Modélisation et Filtrage non-linéaire des mesures discrètes sur un fluide turbulent. Application au débruitage des mesures du vent atmosphérique.

AMA-2008 - Toulouse - Jeudi 24 Janvier 2008

Christophe Baehr

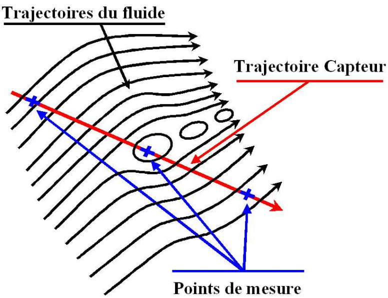
Météo-France / Univ. Paul Sabatier

http://www.math.univ-toulouse.fr/∼baehr/

METEO FRANCE
Toujours un temps d'avance

Mesures atmosphériques

- En météorologie expérimentale, les plates-formes de mesures sont multiples.
- Une nécessité d'avoir des mesures de plus en plus fines et rapides.
- On a besoin de :
  - Améliorer les systèmes de mesures et d'acquisition.
  - Mettre en place un filtrage non-linéaire des signaux.
- Difficulté: échantillonnage ponctuel d'un champ multidimensionnel



Processus d'acquisition d'un champ de vecteur le long d'un chemin aléatoire

Acquisition d'un champ de vecteur

- Définition: On se donne un chemin aléatoire X_t dans un espace E, espace des sites. On donne ensuite un champ de vecteurs aléatoire $X'(t,x)$ dans l'espace des phases E' indéxé par le temps $t \in [0,T]$ et des points $x \in E$.
On appelle acquisition de $X'_{t,x}$ le long du chemin X_t le processus aléatoire $A_t = X'_{t,X_t}$.

- Exemple : Soit $U_{t,x}$ un champ Eulérien donné par exemple une Equation Différentielle Stochastique. Soit $X_t^{x_0}$ le flot de l'EDS partant du point x_0. Alors la quantité $V_t = U_{t,X_t^{x_0}}$ est appelée acquisition Lagrangienne.

Acquisition d'un champ de vecteur

⊕ On se donne un système d'acquisition (X_t, A_t) à valeurs $E \times E'$. On suppose que la variable aléatoire (X_t, A_t) possède une densité p^{X_t, A_t} par rapport à la mesure de Lebesgue et est markovien. On a alors pour K^δ un noyau de régularisation faible de la mesure de Dirac:

$$\mathbb{E}(f(A_t)|X_t) = \lim_{\delta \to 0} \mathbb{E}^\delta(f(A_t)|X_t)$$

avec

$$\mathbb{E}^\delta(f(A_t)|X_t) = \int_{E \times E'} f(a)\ K^\delta(X_t, z)\ p^{A_t|X_t}(a|z)\ da\ dz$$

⊕ Exemple 1: Soit $(X_t^{x_0}, V_t)$ le système d'acquisition Lagrangien précédent. Avec le noyau Gaussien $K^\delta(X_t, x) = e^{\frac{-\|X_t - x\|^2}{2\delta}}$ et $\mathbb{F}^\delta(f(V_t))(X_t) = \int_{E \times E'} f(v)\ K^\delta(X_t, x)\ p^{X_t, A_t}(x, v)\ dx\ dv$, on a :

$$\mathbb{E}(f(V_t)|X_t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\mathbb{F}^\delta(f(V_t))(X_t)}{\mathbb{F}^\delta(1)(X_t)}$$

Acquisition d'un champ de vecteur

- Exemple 2: On prend un système d'acquisition général (X_t, A_t) dans un milieu localement homogène en loi, c'est à dire que pour tout $x \in E$ il existe une boule $B(x, \varepsilon)$ telle que pour tout élément y de $B(x, \varepsilon)$, on a $\mathbb{P}(A_t \in da \mid X_t = x) = \mathbb{P}(A_t \in da \mid X_t = y)$
Alors en se donnant pour chaque temps t une boule B_t^{ε}, on s'intéressera à l'espérance $\mathbb{E}(f(A_t)|X_t \in B_t^{\varepsilon})$

- Cette nouvelle acquisition est le conditionnement d'un champ à une boule.

- En modélisation sur point de grille c'est la méthode à utiliser pour estimer les lois de probabilité d'un milieu localement homogène.

