

Méthodes particulières et fusion de données

François Caron

INRIA Bordeaux
Institut de Mathématiques de Bordeaux

8 mars 2010

Plan

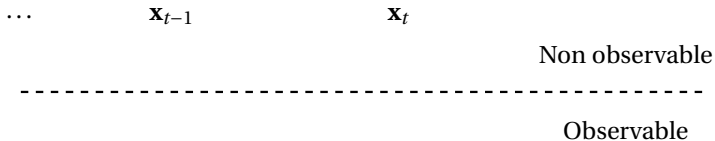
- 1 Introduction
- 2 Algorithmes pour la fusion bayésienne de données
 - Algorithmes déterministes
 - Filtrage particulière
- 3 Fusion de capteurs à modèles d'observation multiples
 - Modèles et algorithmes
 - Application à la localisation d'un véhicule terrestre

Plan

- 1 Introduction
- 2 Algorithmes pour la fusion bayésienne de données
 - Algorithmes déterministes
 - Filtrage particulière
- 3 Fusion de capteurs à modèles d'observation multiples
 - Modèles et algorithmes
 - Application à la localisation d'un véhicule terrestre

Introduction

- Etat caché \mathbf{x}_t ($t = 0, \dots$) qui n'est pas directement observable

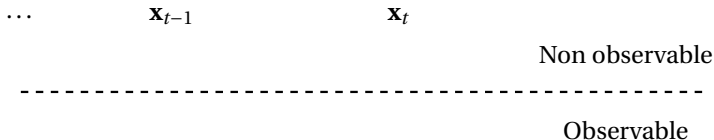


Introduction

- Etat caché \mathbf{x}_t ($t = 0, \dots$) qui n'est pas directement observable

Exemple

- Position et vitesse d'un véhicule $\mathbf{x}_t = \{X_t, Y_t, \dot{X}_t, \dot{Y}_t\}$

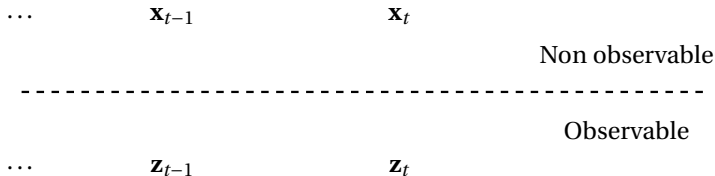


Introduction

- Etat caché \mathbf{x}_t ($t = 0, \dots$) qui n'est pas directement observable
- Mesures \mathbf{z}_t ($t = 1, \dots$)

Exemple

- Position et vitesse d'un véhicule $\mathbf{x}_t = \{X_t, Y_t, \dot{X}_t, \dot{Y}_t\}$

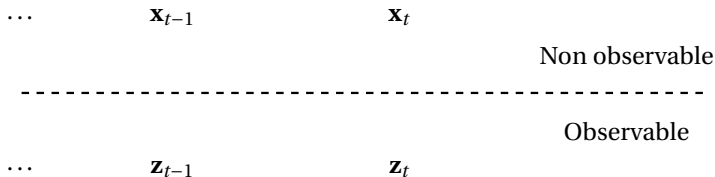


Introduction

- Etat caché \mathbf{x}_t ($t = 0, \dots$) qui n'est pas directement observable
- Mesures \mathbf{z}_t ($t = 1, \dots$)

Exemple

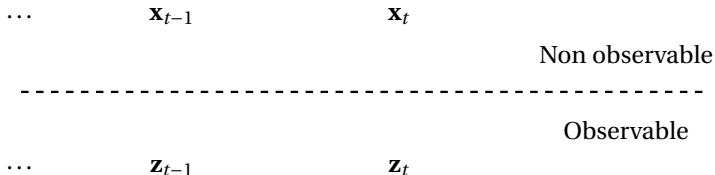
- Position et vitesse d'un véhicule $\mathbf{x}_t = \{X_t, Y_t, \dot{X}_t, \dot{Y}_t\}$
- Capteur délivrant la vitesse du véhicule



Introduction

Objectif

Estimer à chaque instant t la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ à partir

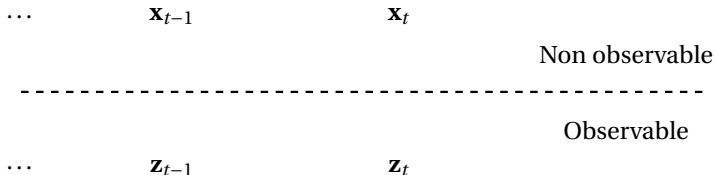


Introduction

Objectif

Estimer à chaque instant t la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ à partir

- des observations $\mathbf{z}_{1:t}$ (filtrage)

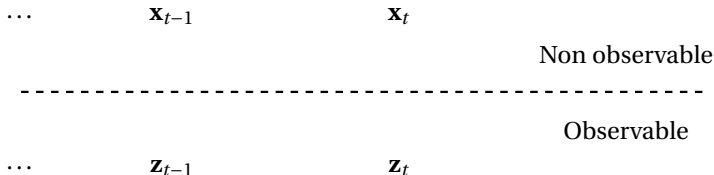


Introduction

Objectif

Estimer à chaque instant t la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ à partir

- des observations $\mathbf{z}_{1:t}$ (filtrage)
- des observations $\mathbf{z}_{1:T}$, $T \geq t$ (lissage)

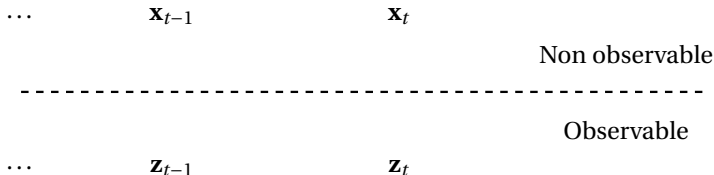


Introduction

Objectif

Estimer à chaque instant t la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ à partir

- des observations $\mathbf{z}_{1:t}$ (filtrage)
- des observations $\mathbf{z}_{1:T}$, $T \geq t$ (lissage)
- Modèles stochastiques

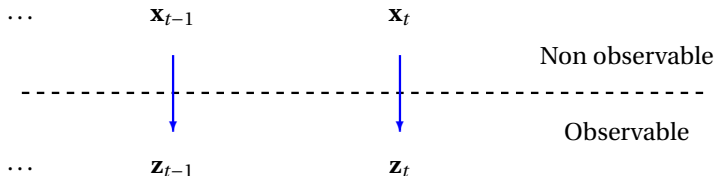


Introduction

Objectif

Estimer à chaque instant t la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ à partir

- des observations $\mathbf{z}_{1:t}$ (filtrage)
- des observations $\mathbf{z}_{1:T}$, $T \geq t$ (lissage)
- Modèles stochastiques
 - **Modèle de mesure** $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t)$

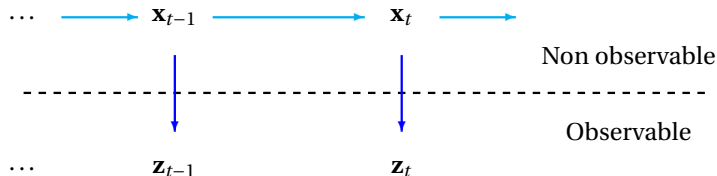


Introduction

Objectif

Estimer à chaque instant t la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ à partir

- des observations $\mathbf{z}_{1:t}$ (filtrage)
- des observations $\mathbf{z}_{1:T}$, $T \geq t$ (lissage)
- Modèles stochastiques
 - ▶ **Modèle de mesure** $p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)$
 - ▶ **Modèle d'évolution** $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$

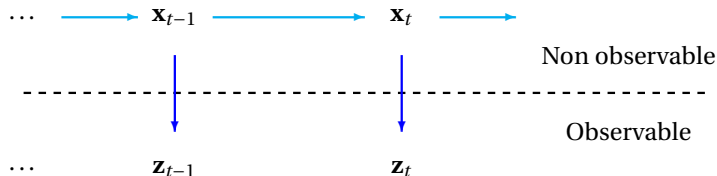


Introduction

Objectif

Estimer à chaque instant t la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ à partir

