Introduction à la dynamique des signaux

christophe.baehr@math.ups-tlse.fr

Météo-France / IMT-LSP Univ. Paul Sabatier

Formation Météo-Navigant - Toulouse 2009

Mercredi 28 Janvier 2009

Introduction à la dynamique du signal

1. Introduction et formalisation des mesures expérimentales.
2. Les processus aléatoires.
3. Représentation d'état des systèmes.
4. Discrétisation d'une fonction continue.
5. Analyse fréquentielle d'un signal.
6. Traitement de la mesure.
7. Filtrage non-linéaire.

Introduction et formalisation des mesures expérimentales

Introduction

- Signal = Série Temporelle.
- On peut traiter un signal comme une donnée quelconque.
- Mais pour appréhender le caractère temporel, il faut se doter d'outil spécifique.
- Le traitement du signal repose sur des modélisations ou sur des représentations.
- On distinguera les traitements :
  - linéaires numériques.
  - linéaires transformationnels.
  - non-linéaires aléatoires.
  - non-linéaires déterministes.

Formalisation des mesures expérimentales

- Notion de systèmes.
- On observe jamais directement les quantités d'un système physique.
- L'observation est toujours partielle, bruitée et indirecte.
- Le traitement du signal cherche à restituer la mesure de la quantité physique étudiée.
- Une première représentation fonctionnelle.
- Le langage correct pour les signaux et leurs opérateurs de traitement est celui des distributions.

Quelques mots sur les processus aléatoires

Les processus aléatoires

- Variables aléatoires : une **fonction** dépendante du temps et d'un aléa ω_t (paramètre aléatoire): $\varepsilon_t = f(t, \omega_t, \dots)$.

- Rappel sur une probabilité.

- Difficulté des systèmes environnementaux.

- Les processus aléatoires sont donc des fonctions et leurs traitements opèrent dans les espaces fonctionnels.

Les processus aléatoires

- On appelle **Moyenne Empirique** d'une famille $(X^i)_{i=1}^{i=N}$ la quantité

$$\overline{X} = \frac{1}{N} . \sum_{i=1}^{i=N} X^i$$

- Soit $(X^i)_{i=1}^{i=N}$ une famille de donnée, et soit $(w^i)_{i=1}^{i=N}$ une famille de poids associée à (X^i). On appelle **Moyenne Pondérée** la quantité

$$\overline{X}^w = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} w^i . X^i}{\sum_{i=1}^{i=N} w^i}$$

- Si les poids sont identiquement égaux à 1, on retrouve la moyenne empirique.

Les processus aléatoires

- La probabilité $\mathbb{P}(X^i \in A) = p^i$ est un poids et on définit la moyenne pondérée par les probabilités quand N devient grand comme l'espérance de la variable aléatoire X:

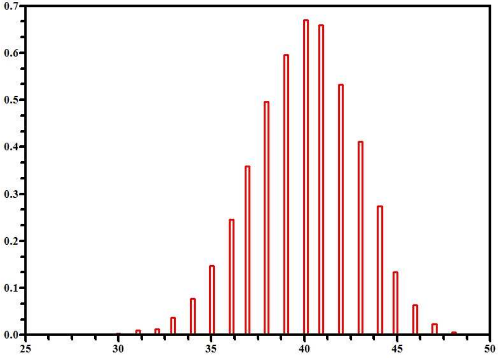
- Soit $(X^i)_{i=1}^{i=N}$ une famille discrète de donnée, et soit $(p^i)_{i=1}^{i=N}$ les probabilités d'occurrence associées à (X^i) . On appelle **Espérance** la quantité

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{i=N} p^i.X^i}{\sum_{i=1}^{i=N} p^i}$$

- Si les p^i forment une famille de probabilité, $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{i=N} p^i = 1$

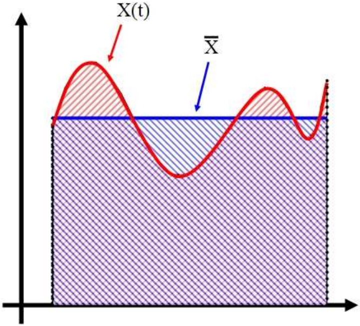
Les processus aléatoires

- Lien entre un histogramme empirique et les probabilités.



Les processus aléatoires

- Conséquences du passage au temps continu.



- Ecriture intégrale de l'espérance $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_\Omega \varphi(\omega)\mathbb{P}^X(d\omega)$

- Les distributions généralisent les mesures de probabilités.

Représentation d'état des systèmes

Représentation d'état

- Les paramètres qui définissent l'état d'un système et dont les variations indiquent des modifications de l'état du système indépendamment des transformations subies sont appelées les variables d'état .

- Les relations entre les variables d'état sont appelées équation d'etat.

- Les relations donnant l'évolution temporelle des variables d'état sont appelées équations de dynamique.