Modèlisation des mesures sur un fluide

Application de l'acquisition discrète d'un champ de vecteur

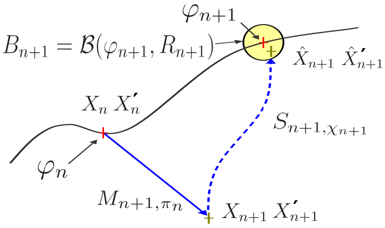
- On va maintenant considérer maintenant un milieu homogène uniquement décrit par un modèle Lagrangien. On se place dans le cas discret.

- Il faut alors mixer 2 systèmes d'acquisition :
  - l'un étant l'acquisition Lagrangienne : $(X_n^{x_0}, X'_{n,X_n^0}) = (X_n, X'_n)$
  - l'autre étant l'acquisition du système Lagrangien sur un chemin indépendant du milieu φ_n : (φ_n, X'_n)

- On définit alors pour tout instant la boule $B(\varphi_n, \varepsilon)$. On cherche alors à estimer pour toute fonction mesurable bornée f :

$$\mathbb{E}[\ f(X_n, X'_n) \mid X_0 \in B_0, \ldots, X_n \in B_n\ ] \stackrel{def}{=} \chi_n(f)$$

- L'algorithme d'estimation de χ_n est de type génétique avec un processus de mutation/sélection.
- La sélection est le conditionnement à chaque boule, la mutation repose sur le modèle Lagrangien.



- χ_n est alors un système dynamique $\chi_{n+1} = \chi_n.S_{n,\chi_n}.M_{n+1,\pi_n}$ de loi initiale χ_0

Processus de filtrage non-linéaire d'un signal bruité

Le filtrage stochastique non-linéaire ...

- Filtrer c'est estimer: retrouver un état observé partiellement à partir de son observation pertubée Y_n.
- Le problème de filtrage repose alors sur 2 équations (une sur la dynamique de l'état et l'autre sur l'observation Y_n).
- L'estimation de la loi du filtrage repose sur 2 étapes:
  - une prédiction (/mutation)
  - une correction (/mise à jour/sélection)
- Dans le cas de la mesure des vitesses dans un fluide, c'est l'acquisition (X_n, X_n') qui est observée uniquement la composante X_n' qu'il faut débruiter.
- On se donne alors un modèle Lagrangien pour la vitesse du fluide turbulent.

Adaptation au problème de filtrage du modèle physique

Modèle Euler/Lagrange de Pope

discrétisé et adapté pour le problème de filtrage

- Ce sont des modèles d'évolution (Lagrangiens) de particules sans inertie, utilisant des moyennes locales (Eulériennes) placés dans la turbulence homogène isotrope.
- On retient ici le modèle simplifié:

$$dV_t = -\nabla_x < p > \ dt - (\frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (V_t - < v >) \ dt + \sqrt{C_0 \varepsilon_t} dW_t$$

- Ce modèle fait parti d'une classe d'équation de dit de McKean-Vlasov à champ moyen, très étudié en modélisation stochastique.
- Nous avons étendu l'étude de ces processus dans le cas du filtrage non-linéaire.

- Mais il faut profondément le transformer pour le rendre compatible avec le problème de filtrage.

Modèle Euler/Lagrange de Pope

discrétisé et adapté pour le problème de filtrage

$$\Delta V_{n+1} = -\nabla < p > \Delta t - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0\right) \frac{\varepsilon_n}{k_n} (V_n - < v >)\Delta t + \sqrt{C_0 \varepsilon_n} \Delta W_n$$

- Dans le cas du filtrage on considère l'acquisition Lagrangienne (X_n, V_n) supposée Markovienne où seule la vitesse est observée.

- On approche la moyenne Eulérienne $< \cdot >$ par l'approximation faible $\Pi_n^\delta(\varphi)(x) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}_\delta(\varphi(V_n)|X_n = x)$, espérance régularisée de l'acquisition Lagrangienne.

- Pour l'énergie cinétique turbulente $k_n \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\Pi_n^\delta[(V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n))^2](X_n)$

- Le gradient de pression et la dissipation turbulente seront appris au travers des observations:

$$\mathbb{E}(\Delta V_n) = -\nabla_x < p > \ \Delta t \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(Z_n)$$
$$\mathbb{E}(\varepsilon_n) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(\Delta V_n \Delta V_n)/(C_0 \Delta t)$$

Modèle Euler/Lagrange de Pope

discrétisé et adapté pour le problème de filtrage

$$\Delta V_{n+1} = -\nabla < p > \Delta t - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} C_0) \frac{\varepsilon_n}{k_n} (V_n - < v >)\Delta t + \sqrt{C_0 \varepsilon_n} \Delta W_n$$

- Les espérances sont conditionnées aux observations et calculées sur l'ensemble de particules filtrantes.