- des observations $\mathbf{z}_{1:t}$ (filtrage)
- des observations $\mathbf{z}_{1:T}$, $T \geq t$ (lissage)
- Modèles stochastiques
 - ▶ **Modèle de mesure** $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t)$
 - ▶ **Modèle d'évolution** $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$
- Modèle de Markov caché

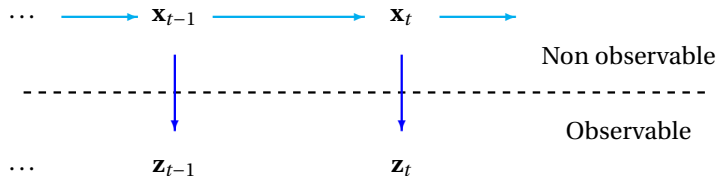


Introduction

- Modèle de mesure

$$\mathbf{z}_t = h(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t$$

avec \mathbf{w}_t le bruit de mesure aléatoire



Introduction

- **Modèle de mesure**

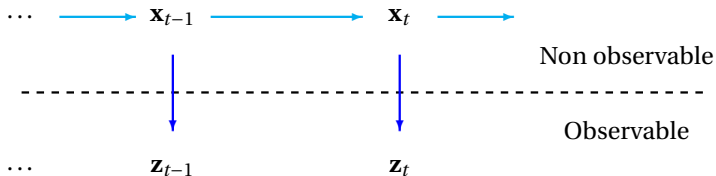
$$\mathbf{z}_t = h(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t$$

avec \mathbf{w}_t le bruit de mesure aléatoire

- **Modèle d'évolution**

$$\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t)$$

avec \mathbf{v}_t le bruit d'évolution aléatoire



Introduction

Exemple

- Modèle de mesure du capteur de vitesse

$$z_t = \sqrt{\dot{X}_t^2 + \dot{Y}_t^2} + w_t$$

Introduction

Exemple

- Modèle de mesure du capteur de vitesse

$$z_t = \sqrt{\dot{X}_t^2 + \dot{Y}_t^2} + w_t$$

- Modèle d'évolution

$$X_{t+1} = X_t + \Delta t \dot{X}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_t$$

$$Y_{t+1} = Y_t + \Delta t \dot{Y}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{Y}_t$$

$$\dot{X}_{t+1} = \dot{X}_t + \Delta t \ddot{X}_t$$

$$\dot{Y}_{t+1} = \dot{Y}_t + \Delta t \ddot{Y}_t$$

avec $\mathbf{v}_t = \{\ddot{X}_t, \ddot{Y}_t\}$

Inférence bayésienne

- **Inférence bayésienne** : incertitude sur la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ après l'observation des mesures $\mathbf{z}_{1:t}$ est représentée par la densité de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$

Inférence bayésienne

- **Inférence bayésienne** : incertitude sur la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ après l'observation des mesures $\mathbf{z}_{1:t}$ est représentée par la densité de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$
- Celle-ci s'exprime selon

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \propto p(\mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t})$$

Inférence bayésienne

- **Inférence bayésienne** : incertitude sur la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ après l'observation des mesures $\mathbf{z}_{1:t}$ est représentée par la densité de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$
- Celle-ci s'exprime selon

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \propto p(\mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t})$$

- Solution analytique fournie par le filtre de Kalman dans le cas de modèles linéaires à bruits additifs gaussiens

Inférence bayésienne

- **Inférence bayésienne** : incertitude sur la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ après l'observation des mesures $\mathbf{z}_{1:t}$ est représentée par la densité de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$
- Celle-ci s'exprime selon

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \propto p(\mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t})$$

- Solution analytique fournie par le filtre de Kalman dans le cas de modèles linéaires à bruits additifs gaussiens
- Dans le cas général : approximation numérique de cette densité

Inférence bayésienne

- **Inférence bayésienne** : incertitude sur la séquence $\mathbf{x}_{0:t}$ après l'observation des mesures $\mathbf{z}_{1:t}$ est représentée par la densité de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$
- Celle-ci s'exprime selon

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \propto p(\mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t})$$

- Solution analytique fournie par le filtre de Kalman dans le cas de modèles linéaires à bruits additifs gaussiens
- Dans le cas général : approximation numérique de cette densité
 - ▶ **Méthodes de Monte Carlo**

Méthodes de Monte Carlo

- **Méthodes de Monte Carlo** : Approximation de la distribution *a posteriori* par un ensemble de N points pondérés $\{\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}, w^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, N$)

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

Méthodes de Monte Carlo

- **Méthodes de Monte Carlo** : Approximation de la distribution *a posteriori* par un ensemble de N points pondérés $\{\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}, w^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, N$)

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

- Comment générer ces échantillons ?

Méthodes de Monte Carlo

- **Méthodes de Monte Carlo** : Approximation de la distribution *a posteriori* par un ensemble de N points pondérés $\{\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}, w^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, N$)

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

- Comment générer ces échantillons ?
 - ▶ *Markov Chain Monte Carlo* (itérative)

Méthodes de Monte Carlo

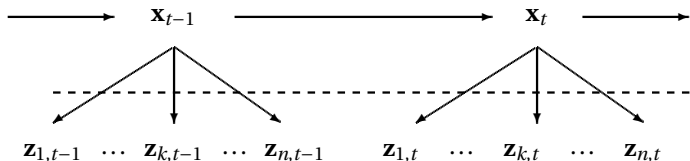
- **Méthodes de Monte Carlo** : Approximation de la distribution *a posteriori* par un ensemble de N points pondérés $\{\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}, w^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, N$)

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w^{(i)} \delta_{\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

- Comment générer ces échantillons ?
 - ▶ *Markov Chain Monte Carlo* (itérative)
 - ▶ Méthodes de Monte Carlo séquentielles

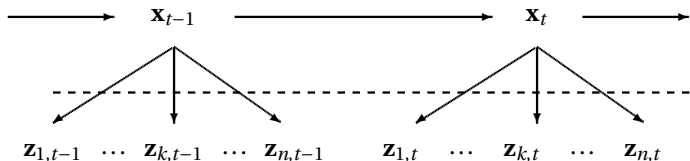
Cadre multicapteur

- Un seul capteur est en général incapable de fournir une information complète sur un phénomène donné



Cadre multicateur

- Un seul capteur est en général incapable de fournir une information complète sur un phénomène donné
- On considère donc plusieurs capteurs k délivrant chacun une mesure $\mathbf{z}_{k,t}$ ($k = 1, \dots, n$) et des modèles de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$



Modèles d'observation multiples

- La relation entre l'état caché \mathbf{x}_t et la mesure $\mathbf{z}_{k,t}$ est donnée par le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$

Modèles d'observation multiples

- La relation entre l'état caché \mathbf{x}_t et la mesure $\mathbf{z}_{k,t}$ est donnée par le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$
- Cette relation peut être amenée à évoluer en fonction de l'environnement extérieur

Modèles d'observation multiples

- La relation entre l'état caché \mathbf{x}_t et la mesure $\mathbf{z}_{k,t}$ est donnée par le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$
- Cette relation peut être amenée à évoluer en fonction de l'environnement extérieur

Exemple

- ▶ Caméra en fonction de la luminosité
- ▶ Radar en fonction des conditions météorologiques

Modèles d'observation multiples

- La relation entre l'état caché \mathbf{x}_t et la mesure $\mathbf{z}_{k,t}$ est donnée par le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$
- Cette relation peut être amenée à évoluer en fonction de l'environnement extérieur

Exemple

- ▶ Caméra en fonction de la luminosité
 - ▶ Radar en fonction des conditions météorologiques
- Dysfonctionnement du capteur

Modèles d'observation multiples

- La relation entre l'état caché \mathbf{x}_t et la mesure $\mathbf{z}_{k,t}$ est donnée par le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$
- Cette relation peut être amenée à évoluer en fonction de l'environnement extérieur

Exemple

- ▶ Caméra en fonction de la luminosité
- ▶ Radar en fonction des conditions météorologiques
- Dysfonctionnement du capteur

Exemple

- ▶ GPS en cas de trajets multiples
- ▶ Exploration en environnement hostile et/ou inconnu (exploration martienne)

