{P}_x .*

C'est le cas du premier temps de passage en x si celui-ci est fini presque sûrement.

A l'aide de ce que nous savons, et de cette propriété, nous pouvons donc résumer le comportement de la chaîne de MARKOV :

Proposition 4.9. *Soit X_n de MARKOV sur un ensemble fini E , partant d'un point initial fixé x .*

1. *Si x est récurrent, la chaîne reste dans la classe de récurrence de x , et y visite chaque point une infinité de fois .*
2. *Si x est transitoire, la chaîne quitte l'ensemble des transitoires à partir d'un certain temps, et une fois arrivée dans une classe de récurrence, y reste indéfiniment en visitant une infinité de fois chaque point de cette classe.*

Démonstration. — Il n'y a rien ou presque à démontrer. Nous avons vu que si x est récurrent, le nombre de passages en x est d'espérance infinie, et que partant de x , le temps d'atteinte de y est fini presque sûrement si y est dans la classe de x . En appliquant le principe précédent au k -ième passage en x , nous voyons qu'il y a au moins un passage en y après chaque passage en x , d'où une infinité de passages en y .

Nous avons par ailleurs déjà vu que la chaîne ne passe qu'un nombre fini de fois dans chaque point transitoire, et qu'elle entre dans l'ensemble des points récurrents au bout d'un temps fini. ■

5 Excursions.

Nous nous restreignons dans ce qui suit au cas où E est fini, bien que les résultats énoncés s'étendent sans problème au cas dénombrable. Considérons un point x de E (qui peut être récurrent ou transitoire), et supposons que $\mu_0 = \delta_x$. Définissons par récurrence les n èmes temps de passage en x de la manière suivante

$$T_x^{(0)} = 0, \quad T_x^{(n)} = \inf\{p > T_x^{(n-1)} \mid X_p = x\}.$$

Ces temps peuvent être bien sûr finis ou infinis. Ils sont tous finis si x est récurrent et infinis à partir d'un certain rang (aléatoire) si x est transitoire.

Il est facile de voir que

$$T^{(n+1)} = T^{(n)} + \theta_{T^{(n)}}(T^{(1)}) = T^{(1)} + \theta_{T^{(1)}}(T^{(n)}).$$

On définit la suite suivante, à valeurs dans $\hat{\Omega}$, par

$$Y^{(n)} = (Y_p^n)_{p \geq 0} = X_{p+T^{(n-1)}} \mathbf{1}_{p+T^{(n-1)} \leq T^{(n)}} + \delta \mathbf{1}_{p+T^{(n-1)} > T^{(n)}}.$$

En d'autres termes, la $Y^{(n)}$ est la suite des valeurs prises par la suite X_p entre le $(n-1)$ ième et le n -ième passage en x , et mises à la poubelle après. On l'appelle la n -ième excursion de X autour de x . Il se peut qu'elle soit constante et égale à δ si $T^{(n-1)} = \infty$. Il y a un petit décalage dans les notations pour ne pas parler de la 0-ième excursion.

Noter que $(Y^{(n)})$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\hat{\Omega}$. La mesure image de la probabilité \mathbf{P} par cette application $Y^{(n)}$ est la loi de $Y^{(n)}$, qui est donc une probabilité sur l'espace canonique $\hat{\Omega}$.

On note \mathcal{G}_n la tribu engendrée par $Y^{(n)} : \mathcal{G}_n = \sigma(Y_p^{(n)}, p \geq 0)$.

Théorème 5.1.

1. Si x est récurrent,
 - (a) pour tout n , \mathcal{G}_n est indépendante de $\mathcal{F}_{T^{(n-1)}}$ et incluse dans $\mathcal{F}_{T^{(n)}}$.
 - (b) Les tribus \mathcal{G}_n sont indépendantes.
 - (c) Les variables $Y^{(n)}$ sont indépendantes et de même loi.
2. Si x est transitoire :
 - (a) \mathcal{G}_n est indépendante de \mathcal{F}_n conditionnellement à $\{T^{(n-1)} < \infty\}$;
 - (b) La loi de $Y^{(n)}$ conditionnellement à $\{T^{(n-1)} < \infty\}$ est la même que la loi de $Y^{(1)}$;
 - (c) $\mathbf{P}(T^{(n)} < \infty) = \mathbf{P}(T^{(1)} < \infty)^n$. Le nombre de passages en x suit donc une loi géométrique.

On a donc décomposé les trajectoires de la suite (X_n) en une suite de "bouts de trajectoires", indépendantes et de même loi.

Démonstration. — Commençons par le cas des points récurrents. Nous voyons que $Y^{(n)} = \theta_{T^{(n-1)}}(Y^{(1)})$. Soit alors Z une variable bornée, \mathcal{G}_n mesurable. Nous voulons montrer que $\mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_{T^{(n-1)}})$ est constante (et sera donc égale à $\mathbf{E}(Z)$). Nous pouvons comme d'habitude nous ramener au cas où la fonction Z s'écrit $Z = F(Y_0^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)})$, auquel cas, si $Z_1 = F(Y_0^{(1)}, \dots, Y_k^{(1)})$, on a $Z = \theta_{T^{(n-1)}}(Z_1)$.