- Le modèle de Pope discrétisé, conditionné aux observations s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{n+1} & = & X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta B_n^X \\ V_{n+1} & = & V_n + \mathbb{E}(Z_n | Y_0 \ldots Y_n) \\ & - & C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \ldots Y_n)}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n^i)] \, \Delta t \\ & + & \sqrt{C_0 \mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \ldots Y_n)} \, \Delta B_n^V \end{array} \right.$$

- Et l'équation d'observation : $Y_n = h(V_n) + \sigma^Y W_n^Y$
- On a obtenu par les observations, une nouvelle méthode de fermeture.

Filtrage des mesures de vitesses d'un fluide turbulent

Filtrage Conditionnel
pour un fluide observé

- On utilise un algorithme particulaire pour estimer les paramètres du fluide.

$$\text{Filtre optimal} = (\ \text{Prédiction} \ / \ \text{Correction}\ )$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{Filtre particulaire} = (\ \text{Mutation} \ / \ \text{Sélection}\ )$$

- L'étape de Sélection est cruciale, c'est elle qui apprend le fluide.
- La prédiction utilise les paramètres appris, elle est donc conditionnée aux observations.
- La convergence de l'ensemble est assurée sur les arbres généalogiques

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\text{lignes ancestrales}^{(i)}} \overset{N\to\infty}{\sim} \mathcal{L}oi(\mathcal{X}_0,\ldots,\mathcal{X}_n|\mathcal{Y}_0,\ldots,\mathcal{Y}_n)$$

(cf P. Del Moral *Feynman-Kac Formulæ, Genealogical and Interacting Particle Systems*, Springer 2004)

Filtrage Conditionnel

Processus d'acquisition appliqué au filtrage

- On définit, pour tout temps n, une boule
$B_n = \{(x, v) : d(x, m_n) \leq R\}$ où $m_n = \int x \; \eta_n(dx)$
- On localise alors le filtrage de fluide dans des régions B_n

$$\mathcal{X}_n^B \in B_n \xrightarrow{M_{n+1,\hat{\eta}_n^B}} \mathcal{X}_{n+1} \stackrel{def}{=} (X_{n+1}, V_{n+1}) \xrightarrow{\mathcal{S}_{\eta_{n+1}}^{B_{n+1}}} \mathcal{X}_{n+1}^B \in B_{n+1}$$

en définissant le noyau de localisation :

$$S_\eta^B(x, dy) = \mathbb{1}_B(x)\delta_x(dy) + \mathbb{1}_{B^c}(x)\frac{\mathbb{1}_B(y)\; \eta(dy)}{\eta(B)}$$

et les lois du filtrage localisées :

$$\hat{\eta}_n^B = \mathcal{L}oi(\mathcal{X}_n | \mathcal{X}_0 \in B_0, \ldots, \mathcal{X}_n \in B_n, \mathcal{Y}_0^n)$$

$$\eta_{n+1} = \mathcal{L}oi(\mathcal{X}_{n+1} | \mathcal{X}_0 \in B_0, \ldots, \mathcal{X}_n \in B_n, \mathcal{Y}_0^n) = \hat{\eta}_n^B \; M_{n+1,\hat{\eta}_n^B}$$

Applications:

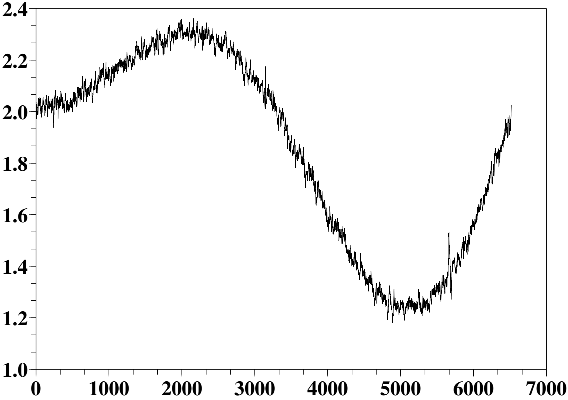
Vent simulé 1D

Vent réel 1D à 3D

Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 1D simulé

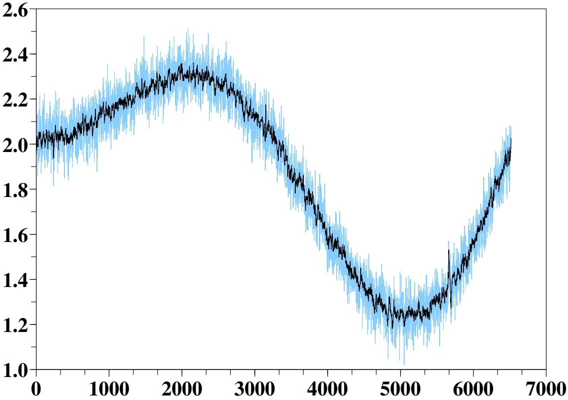
On construit un vent 1D simulé en utilisant le modèle de Pope discrétisé et une modélisation particulaire.



Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 1D simulé

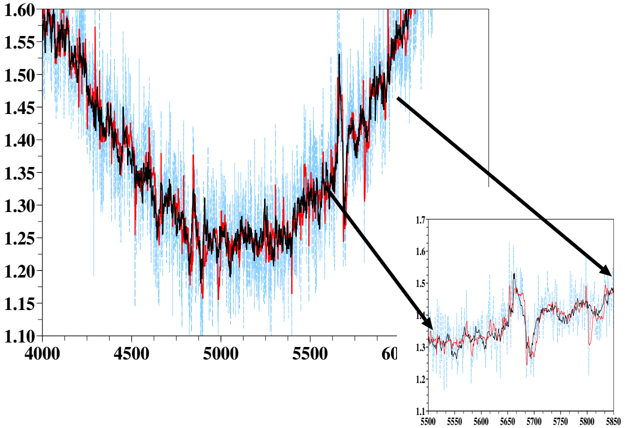
On rajoute un bruit blanc artificiel au signal construit. C'est au travers de ce signal bruité que l'on va chercher à estimer le vent.



Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 1D simulé

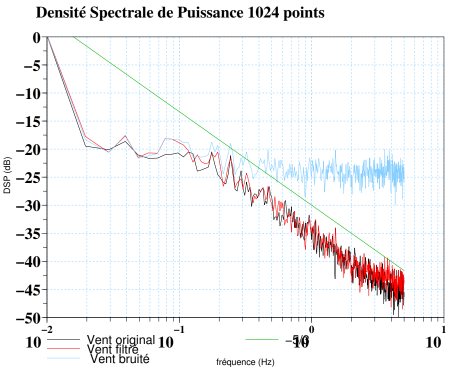
Le filtre particulaire nous restitue des estimés en rouge que l'on compare à la réalité en noir.



Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 1D simulé

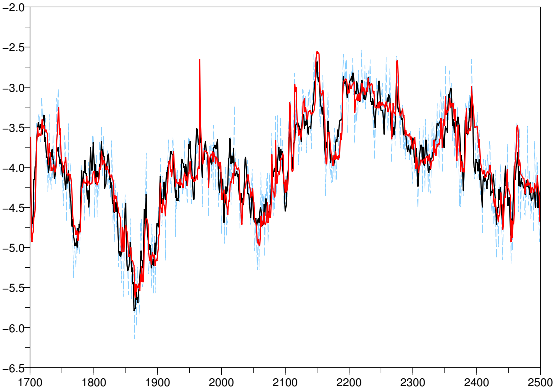
On peut vérifier sur les spectres de puissance la qualité des signaux filtrés.



Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 1D réel bruité artificiellement

On a également testé le filtrage de mesures réelles bruitées artificiellement, d'abord en 1D.



Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 3D réel bruité artificiellement