Modèles d'observation multiples



Modèles d'observation multiples



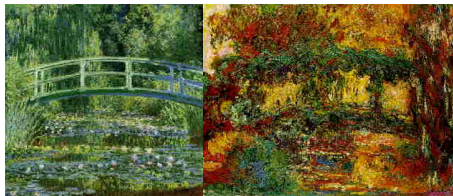
Modèles d'observation multiples



Modèles d'observation multiples



Modèles d'observation multiples



Plan

- 1 Introduction
- 2 Algorithmes pour la fusion bayésienne de données
 - Algorithmes déterministes
 - Filtrage particulière
- 3 Fusion de capteurs à modèles d'observation multiples
 - Modèles et algorithmes
 - Application à la localisation d'un véhicule terrestre

RécurSIONS bayésiennes

- La densité de filtrage $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$ vérifie les récursions suivantes, en deux étapes

- 1 La densité de probabilité de filtrage $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$ est obtenue par la règle de Bayes

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)}{\int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t} \quad (1)$$

- 2 La densité de probabilité de prédiction à un pas $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t})$ est obtenue par l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t}) = \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (2)$$

Filtre de Kalman

- Dans le cas de modèles linéaires et gaussiens

$$\mathbf{x}_{t+1} = F_t \mathbf{x}_t + C_t \mathbf{u}_t + G_t \mathbf{v}_t \quad (3)$$

$$\mathbf{z}_t = H_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad (4)$$

les équations de récurrence (1) et (2) sont calculables analytiquement, et les densités de filtrage/lissage sont gaussiennes

$$p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{z}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1}; \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}, \Sigma_{t-1|t-1})$$

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1})$$

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, \Sigma_{t|t})$$

Filtre de Kalman

- Le filtre de Kalman donne la relation de récurrence entre les moments successifs

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = F_{t-1}\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + C_{t-1}\mathbf{u}_{t-1}$$

$$\Sigma_{t|t-1} = F_{t-1}\Sigma_{t-1|t-1}F_{t-1}^T + G_{t-1}Q_{t-1}G_{t-1}^T$$

et

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t\mathbf{v}_t$$

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_tS_tK_t^T$$

K_t est le gain de Kalman défini à l'instant t par

$$K_t = \Sigma_{t|t-1}H_t^T [H_t\Sigma_{t|t-1}H_t^T + R_t]^{-1}$$

\mathbf{v}_t est l'innovation

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{z}_t - H_t\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$$

de matrice de covariance

$$S_t = H_t\Sigma_{t|t-1}H_t^T + R_t$$

Filtrage de Kalman multicapteur

- A chaque capteur est associé un modèle de mesure différent. On suppose que l'on dispose d'un modèle d'évolution défini par

$$\mathbf{x}_{t+1} = F_t \mathbf{x}_t + C_t \mathbf{u}_t + G_t \mathbf{v}_t$$

et de n modèles de mesure linéaires définis par

$$\mathbf{z}_{k,t} = H_{k,t} \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_{k,t}, \quad k = 1..n$$

avec $\mathbf{w}_{k,t}$ un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance connue $R_{k,t}$. Du fait des indépendances conditionnelles, on a

$$\mathbb{E} \left[w_{i,t} w_{j,t}^T \right] = 0, \quad \forall i, j.$$

Filtrage de Kalman multicapteur

- Trois approches sont envisageables pour utiliser le formalisme du filtre de Kalman en fusion multicapteur
 - ▶ regrouper toutes les observations sous un seul vecteur et appliquer directement les équations du filtre de Kalman,
 - ▶ considérer chaque observation individuellement et faire la fusion séquentiellement,
 - ▶ utiliser l'algorithme du filtre de Kalman multicapteur.

Filtrage de Kalman multicapteur

Capteur Groupe

- Regroupement de toutes les mesures et modèles de mesure sous un seul capteur, appelé capteur "groupe"

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{1,t} \\ \dots \\ \mathbf{z}_{n,t} \end{pmatrix}, H_t = \begin{pmatrix} H_{1,t} \\ \dots \\ H_{n,t} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{1,t} \\ \dots \\ \mathbf{w}_{n,t} \end{pmatrix}$$

$$R_t = \mathbb{E} [w_t w_t^T] = \text{blockdiag}(R_{1,t}, \dots, R_{n,t})$$

- On obtient alors un seul modèle de mesure "groupe"

$$\mathbf{z}_t = H_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

et l'on peut appliquer les équations du filtre de Kalman.

- Si $\mathbf{z}_{k,t}$ est de dimension l_k , S_t est de dimension $l \times l$ avec $l = \sum_{k=1}^n l_k$.
- Cette matrice doit être inversée pour calculer le gain de Kalman \rightarrow Complexité en $O(l^3)$
- Approche simple mais peu appropriée lorsque le nombre de capteurs augmente

Filtrage de Kalman multicapteur

Capteur séquentiel

- Faire un pas de mise à jour de Kalman pour chaque mesure
- Appropriée pour un faible nombre de capteurs

Filtrage de Kalman multicapteur

Filtre de Kalman multicapteur

- Reformulation du filtre de Kalman

- 1 Estimation

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \sum_{k=1}^n K_{k,t} \mathbf{v}_{k,t}$$

$$\Sigma_{t|t}^{-1} = \Sigma_{t|t-1}^{-1} + \sum_{k=1}^n H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} H_{k,t}$$

avec

$$\mathbf{v}_{k,t} = \mathbf{z}_{k,t} - H_{k,t} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$$

$$K_{k,t} = \Sigma_{t|t} H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1}$$

- 2 Prédiction identique à Kalman monocapteur

- Complexité de l'algorithme en $O(p^3 + \sum_{k=1}^n l_k^3)$

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques
 - ▶ Mutation : les particules explorent de façon aléatoire leur environnement

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques
 - ▶ Mutation : les particules explorent de façon aléatoire leur environnement
 - ▶ Sélection : Duplication des particules les mieux adaptées et mort des particules moins bien adaptées

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques
 - ▶ Mutation : les particules explorent de façon aléatoire leur environnement
 - ▶ Sélection : Duplication des particules les mieux adaptées et mort des particules moins bien adaptées
- Applications

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques
 - ▶ Mutation : les particules explorent de façon aléatoire leur environnement
 - ▶ Sélection : Duplication des particules les mieux adaptées et mort des particules moins bien adaptées
- Applications
 - ▶ Inférence bayésienne, filtrage : **filtrage particulaire**

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques
 - ▶ Mutation : les particules explorent de façon aléatoire leur environnement
 - ▶ Sélection : Duplication des particules les mieux adaptées et mort des particules moins bien adaptées
- Applications
 - ▶ Inférence bayésienne, filtrage : **filtrage particulaire**
 - ▶ Optimisation, recherche stochastique : **recuit simulé non linéaire**

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques
 - ▶ Mutation : les particules explorent de façon aléatoire leur environnement
 - ▶ Sélection : Duplication des particules les mieux adaptées et mort des particules moins bien adaptées
- Applications
 - ▶ Inférence bayésienne, filtrage : **filtrage particulaire**
 - ▶ Optimisation, recherche stochastique : **recuit simulé non linéaire**
- Nombreux résultats théoriques ces 15 dernières années

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques
 - ▶ Mutation : les particules explorent de façon aléatoire leur environnement
 - ▶ Sélection : Duplication des particules les mieux adaptées et mort des particules moins bien adaptées
- Applications
 - ▶ Inférence bayésienne, filtrage : **filtrage particulaire**
 - ▶ Optimisation, recherche stochastique : **recuit simulé non linéaire**
- Nombreux résultats théoriques ces 15 dernières années
 - ▶ Convergence asymptotique

Introduction

Méthodes de Monte Carlo séquentielles

- Population de particules en interaction
- Deux mécanismes stochastiques
 - ▶ Mutation : les particules explorent de façon aléatoire leur environnement
 - ▶ Sélection : Duplication des particules les mieux adaptées et mort des particules moins bien adaptées
- Applications
 - ▶ Inférence bayésienne, filtrage : **filtrage particulaire**
 - ▶ Optimisation, recherche stochastique : **recuit simulé non linéaire**
- Nombreux résultats théoriques ces 15 dernières années
 - ▶ Convergence asymptotique
 - ▶ Vitesses de convergence