On peut donc écrire

$$\mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_{T^{(n-1)}}) = \mathbf{E}_{X_{T^{(n-1)}}}(Z_1) = \mathbf{E}_x(Z_1).$$

On en déduit l'indépendance. On voit aussi que

$$\mathbf{E}(F(Y_0^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)})) = \mathbf{E}_x(F(Y_0^{(1)}, \dots, Y_k^{(1)})).$$

Ceci montre que la loi de $Y^{(n)}$ est la même que celle de $Y^{(1)}$.

Il est d'autre part clair que toutes les variables $Y_k^{(n)}$ sont $\mathcal{F}_{T^{(n)}}$ -mesurables. On en déduit que \mathcal{G}_n est une sous-tribu de $\mathcal{F}_{T^{(n)}}$. Comme elle est indépendante de $\mathcal{F}_{T^{(n-1)}}$, on en déduit que les tribus \mathcal{G}_n sont indépendantes.

Les variables $Y^{(n)}$ sont donc indépendantes et de même loi.

Passons au cas des points transitoires. Il n'y a rien à changer, sauf qu'il faut se restreindre aux ensembles $\{T^{(n-1)} < \infty\}$. Le première assertion affirme que, pour toute variable Z \mathcal{G}_n -mesurable, on a

$$\mathbf{E}(Z \mathbf{1}_{T^{(n-1)} < \infty} / \mathcal{F}_{T^{(n-1)}}) = \mathbf{P}_x(T^{(n-1)} < \infty) \mathbf{E}(Z),$$

et la seconde que, si $Z = F(Y_0^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)})$, alors

$$\mathbf{E}(Z \mathbf{1}_{T^{(n-1)} < \infty}) = \mathbf{P}(T^{(n-1)} < \infty) \mathbf{E}_x(Z_1)$$

où $Z_1 = F(Y_0^{(1)}, \dots, Y_k^{(1)})$: il suffit de récrire les mêmes identités, il n'y a rien à changer.

Enfin, nous remarquons que $T^{(n)} - T^{(n-1)} = \theta_{T^{(n-1)}}(T^{(1)})$ sur $\{T^{(n-1)} < \infty\}$, et par conséquent, si $A_n = \{T^{(n-1)} < \infty\}$, alors $A_n = A_{n-1} \cap \theta_{T^{(n-1)}}(A_1)$. On a donc

$$\mathbf{P}_x(A_n) = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{A_{n-1}} \mathbf{E}(\theta_{T^{(n-1)}} \mathbf{1}_{A_1} / \mathcal{F}_{T^{(n-1)}})] = \mathbf{E}_x(\mathbf{1}_{A_{n-1}} \mathbf{E}_x(\mathbf{1}_{A_1})) = \mathbf{P}_x(A_1) \mathbf{P}_x(A_{n-1}).$$

D'où la formule par une récurrence immédiate.

L'événement $\{T^{(n)} < \infty\}$ est exactement l'événement "Il y a au moins n passages en x ". D'où l'assertion sur la loi du nombre de passages en x . ■

La décomposition selon les excursions va nous permettre de calculer certaines espérances :

Théorème 5.2. 1. Soit x un point récurrent, soit $y \neq x$ un point de la même classe de récurrence que x , et N_x^y le nombre de passages en y avant le premier retour en x . Alors

$$\mathbf{E}_x(N_x^y) = \frac{\mu(y)}{\mu(x)},$$

où μ est la mesure stationnaire de la classe de x .

2. Si μ est la mesure stationnaire de la classe de x , et si $T_x = \inf\{n > 0 \mid X_n = x\}$ est le temps de retour en x , alors

$$\mathbf{E}_x(T_x) = \frac{1}{\mu(x)}.$$

Démonstration. — On peut se restreindre au cas des chaînes irréductibles.

Nous commençons par le premier point. Fixons x et y et appelons N_k le nombre de passages en y entre le $(k-1)$ -ième et le k -ième retour en x . C'est une fonction de la k -ième excursion $Y^{(k)}$ autour de x :

$$N_k = \sum_p \mathbf{1}_{Y_p^k=y}.$$

Ce sont donc des variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Par ailleurs, si on appelle Π_p^y le nombre de passages en y avant p , Π_p^x le nombre de passages en x avant p (en ne comptant pas le temps 0), et $T^{(k)}$ le k -ième temps de passage en x , nous avons $\sum_1^k N_i = \Pi_{T^{(k)}}^y$ et $k = \Pi_{T^{(k)}}^x$. Nous avons donc

$$\frac{\sum_1^k N_i}{k} = \frac{\Pi_{T^{(k)}}^y}{\Pi_{T^{(k)}}^x} = \frac{\Pi_{T^{(k)}}^y}{T^{(k)}} \frac{T^{(k)}}{\Pi_{T^{(k)}}^x}.$$

Le théorème ergodique nous dit que les suites Π_n^y/n et Π_n^x/n convergent presque sûrement vers $\mu(y)$ et $\mu(x)$, respectivement. Et puisque la suite $T^{(k)}$ converge vers l'infini, la limite de $(\sum_1^k N_i)/k$ vaut $\mu(y)/\mu(x)$. Mais il s'agit d'une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi : la moyenne ne peut converger presque sûrement que si les variables sont intégrables, et dans ce cas la limite est égale à l'espérance.