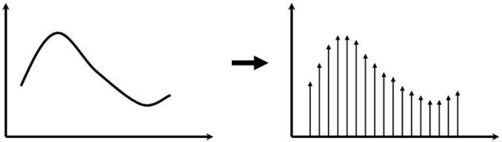
- Diagrammes fonctionnels simples, avec commandes, avec retour d'état, avec aléas.

Représentation d'état

- Systèmes aléatoires.
- Marches Aléatoires.
- Processus Markovien.
- Lois de transition des systèmes Markoviens.
- Parallèle avec les systèmes dynamiques aléatoires.

Discrétisation des fonctions continues

Discrétisation d'un signal

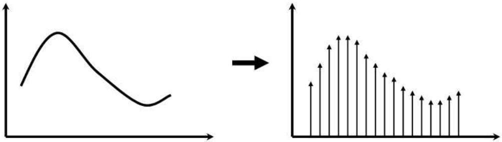


- Discrétisation d'un signal continu avec une fréquence fixe.

$$Y^*(t) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} Y(i.\Delta t).\delta_0(t - i.\Delta t)$$

- Formule traditionnelle mais elle n'a de sens que dans l'espace des distributions.

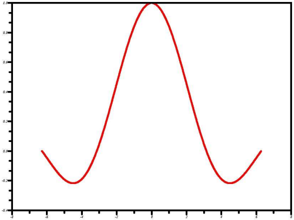
Discrétisation d'un signal

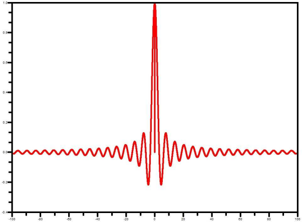


- Sinus Cardinal ou fonction de Shannon

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} Y_i . \frac{sin(\frac{\pi t}{\Delta t} - n.\pi)}{\frac{\pi t}{\Delta t} - n.\pi} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} Y_i . sinc(\frac{\pi t}{\Delta t} - n.\pi) \end{aligned}$$

Discrétisation d'un signal



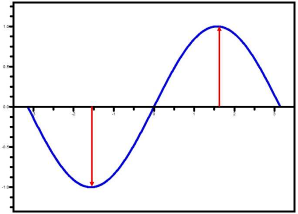


- <u>Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon</u>

Si la fréquence d'échantillonnage d'un signal est au moins supérieure au double de la fréquence la plus haute contenue dans le signal, on obtient une information discrète équivalente à l'information continue reconstruite par la formule de Shannon.

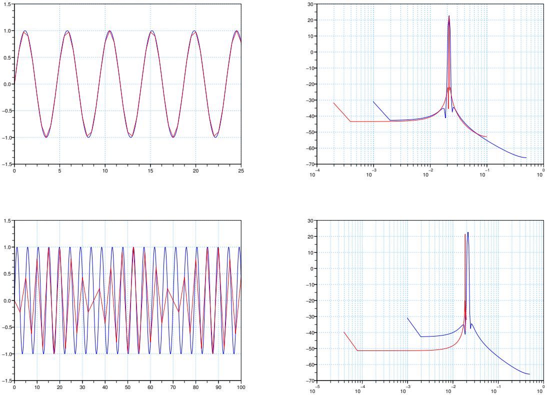
Discrétisation d'un signal

- Discrétisation d'une onde ou d'un sinus dans $[-\pi, \pi]$



- Fonction Rectangle pour encadrer une fréquence.
- Théorème de Shannon et Repliement de Spectre.

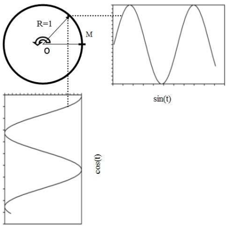
Discrétisation d'un signal



Analyse fréquentielle d'un signal

Les harmoniques pures

- On prend un point M sur un cercle de rayon 1 en rotation.



- Le nombre complexe $z(t)$ dispose d'une représentation en exponentielle complexe: $z(t) = e^{i.t} = cos(t) + i\ sin(t)$. C'est la formule d'Euler.
- Une harmonique pure est une fonction f de la forme $f(t, \omega) = A(\omega).e^{i\omega t}$.

Eléments d'Analyse Hilbertienne

- On munit l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable E d'un produit scalaire noté $< \cdot, \cdot >$.

- Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de vecteur.

- Elle est dite orthonormale si $\forall n, m \in \mathbb{Z} < e_n, e_m >= \delta_{n,m}$.

- On dit que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne si elle engendre E c'est à dire que tout fonction f de E va pouvoir s'écrire

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} < f, e_n > e_n \ .$$

Transformée de Fourier

- Dans l'écriture $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} < f, e_n > e_n$, le $n$ième terme coordonnée $< f, e_n >$ est la projection de f sur e_n.