Approximation de Monte Carlo

- De façon générale, calcul d'intégrales de type

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \quad (5)$$

Approximation de Monte Carlo

- De façon générale, calcul d'intégrales de type

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \quad (5)$$

- Méthodes basées sur une grille non adaptées

Approximation de Monte Carlo

- De façon générale, calcul d'intégrales de type

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \quad (5)$$

- Méthodes basées sur une grille non adaptées
- Méthodes de Monte Carlo

Approximation de Monte Carlo

- De façon générale, calcul d'intégrales de type

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \quad (5)$$

- Méthodes basées sur une grille non adaptées
- Méthodes de Monte Carlo
 - ▶ Simuler N variables $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Approximation de Monte Carlo

- De façon générale, calcul d'intégrales de type

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \quad (5)$$

- Méthodes basées sur une grille non adaptées
- Méthodes de Monte Carlo

- ▶ Simuler N variables $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad (6)$$

- ▶ Approcher l'intégrale par

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}) \quad (7)$$

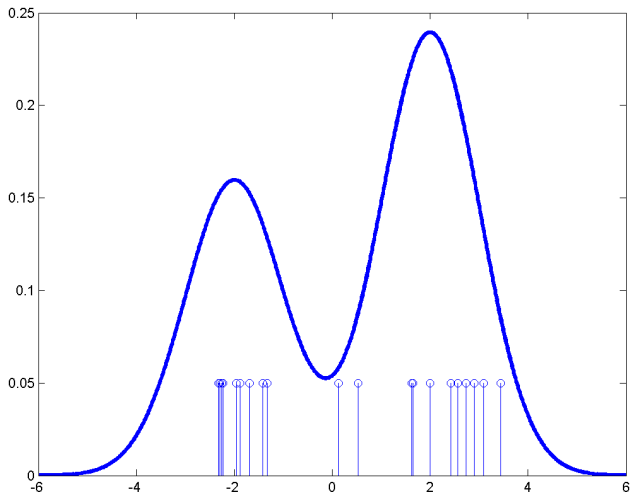
Approximation de Monte Carlo

- L'intégration de Monte Carlo est fondée sur l'approximation de $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ par

$$p_N(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}) \quad (8)$$

où $\delta_x(\cdot)$ est la mesure de Dirac au point x .

Approximation de Monte Carlo



Approximation de Monte Carlo

Propriétés

- L'estimée est asymptotiquement convergente, i.e. converge vers $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]$ p.s.

Approximation de Monte Carlo

Propriétés

- L'estimée est asymptotiquement convergente, i.e. converge vers $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]$ p.s.
- Théorème de la limite centrale (vitesse de convergence)

$$\sqrt{N}(\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] - \mathbb{E}_{p_N(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]) \xrightarrow{dist.} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h])$$

Approximation de Monte Carlo

Propriétés

- L'estimée est asymptotiquement convergente, i.e. converge vers $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]$ p.s.
- Théorème de la limite centrale (vitesse de convergence)

$$\sqrt{N}(\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] - \mathbb{E}_{p_N(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]) \xrightarrow{dist.} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h])$$

- Vitesse de convergence indépendante de la dimension de l'espace

Approximation de Monte Carlo

Propriétés

- L'estimée est asymptotiquement convergente, i.e. converge vers $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]$ p.s.
- Théorème de la limite centrale (vitesse de convergence)

$$\sqrt{N}(\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] - \mathbb{E}_{p_N(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]) \xrightarrow{dist.} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h])$$

- Vitesse de convergence indépendante de la dimension de l'espace
- Problème : il est en général impossible d'échantillonner selon $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$

Echantillonnage d'importance

- Soit $\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ une densité de probabilité simple telle que $\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) > 0$ quand $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) > 0$.

Echantillonnage d'importance

- Soit $\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ une densité de probabilité simple telle que $\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) > 0$ quand $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) > 0$.
- On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) w(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}\end{aligned}$$

Echantillonnage d'importance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) w(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}\end{aligned}$$

Echantillonnage d'importance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) w(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}\end{aligned}$$

- Approximation de $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ par la distribution empirique

$$p_N(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

avec

Echantillonnage d'importance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) w(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}\end{aligned}$$

- Approximation de $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ par la distribution empirique

$$p_N(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

avec

- ▶ $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} \sim \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$, $i = 1 \dots N$,

Echantillonnage d'importance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) w(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}\end{aligned}$$

- Approximation de $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ par la distribution empirique

$$p_N(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

avec

- ▶ $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} \sim \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$, $i = 1 \dots N$,
- ▶ $\tilde{w}^{(i)} = \frac{p(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{z}_{1:t})}$

Echantillonnage d'importance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) w(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}\end{aligned}$$

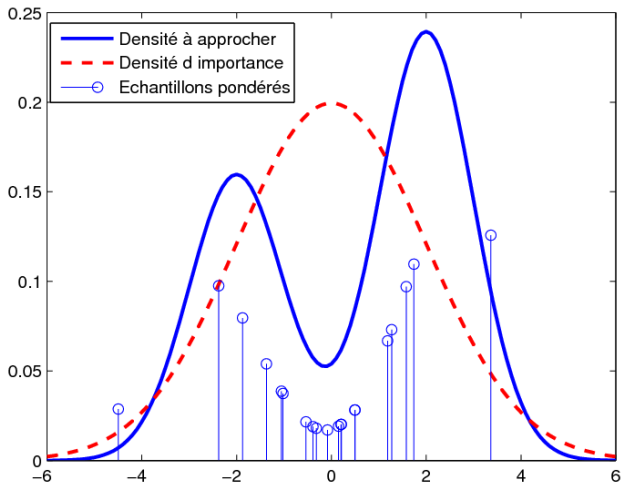
- Approximation de $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ par la distribution empirique

$$p_N(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

avec

- ▶ $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} \sim \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$, $i = 1 \dots N$,
- ▶ $\tilde{w}^{(i)} = \frac{p(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{z}_{1:t})}$
- ▶ $\sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} = 1$

Echantillonnage d'importance



Echantillonnage d'importance séquentiel

- Approximation séquentielle de la densité *a posteriori*

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_{0:t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})}{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})} \quad (9)$$

Echantillonnage d'importance séquentiel

- Approximation séquentielle de la densité *a posteriori*

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_{0:t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})}{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})} \quad (9)$$

- Densité d'importance

$$\begin{aligned} \pi_t(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) &= \pi_{t-1}(\mathbf{x}_{0:t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) q_t(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t) \\ &= \pi_0(\mathbf{x}_0) \prod_{j=1}^t q_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{z}_j) \end{aligned}$$

Echantillonnage d'importance séquentiel

- Approximation séquentielle de la densité *a posteriori*

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_{0:t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})}{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})} \quad (9)$$

- Densité d'importance

$$\begin{aligned} \pi_t(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) &= \pi_{t-1}(\mathbf{x}_{0:t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) q_t(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t) \\ &= \pi_0(\mathbf{x}_0) \prod_{j=1}^t q_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{z}_j) \end{aligned}$$

- Au temps t , les poids sont donnés par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t|\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)})p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}|\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)})}{q_t(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}|\tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)} \quad (10)$$

Echantillonnage d'importance séquentiel

- La valeur de l'intégrale $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} [h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}$ est approchée par

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} [h] \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} h(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}) \quad (11)$$

Echantillonnage d'importance séquentiel

- La valeur de l'intégrale $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} [h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}$ est approchée par

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} [h] \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} h(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}) \quad (11)$$

- L'estimée MMSE est donc approchée par

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}} \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} \quad (12)$$

Echantillonnage d'importance séquentiel

- La qualité de l'approximation peut être évaluée par l'*Effective Sample Size (ESS)*

$$ESS_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left(\tilde{w}_t^{(i)} \right)^2}$$