On obtient donc le premier point.

Le second s'obtient en sommant sur tous les points $y \neq x$

$$\sum_{y \neq x} N_x^y = T_x - 1.$$

D'où

$$\mathbf{E}_x(T_x - 1) = \sum_{x \neq y} \mu(y)/\mu(x) = \frac{1}{\mu(x)} - 1.$$

Nous avons démontré la formule. ■

6 Chaînes sous-jacentes.

La propriété de MARKOV forte permet aussi de construire de nouvelles chaînes de MARKOV à partir de l'ancienne. Nous en donnons deux exemples.

Proposition 6.1. *Soit (X_n) de MARKOV homogène de matrice P et soit T_n la suite de temps d'arrêts définis de la façon suivante : $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \inf\{p > T_n \mid X_p \neq X_{T_n}\}$. Ce sont les temps de sauts successifs de la chaîne ; on a posé comme toujours $\inf\{\emptyset\} = \infty$, et $X_{T_{n+1}} = X_{T_n}$ si $T_{n+1} = \infty$. Alors, la suite $(Y_n) = (X_{T_n})$ est une chaîne de MARKOV homogène de matrice de transition Q donnée par*

$$Q(x, x) = 0; \quad Q(x, y) = P(x, y)/(1 - P(x, x)) \text{ pour } x \neq y,$$

sauf si $P(x, x) = 1$, auquel cas $Q(x, x) = 1$.

Démonstration. — La loi de Y_{n+1} connaissant \mathcal{F}_{T_n} ne dépend que de X_{T_n} , c'est à dire que de Y_n . D'autre part, $(Y_{n+k}) = \theta_{T_n}((Y_k))$, et la loi de Y_{n+1} sachant que $X_{T_n} = x$ est celle de Y_1 sachant que $X_0 = x$.

Calculons cette loi : si $P(x, x) = 1$, la suite X_n est constante égale à x , et il en va de même de la suite Y_n par définition. Et donc $Q(x, x) = 1$ dans ce cas. Ce n'est pas un cas très intéressant.

Sinon, nous écrivons, pour $x \neq y$,

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \mathbf{E}_x(Y_1) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}_x(T_1 = k, X_k = y) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}_x(T_1 > k - 1, X_k = y) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}_x(T_1 > k - 1)P(x, y), \end{aligned}$$

la dernière identité s'obtenant en conditionnant par rapport à \mathcal{F}_{k-1}

Or, $P_x(T_1 > k - 1) = \mathbf{P}_x(X_1 = x, X_2 = x, \dots, X_{k-1} = x) = P(x, x)^{k-1}$. On obtient donc $Q(x, y) = P(x, y) \sum_{k \geq 0} P^k(x, x) = P(x, y)/(1 - P(x, x))$, et $Q(x, x) = 0$.

Remarquons que nous avons montré au passage que la loi de T_1 est géométrique de raison $P(x, x)$. C'est aussi la loi de $T_n - T_{n-1}$ sachant que $X_n = x$.

■

Remarque. — De la même manière, si A est une partie de E et si (X_n) est irréductible, on peut n'observer la chaîne qu'à ses passages en A , en posant $T_0 = \inf\{p \mid X_p \in A\}$, et $T_n = \inf\{p > T_{n-1} \mid X_p \in A\}$, dont on sait qu'ils sont tous finis presque sûrement. Alors, la suite $Y_n = X_{T_n}$ est une chaîne de MARKOV. Sa matrice de transition est déterminée par

$$Q(z, y) = P(z, y) + \sum_{z' \notin A} P(z, z')Q(z', y).$$

A titre d'exercice, le lecteur pourra vérifier que cette équation détermine entièrement la fonction $Q(z, y)$ sur $E \times E$, et que sa restriction à $A \times A$ est bien une matrice markovienne. (Indication : la matrice $P - Id$ restreinte à $A^c \times A^c$ est inversible.)

Bibliographie

- [1] P. Barbe and M. Ledoux. *Probabilité, De la licence à l'agrégation*. Espace 34, Belin, Montpellier, 1998.
- [2] C. Dellacherie and P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel*. Hermann, Paris, 1975. Chapitres I à IV, Édition entièrement refondue, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. XV, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1372.
- [3] C. Dellacherie and P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII*, volume 1385 of *Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics]*. Hermann, Paris, revised edition, 1980. Théorie des martingales. [Martingale theory].
- [4] G. Fayolle, V. A. Malyshev, and M. V. Menshikov. *Topics in the constructive theory of countable Markov chains*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] J. Neveu. *Martingales à temps discret*. Masson, Paris, 1972.
- [6] P. Toulouse. *Thèmes de Probabilités et Statistique, Agrégation de mathématiques*. Dunod, Paris, 1999.