- Soit la famille particulière $\{e_n\} = \{\frac{1}{\sqrt{2.\pi}} e^{i.n.\xi}\}$ avec $\xi \in [0, 2\pi]$.

- On définit alors $\forall f \in E$, le produit scalaire

$< f, e_n >= \int_0^{2.\pi} f(\xi) e^{-i.n.\xi} d\xi.$

Donc avec cette base particulière on obtient

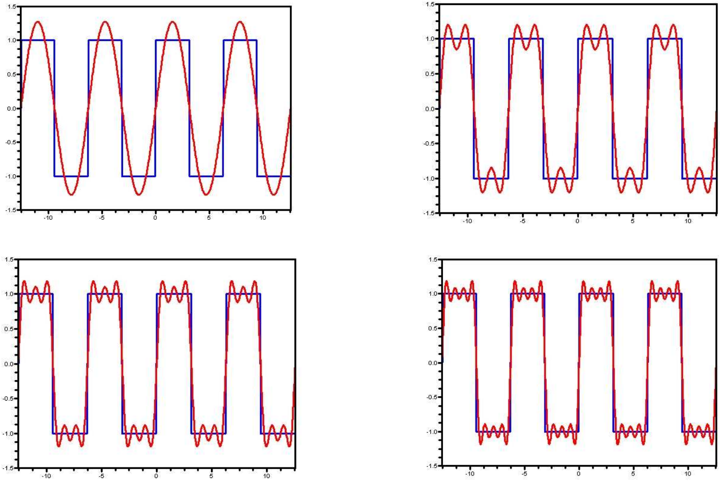
$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} < f, e_n > \; e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} < f, e_n > \; e^{i.n.t}$$

- On appelle alors Transformée de Fourier (discrète) l'application :

$$f, n \xrightarrow{\text{TF}} < f, e_n >= \widehat{f}(n)$$

Transformée de Fourier

- Un exemple simple



Conséquences pour les séries de données.

- Toute série discrète finie de longueur N peut être vue comme une série périodique de période $\geq N$.

- Une série temporelle discrète de longueur finie est la somme finie d'harmoniques pures.

- Si la série de donnée de longueur N, à un pas de discrétisation Δt
  - Fréquence la plus élevée (fréquence de Nyquist) $f_0 = \frac{1}{2.\Delta t}$.
  - Fréquence la plus basse (fréquence de Rayleigh)$f_R = \frac{1}{N.\Delta t}$.

Densité Spectrale de Puissance.

- La DSP, densité spectrale de puissance, est un outil important en traitement du signal, elle permet de donner la puissance portée par chaque fréquence dans un signal X_t.

- On définit la covariance entre 2 instants t_1 et t_2 par la quantité $R_{X,X}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}]$. L'espérance est prise selon la loi du processus X_t.

- Pour un processus stationnaire, on appele fonction d'autocorrélation, $R_{x,x}(t) = \mathbb{E}[x(\tau)x(\tau + t)]$.

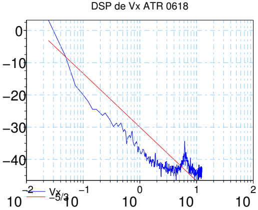
- La fonction d'autocorrélation est homogène à une énergie, on peut aussi la rapprocher d'une variance.

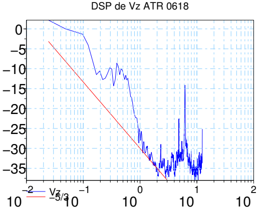
- On définit la DSP comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation:

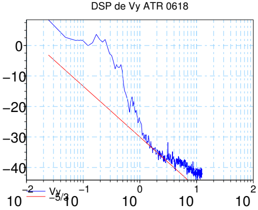
$$S_{X,X}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{X,X}(t) e^{-2i\pi\xi t} dt$$

Densité Spectrale de Puissance.

- Un exemple avion (mesures de vitesses à 25 Hz issues de l'INS)



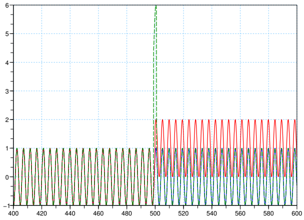


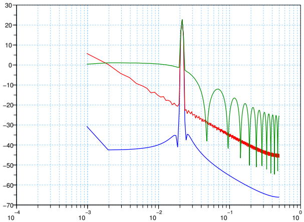


DSP à 25 Hz 1024 points pour Vx , Vy et Vz du vol ATR N° 0618 entre 115000 et 120000

Densité Spectrale de Puissance.