Echantillonnage d'importance séquentiel

- La qualité de l'approximation peut être évaluée par l'*Effective Sample Size (ESS)*

$$ESS_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left(\tilde{w}_t^{(i)} \right)^2}$$

- $1 \leq ESS_t \leq N$

Echantillonnage d'importance séquentiel

- La qualité de l'approximation peut être évaluée par l'*Effective Sample Size (ESS)*

$$ESS_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left(\tilde{w}_t^{(i)} \right)^2}$$

- $1 \leq ESS_t \leq N$
- Problème : la variance des poids augmente au cours du temps ($ESS_t \rightarrow 1$)

Echantillonnage d'importance séquentiel et rééchantillonnage

- Rééchantillonnage : dupliquer les particules de forts poids et supprimer les particules de poids faibles

Echantillonnage d'importance séquentiel et rééchantillonnage

- Rééchantillonnage : dupliquer les particules de forts poids et supprimer les particules de poids faibles
- Le nombre de fils de chaque particule $n_{fils}^{(i)}$ est tiré aléatoirement de telle sorte que

$$\mathbb{E}_{p(n_{fils}^{(i)})} \left[n_{fils}^{(i)} \right] = N \tilde{w}_t^{(i)} \text{ avec } \sum_{i=1}^N n_{fils}^{(i)} = N$$

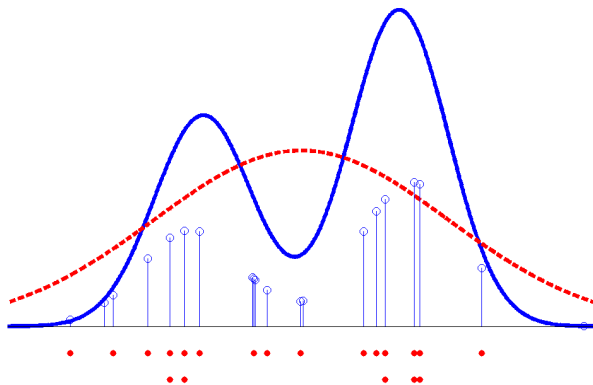
Echantillonnage d'importance séquentiel et rééchantillonnage

- Rééchantillonnage : dupliquer les particules de forts poids et supprimer les particules de poids faibles
- Le nombre de fils de chaque particule $n_{fils}^{(i)}$ est tiré aléatoirement de telle sorte que

$$\mathbb{E}_{p(n_{fils}^{(i)})} \left[n_{fils}^{(i)} \right] = N \tilde{w}_t^{(i)} \text{ avec } \sum_{i=1}^N n_{fils}^{(i)} = N$$

- Les échantillons $\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}$ sont approximativement distribués selon $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ mais statistiquement dépendants \implies plus difficile à étudier théoriquement

Echantillonnage d'importance séquentiel et rééchantillonnage



Algorithme de filtrage particulaire

- Etape 1 Initialisation

- Pour $i = 1, \dots, N$, faire

- ▶ Générer $\mathbf{x}_0^{(i)} \sim \pi_0(\mathbf{x}_0)$

- ▶ Calculer le poids initial $w_0^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}_0^{(i)})}{\pi_0(\mathbf{x}_0^{(i)})}$

- Calculer $W_0 = \sum_{i=1}^N w_0^{(i)}$ et pour $i = 1, \dots, N$, faire $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{w_0^{(i)}}{W_0}$

- Etape 2 Itérations

- Pour $t = 1, 2, \dots$ faire

- ▶ Pour $i = 1, \dots, N$ faire

- % Mutation

- ★ Générer $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}$ selon $q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$

- ★ Mettre à jour les poids récursifs selon

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})}{q_t(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)}$$

avec $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$,

- Rééchantillonnage/Sélection

- ▶ Copier les particules de poids élevé et détruire les particules de poids faible pour obtenir N nouvelles particules, notées sans $\tilde{\cdot}$. Les nouveaux poids sont $w_t^{(i)} = \frac{1}{N}$.

Poursuite de cibles

- Modèle d'évolution ($p(x_t|x_{t-1})$)

$$x_{t+1} = F \cdot x_t + G \cdot b_t$$

$$\text{où } x_t = (p_t^x, p_t^z, v_t^x, v_t^z)^T, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} T^2/2 & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

$$b_t = \begin{pmatrix} a_t^x \\ a_t^y \end{pmatrix} \text{ un bruit blanc Gaussien de matrice de covariance } Q = \sigma_b^2 I_2.$$

Poursuite de cibles

- Modèle de mesure ($p(z_t|x_t)$)

$$z_t = h(x_t) + w_t$$

où $z_t = (a_t, d_t)$, $h(x_t) = \left(\begin{array}{c} \arctan(\frac{p_t^z}{p_t^x}) \\ \sqrt{(p_t^x)^2 + (p_t^y)^2} \end{array} \right)$ et w_t un bruit blanc

Gaussien de matrice de covariance connue $R = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_d^2 \end{pmatrix}$.

Poursuite de cibles

Objectifs

- A chaque instant t et de façon séquentielle

Poursuite de cibles

Objectifs

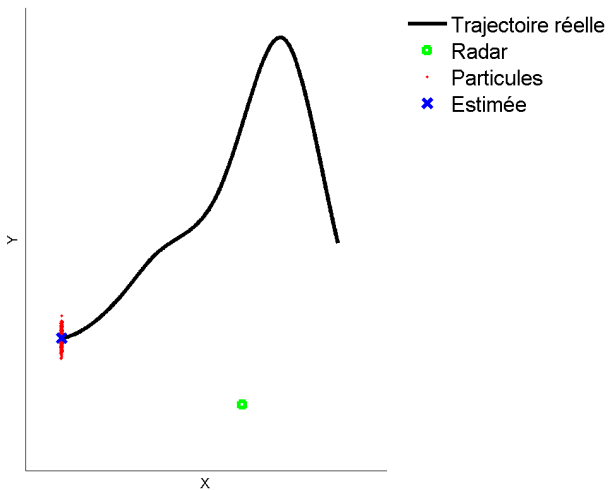
- A chaque instant t et de façon séquentielle
 - Approcher la densité de filtrage $p(x_t|z_{1:t})$

Poursuite de cibles

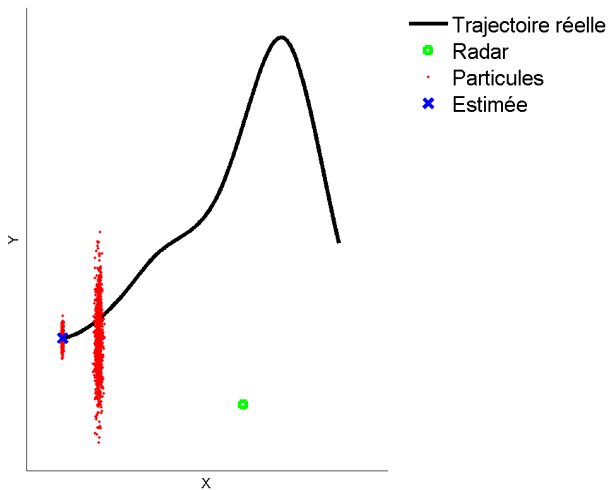
Objectifs

- A chaque instant t et de façon séquentielle
 - ▶ Approcher la densité de filtrage $p(x_t|z_{1:t})$
 - ▶ Approcher $x_t^{\text{MMSE}} = \mathbb{E}_{p(x_{0:t}|z_{1:t})}[x_t]$