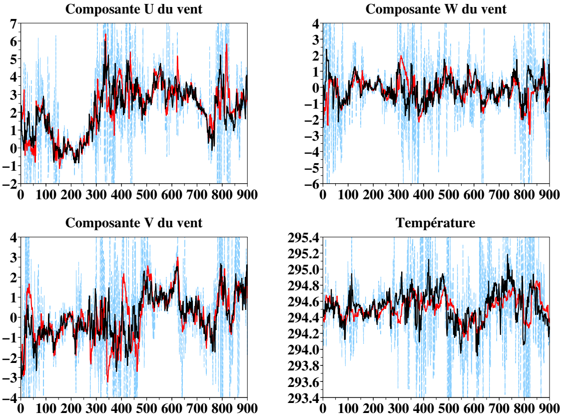
- Pour passer en 3D il a fallu changer de modèle pour correspondre à un fluide géophysique.
- Nous sommes parti du modèle de dispersion proposé par Das et Durbin pour la turbulence stratifiée pour écrire:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
dV_{h,t} & = & -\nabla_h \overline{p} - \frac{C_1}{2}\frac{\varepsilon_t}{k_t}(V_{h,t} - \overline{V}_{h,t}).dt \\
 & & \quad +(C_{2\theta} - 1).(W_t - \overline{W}_t).\frac{d\overline{V}_{h,t}}{dz}.dt + (C_0.\varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^{V_h} \\
dW_t & = & d\overline{W}_t - \frac{C_1}{2}\frac{\varepsilon_t}{k_t}(W_t - \overline{W}_t).dt \\
 & & \quad +(1 - C_{5\theta}).\beta.g.(\theta_t - \overline{\theta}_t).dt + (C_0.\varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^{W} \\
d\theta_t & = & d\overline{\theta}_t - \left(C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}\right)\frac{\varepsilon_t}{k_t}(\theta_t - \overline{\theta}_t).dt \\
 & & \quad -(W_t - \overline{W}_t).\frac{d\overline{\theta}_t}{dz}.dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^{\theta}
\end{array}\right.$$

Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 3D réel bruité artificiellement

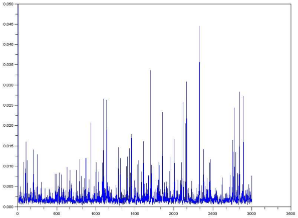
Nous avons filtré des mesures réelles (3D + Température) bruitées artificiellement.

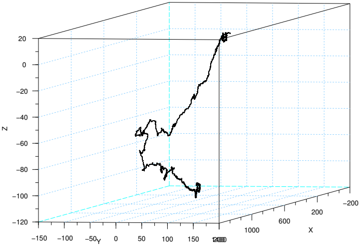


Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 3D réel bruité artificiellement

Par l'utilisation du modèle, le filtrage permet également une estimation haute cadence des paramètres caractéristiques de la turbulence (taux de dissipation, gradients verticaux, coefficients de flottabilité,...), mais aussi de la pseudo-trajectoire de l'acquisition.



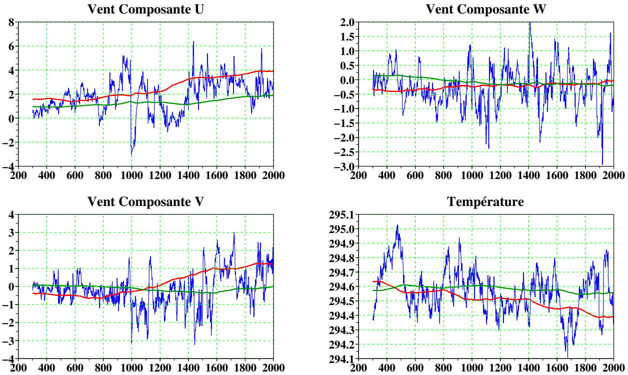


Quelques Perspectives ....

- Adaptation du modèle géophysique à la turbulence atmosphérique.
- Travailler sur l'estimation par cette technique de paramètres turbulents compatibles avec les modèles météos.
- Le problème de filtrage est formulé pour des mesures pouvant être mobiles. Il faut vérifier l'acuité de la solution sur données simulées et réelles.
- Il y a des réflexions à mener sur l'étape de sélection du processus d'acquisition. Y-a-t-il des solutions plus douces que le simple conditionnement à une boule ?
- Concernant la remarque sur le flot Lagrangien, il semble que l'on puisse faire une description de la dynamique du fluide par un processus de branchement. Il faut compléter cette approche et faire le lien avec des grandeurs physique, par exemple, avec les fréquences locales de la turbulence, l'échelle de Taylor, le coefficient de Hausdorff de l'écoulement, etc...

Application du Filtrage Particulaire

Cas d'un vent 3D réel bruité artificiellement



w'T' = 0.0125464

w'T' méthode classique = 0.0124804

tau ~ 0.2204135

tau méthode classique ~ 0.2105395

Calculs effectués sur l'ensemble de la période pour estimer :
$\mathbb{E}(w'T') \sim < w'T' >$ et $\tau \sim \sqrt{< u'w' >^2 + < v'w' >^2}$