- Illustration de perturbations sur une sinusoïde

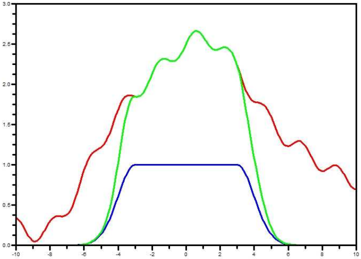




Analyses locales d'un signal

Analyses locales

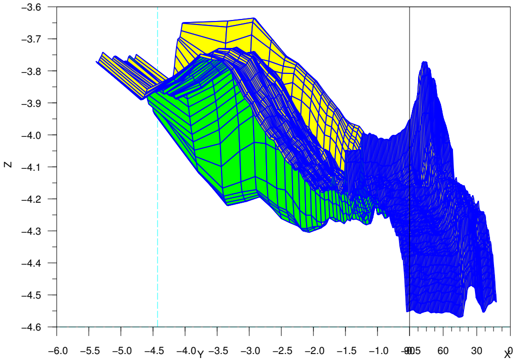
⊙ Une première idée, le fenétrage



⊙ On obtient alors des transformées de Fourier fenétrées et des Spectrogrammes.

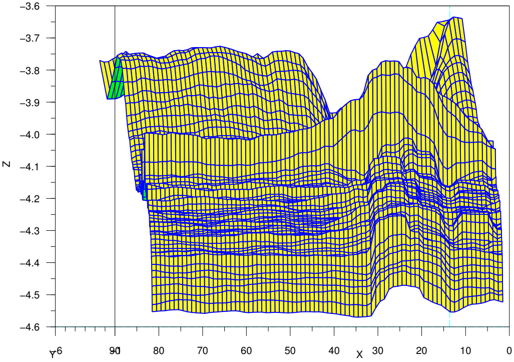
Spectrogramme.

- Un exemple avion (VRy As0618)



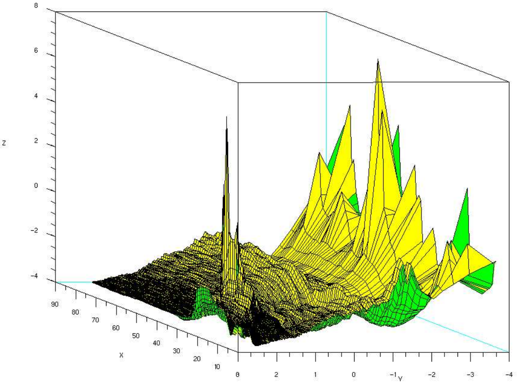
Spectrogramme.

- Un exemple avion (VRy As0618)



Spectrogramme.

- Un autre moment de VRy As0618



Analyses locales

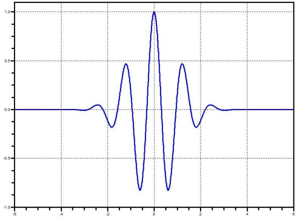
- On peut avoir besoin de localiser de manière plus fine, on change alors de base de décomposition.

- Soit une fonction ψ avec de bonnes propriétés, on va la dilater et en modifier sa localisation en temps et sa fréquence, et on va construire une nouvelle base hilbertienne.

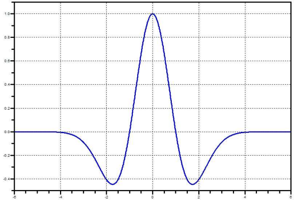
- $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(\frac{t-b}{a})$, a est le facteur d'espace, b est le facteur temporel, ψ est l'ondelette mère, ψ_{ab} est la famille d'ondelettes.

Analyses locales

- Ondelette de Morlet

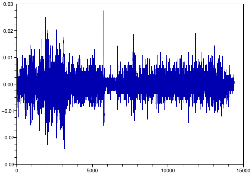


- Ondelette dite du Chapeau Mexicain

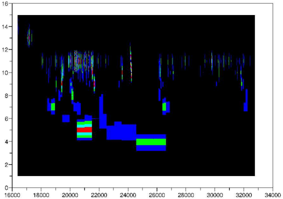


Analyses locales

- Exemple de signal, un échantillon de Vry du As0618



- Avec son scalogramme :



Traitement de la mesure expérimentale

Traitement de la mesure

- La mesure a un but.
- Est-on sûr de mesurer ce qu'on dit que l'on mesure ?
- Le traitement de la mesure repose toujours sur un modèle.
- Soit le système linéaire de dynamique et d'observation:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & A_n.X_n + B_n.U_n \\ Y_n & = & C_n.X_n \end{array} \right.$$

Traitement de la mesure

- Commandabilité :

Un système est commandable (ou contrôlable) si tout point X de l'espace d'état E est atteignable en temps fini.

- Observabilité :

Un système est observable si par l'observation des entrées et des sorties sur un intervalle de temps fini, on peut déterminer l'état initial du système.

- Ergodicité :

Un système aléatoire est ergodique si tous les points de l'espace d'état sont visités un nombre infini de fois (plus quelques bricoles : irréductible et apériodique).