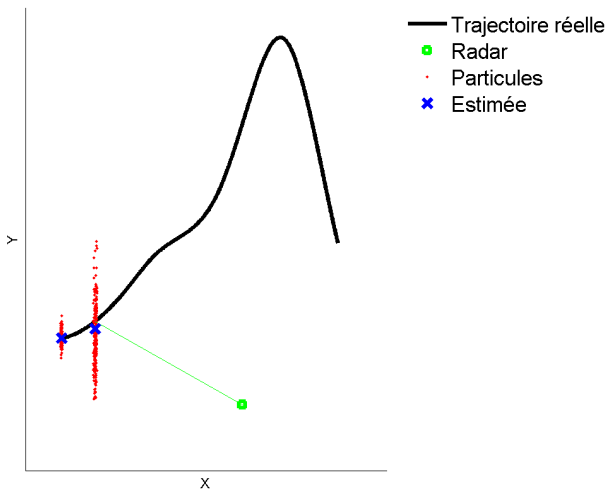
Poursuite de cibles



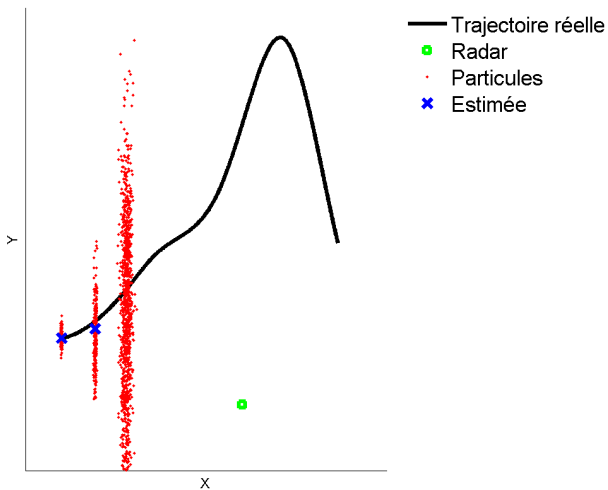
Poursuite de cibles



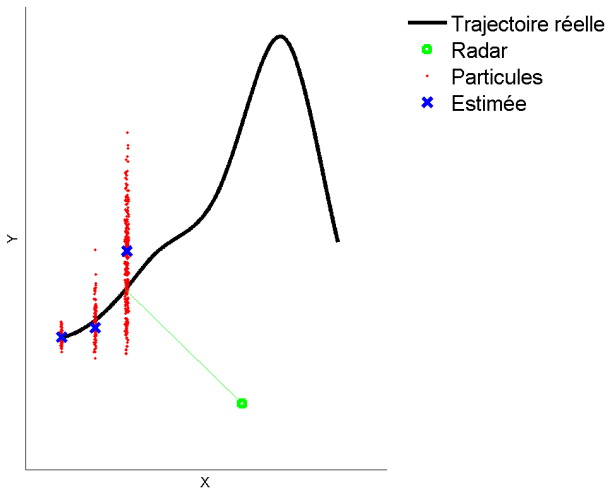
Poursuite de cibles



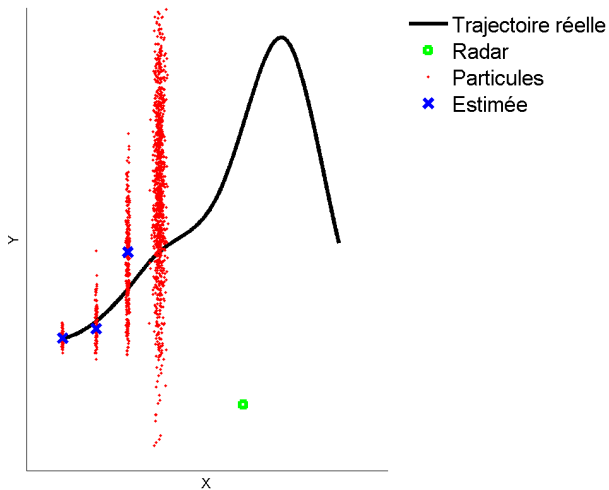
Poursuite de cibles



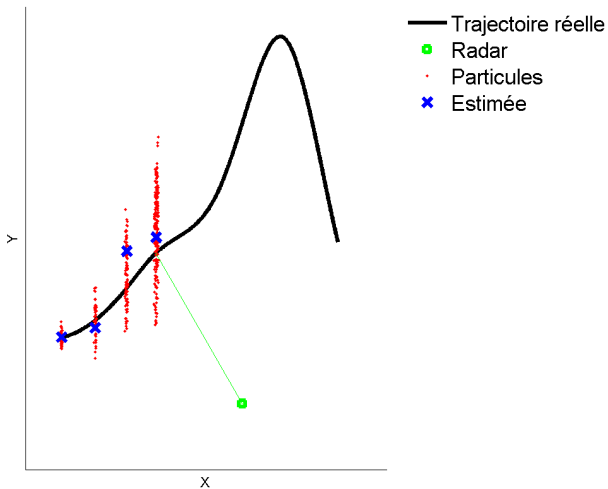
Poursuite de cibles



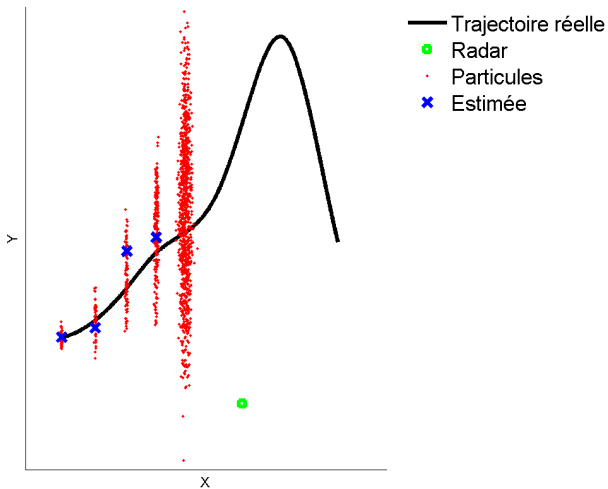
Poursuite de cibles



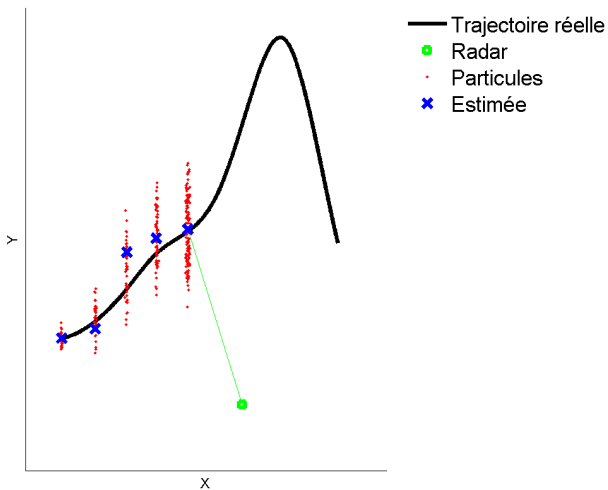
Poursuite de cibles



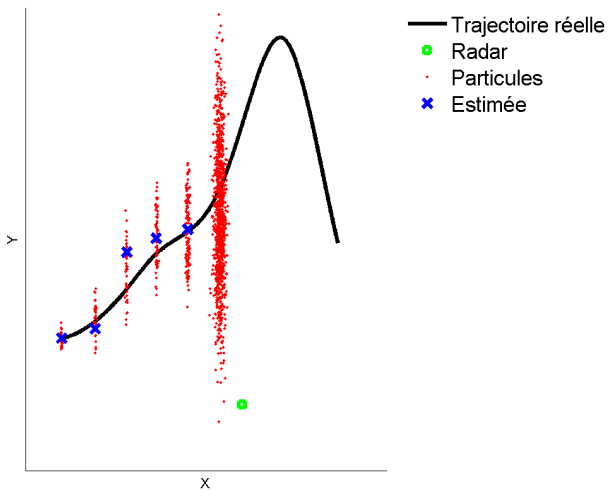
Poursuite de cibles



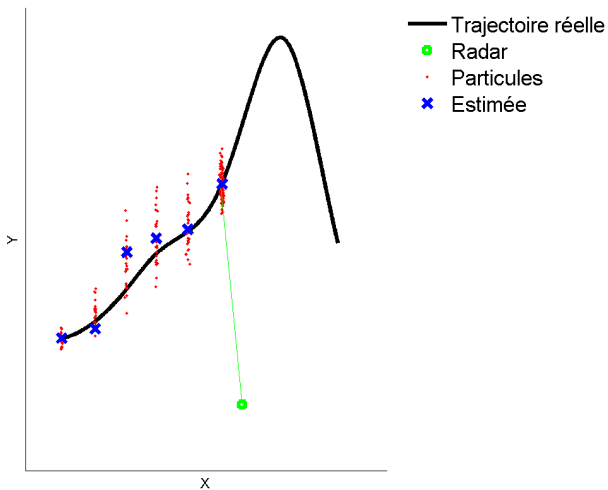
Poursuite de cibles



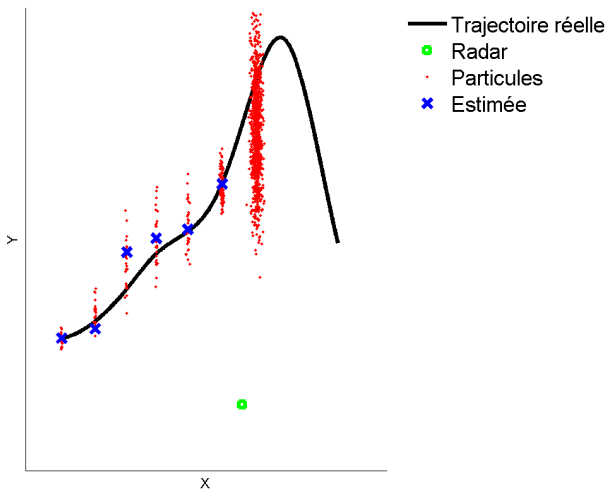
Poursuite de cibles



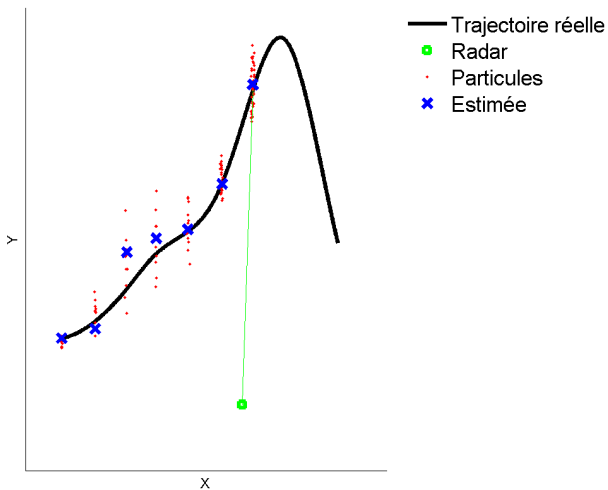
Poursuite de cibles



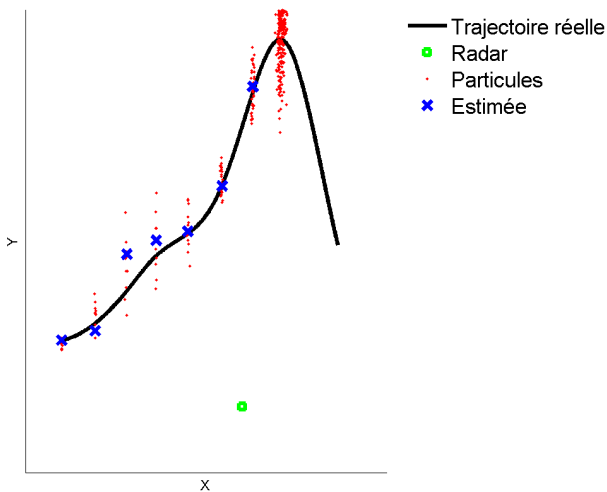
Poursuite de cibles



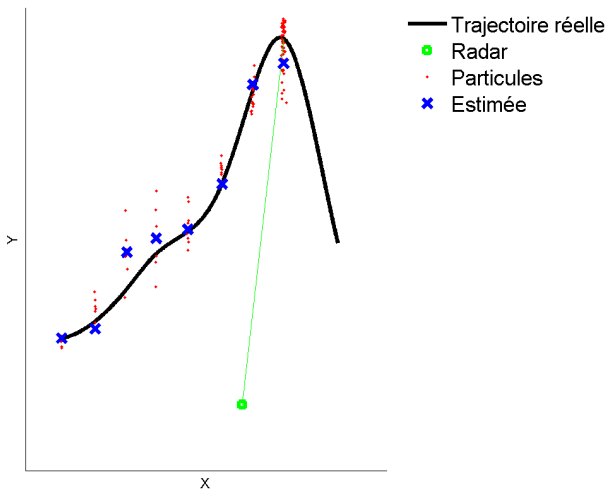
Poursuite de cibles



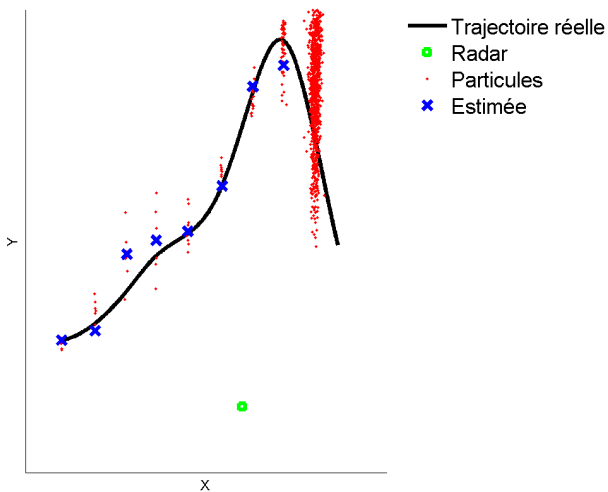
Poursuite de cibles



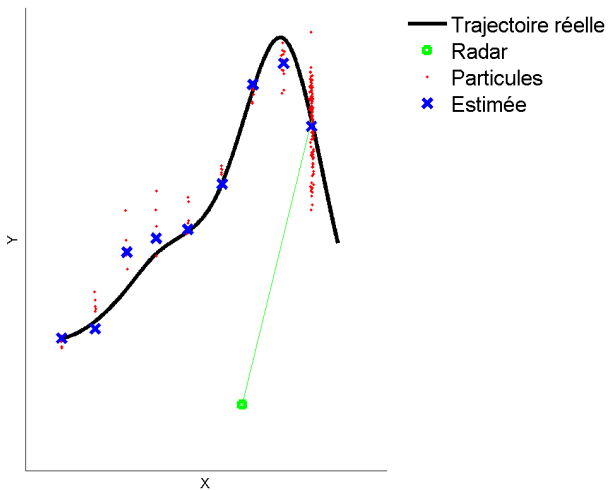
Poursuite de cibles



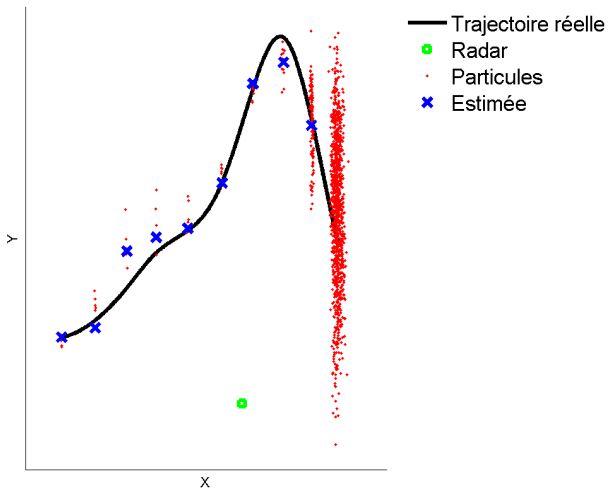
Poursuite de cibles



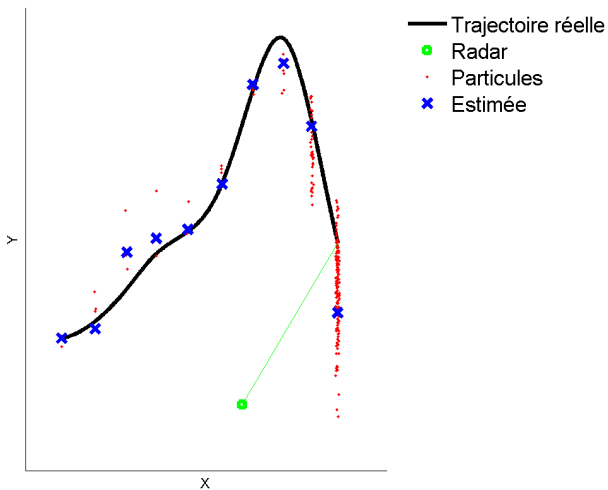
Poursuite de cibles



Poursuite de cibles



Poursuite de cibles



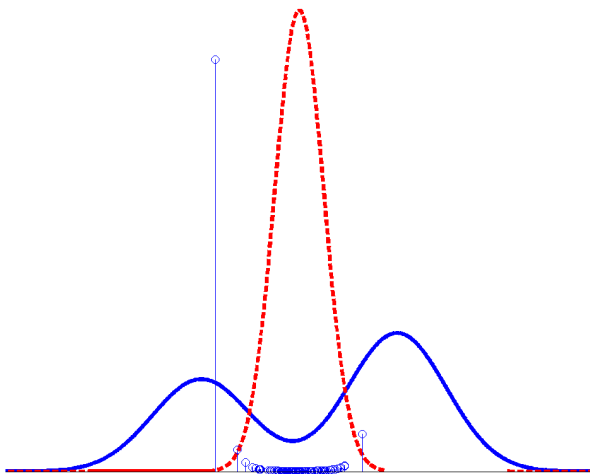
Choix de la densité d'importance

- Son choix est crucial pour les performances de l'algorithme

Choix de la densité d'importance

- Son choix est crucial pour les performances de l'algorithme
- Un mauvais choix va faire explorer des zones peu intéressantes par un grand nombre de particules et faire augmenter la variance des poids

Choix de la densité d'importance



Choix de la densité d'importance

- Loi d'évolution de l'état

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

Choix de la densité d'importance

- Loi d'évolution de l'état

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

- Les poids sont simplement mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t^{(i)})$$

Choix de la densité d'importance

- Loi d'évolution de l'état

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

- Les poids sont simplement mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t^{(i)})$$

- + Facile à programmer

Choix de la densité d'importance

- Loi d'évolution de l'état

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

- Les poids sont simplement mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t^{(i)})$$

- + Facile à programmer
- Ne tient pas compte de la nouvelle observation et est souvent peu efficace, conduisant à une variance élevée des poids.