Traitement de la mesure

- Critère de Kalman de commandabilité dans le cas linéaire:
La matrice $[B \mid A.B| \dots |A^{N-1}.B]$ *est de rang* d. *(*N *le temps,* d *la dimension de* E*)*

- Critère d'observabilité dans le cas linéaire:
La matrice $[C| \; C.A| \dots |C.A^{N-1}]^T$ *est de rang* d.

- Critère d'ergodicité pour un système Markovien:
Une chaine de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est ergodique s'il existe une probabilité* μ, *telle que pour tout état initial* X_0, *la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en loi vers* μ.

- En dehors de ces situations, il faut s'en assurer au cas par cas.

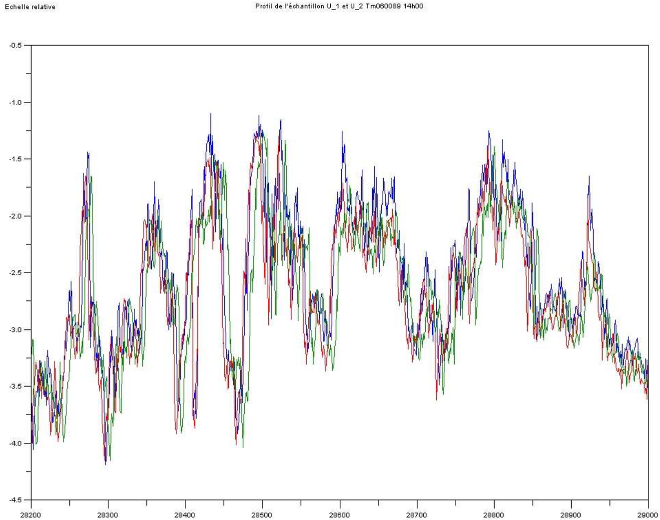
- Mais une fois que l'on s'est posé ces questions, on peut effectivement passer à leur traitement.

Traitement de la mesure

- Il existe des mesures directes et des mesures déduites.
- Toujours traiter les paramêtres en amont, bruts, à la fréquence de numérisation.
- On peut lister les étapes typiques des séquences de traitement.
- Tendance, cycles, de-spike.
- Pour les mesures déduites, il conviendrait de colocaliser, d'acquérir à la même fréquence et de manière synchronisée les mesures brutes.

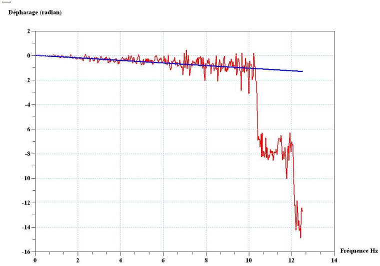
Traitement de la mesure

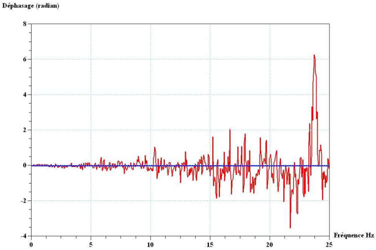
⊙ On peut colocaliser empiriquement automatiquement. Un exemple de 2 anémomètres côte-à-côte (*bleu* et *vert* $\rightarrow$ *rouge*):



Traitement de la mesure

- Le déphasage avant/aprés:



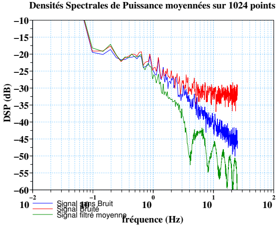


Traitement de la mesure

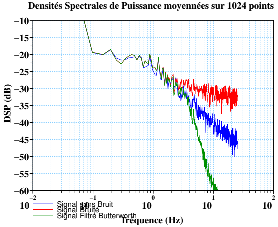
- Les chaines de traitement reposent en général sur des approximations (valables aux échelles considérées) des équations d'état pour des variables non bruités.
- Il faut être précautionneux sur le domaine d'application notamment en présence de bruit.
- On doit alors filtrer les perturbations.
- On peut distinguer filtrage linéaire et estimation non-linéaire.

Exemple de filtrages linéaires

- La moyenne mobile

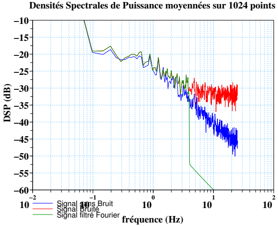


- Le filtre Butterworth du 2nd ordre

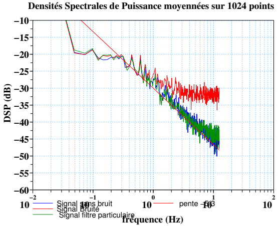


Exemple de filtrages linéaires

- Le filtre en troncature de Fourier



- Un filtre particulaire (mais on change de domaine)



Filtres non-linéaires aléatoires

Introduction à l'estimation probabiliste.

- L'effort porte alors sur la modélisation stochastique de l'état, de la mesure et de ses perturbations.
- Les plus grandes difficultés viendront de la partie aléatoire.
- Avec l'observabilité, la commandabilité, il faudra assurer le caractère Markovien du système.
- L'estimation non-linéaire se rapproche alors de l'assimilation, les techniques peuvent être partagés.
- L'estimation probabiliste est l'estimation des lois de probabilités.

Introduction à l'estimation probabiliste.

- Soit un état évoluant dans le temps $(X_0, \dots, X_n)_{n \geq 0}$ observé par $Y_0, \dots, Y_n$ avec pour tout $n \geq 0$, $Y_n = H_n(X_n, V_n)$ où V_n est un bruit.

- Le filtrage non-linéaire des processus stochastiques est l'estimation des lois conditionnelles:

$$
\begin{aligned}
\hat{\eta}_n &= Loi[(X_0, \dots, X_n) \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n] \\
\eta_n &= Loi[(X_0, \dots, X_n) \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_{n-1} = y_{n-1}]
\end{aligned}
$$

- On montre que le filtrage non-liénaire se résoud par un algorithme séquentiel:

$$
\eta_n \xrightarrow{S_{\boldsymbol{n},\eta_{\boldsymbol{n}}}} \hat{\eta}_n = \eta_n \; S_{n,\eta_{\boldsymbol{n}}} \xrightarrow{M_{\boldsymbol{n+1}}} \eta_{n+1} = \hat{\eta}_n \; M_{n+1}
$$

Solutions particulaires des filtres non-linéaires

- Dans le cas linéaire Gaussien, il existe un estimateur optimal (pouvant être écrit explicitement) : le filtre de Kalman.

- Mais les équations intégrales non-linéaires (générales) ne sont pas calculables analytiquement.

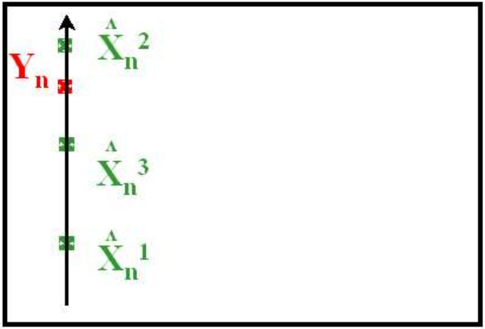
- On utilise une approximation particulaire. C'est à dire que l'on échantillonne les lois du filtrage en utilisant des états-test de l'espace des phases que l'on nomme particules.

- Le filtre particulaire approche le filtre non-linéaire optimal quand le nombre de particules devient grand.

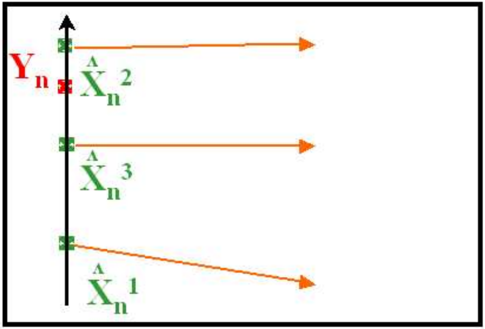
- Méthode de Monte-Carlo.