Choix de la densité d'importance

- Densité optimale

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$$

Choix de la densité d'importance

- Densité optimale

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$$

- Les poids sont mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

Choix de la densité d'importance

- Densité optimale

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$$

- Les poids sont mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

- + Densité d'importance optimale (minimise la variance des poids)

Choix de la densité d'importance

- Densité optimale

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$$

- Les poids sont mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

- + Densité d'importance optimale (minimise la variance des poids)
- Souvent impossible d'échantillonner selon cette loi

Choix de la densité d'importance

- Densité optimale

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$$

- Les poids sont mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

- + Densité d'importance optimale (minimise la variance des poids)
- Souvent impossible d'échantillonner selon cette loi
- En pratique, utiliser comme loi d'importance une approximation de la densité optimale

Résultats de convergence

Del Moral, 2004

- Pour une fonction h bornée

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} - \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p_N(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \right| \right] \leq \frac{C_t \|h\|}{N}$$

Résultats de convergence

Del Moral, 2004

- Pour une fonction h bornée

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} - \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p_N(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \right| \right] \leq \frac{C_t \|h\|}{N}$$

- Résultat peu utile car C_t explose au cours du temps

Résultats de convergence

Del Moral, 2004

- Pour une fonction h bornée

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} - \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p_N(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \right| \right] \leq \frac{C_t \|h\|}{N}$$

- Résultat peu utile car C_t explose au cours du temps
- On a

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} - \int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}_t) p_N(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \right| \right] \leq \frac{C \|h\|}{N}$$