Le filtre particulaire en images

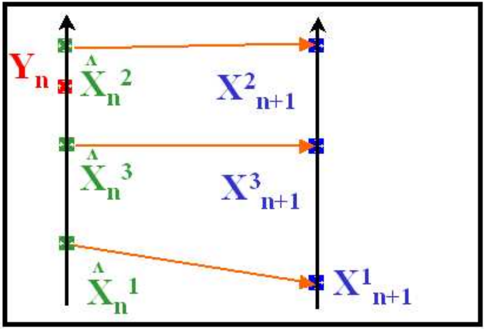
Le filtre particulaire en images



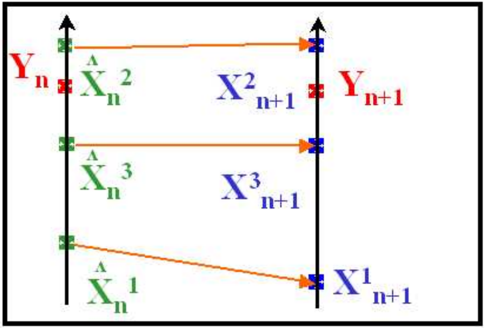
Le filtre particulaire en images



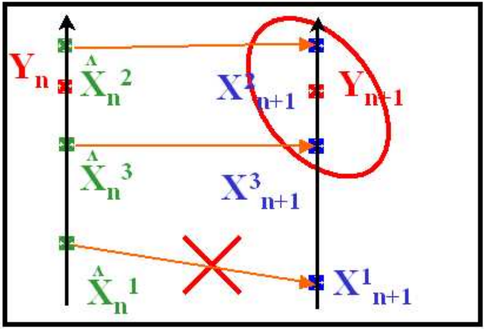
Le filtre particulaire en images



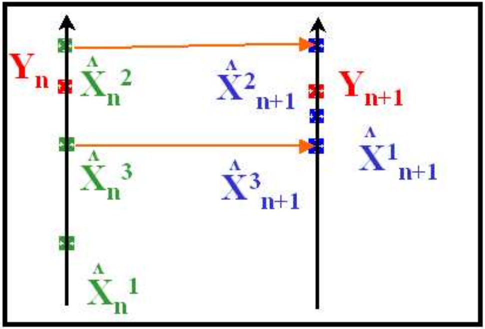
Le filtre particulaire en images



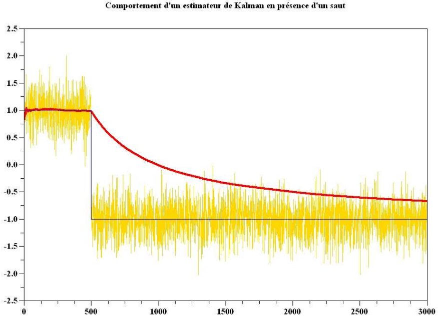
Le filtre particulaire en images



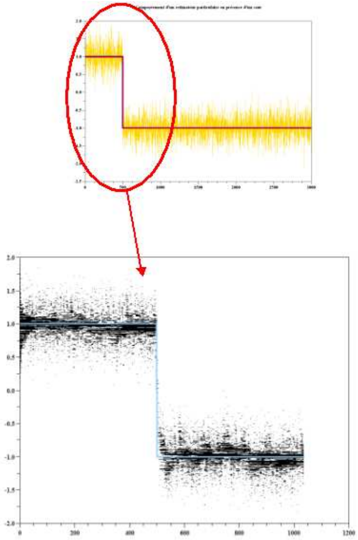
Le filtre particulaire en images



Le filtre de Kalman en action



Le filtre particulaire en action

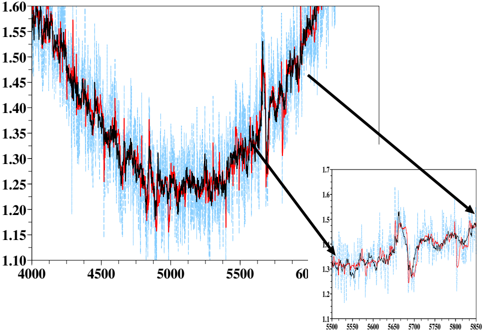


Exemple du Filtrage du vent

- On peut filtrer les mesures d'un anémomètre sonique que l'on bruite artificiellement (fréquence > 10 Hz).
- Il faut utiliser un modèle stochastique de turbulence.
- Il est nécessaire de modéliser la mesure mobile par un processus stochastique.
- On doit modéliser le capteur et ses perturbations.
- La description complète pour une plateforme de mesure quelconque est un travail de recherche en cours.

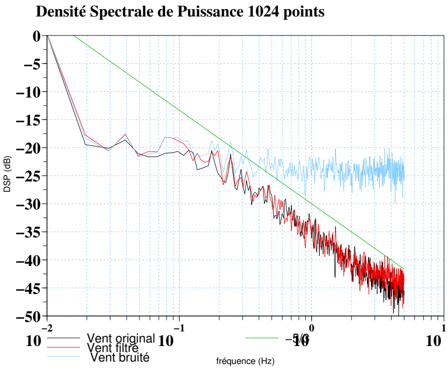
Filtrage d'un vent 1D simulé

- On débruite avec 300 particules le signal perturbé.



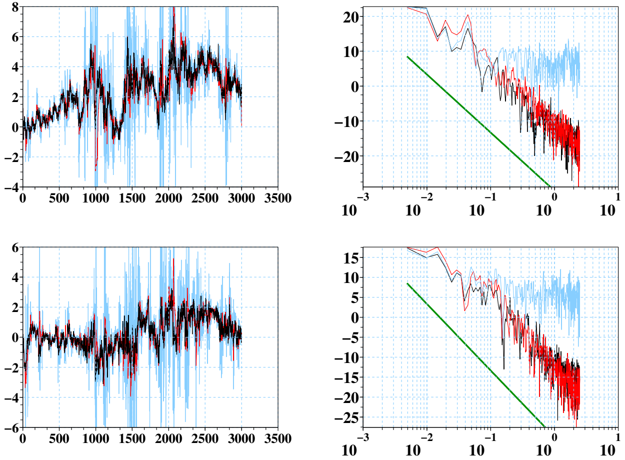
Filtrage d'un vent 1D simulé

- On complète l'analyse en examinant les spectres de puissance.



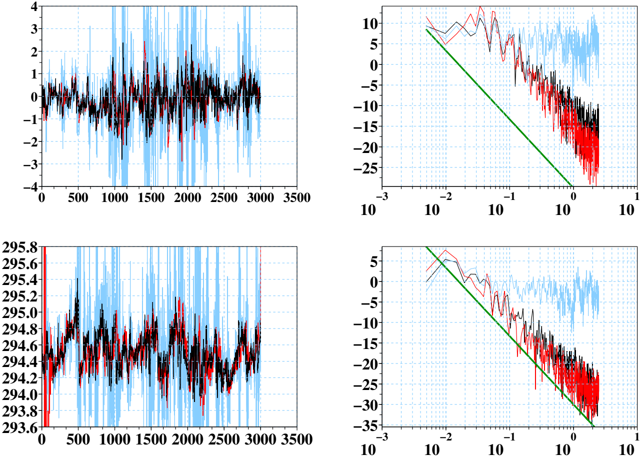
Filtrage d'un vent 3D réel

- Séries temporelles et DSP des composantes U et V de référence, bruitées et filtrés. Bruit corrélé à la variance locale du signal, estimateur à 800 particules.



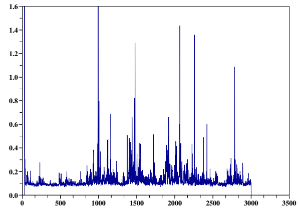
Filtrage d'un vent 3D réel

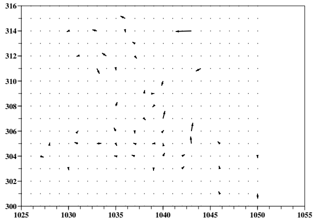
- Séries temporelles et DSP des composantes W et T de référence, bruitées et filtrés. Bruit corrélé à la variance locale du signal, estimateur à 800 particules.

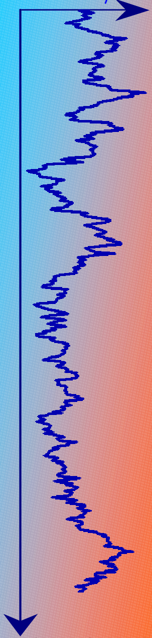


Filtrage d'un vent 3D réel

⊝ Séries temporelles des paramètres du milieu turbulent, estimateur à 800 particules.

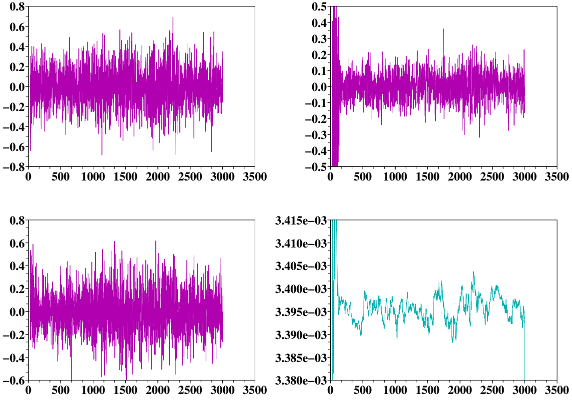






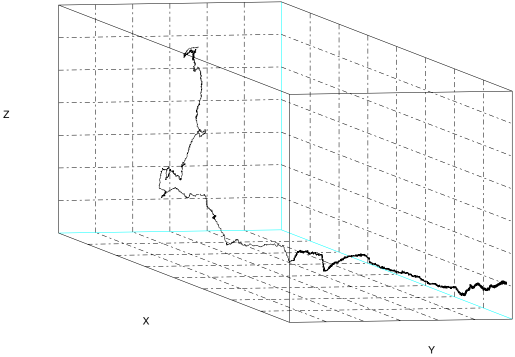
Filtrage d'un vent 3D réel

⊝ Séries temporelles des paramètres du milieu turbulent, estimateur à 800 particules.



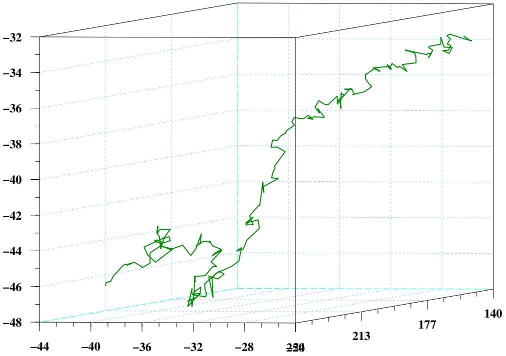
Filtrage d'un vent 3D réel

- Pseudo-trajectoires des 800 particules.



Filtrage d'un vent 3D réel

- Pseudo-trajectoire d'une particule sur 200 points.



Qu'avons-nous vu ?

1. Introduction et formalisation des mesures expérimentales.
2. Les processus aléatoires.
3. Représentation d'état des systèmes.
4. Discrétisation d'une fonction continue.
5. Analyse fréquentielle d'un signal.
6. Traitement de la mesure.
7. Filtrage non-linéaire.