sous des hypothèses d'ergodicité sur le modèle

Plan

1 Introduction

2 Algorithmes pour la fusion bayésienne de données

- Algorithmes déterministes
- Filtrage particulière

3 Fusion de capteurs à modèles d'observation multiples

- Modèles et algorithmes
- Application à la localisation d'un véhicule terrestre

Problématique de cette partie

- 1 En supposant que chaque capteur commute entre plusieurs états de fonctionnement, comment estimer son état à chaque instant et la probabilité qu'il soit dans un tel état ?

Problématique de cette partie

- 1 En supposant que chaque capteur commute entre plusieurs états de fonctionnement, comment estimer son état à chaque instant et la probabilité qu'il soit dans un tel état ?
- Pour chaque capteur k , on a d_k modèles de mesure, définis pour un état de capteur $c_{k,t} \in \{1, \dots, d_k\}$ par

$$\mathbf{z}_{k,t} = h_{k,c_{k,t}}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{k,c_{k,t},t}$$

Problématique de cette partie

- 1 En supposant que chaque capteur commute entre plusieurs états de fonctionnement, comment estimer son état à chaque instant et la probabilité qu'il soit dans un tel état ?
- Pour chaque capteur k , on a d_k modèles de mesure, définis pour un état de capteur $c_{k,t} \in \{1, \dots, d_k\}$ par

$$\mathbf{z}_{k,t} = h_{k,c_{k,t}}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{k,c_{k,t},t}$$

- $c_{k,t} = 0$ correspond à l'état de dysfonctionnement du capteur

Problématique de cette partie

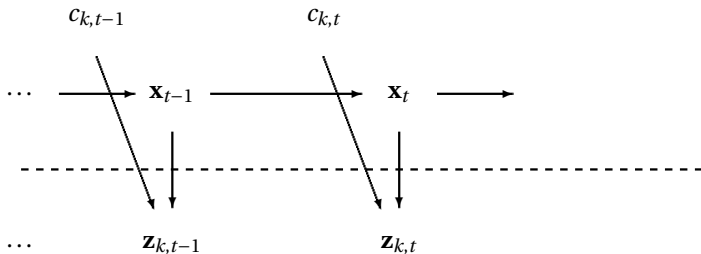
- 1 En supposant que chaque capteur commute entre plusieurs états de fonctionnement, comment estimer son état à chaque instant et la probabilité qu'il soit dans un tel état ?
- Pour chaque capteur k , on a d_k modèles de mesure, définis pour un état de capteur $c_{k,t} \in \{1, \dots, d_k\}$ par

$$\mathbf{z}_{k,t} = h_{k,c_{k,t},t}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{k,c_{k,t},t}$$

- $c_{k,t} = 0$ correspond à l'état de dysfonctionnement du capteur
- $d_k + 1$ états de fonctionnement pour chaque capteur k

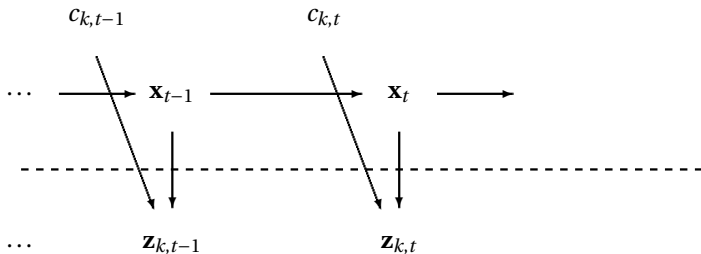
Modèle à saut

- Variable indicatrice discrète $c_{k,t}$ commande le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t, c_{k,t})$



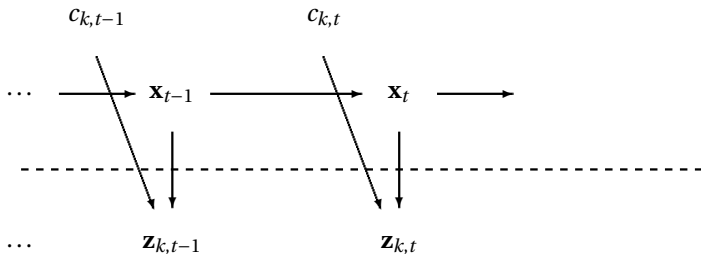
Modèle à saut

- Variable indicatrice discrète $c_{k,t}$ commande le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t, c_{k,t})$
- Quel modèle statistique pour $c_{k,t}$?



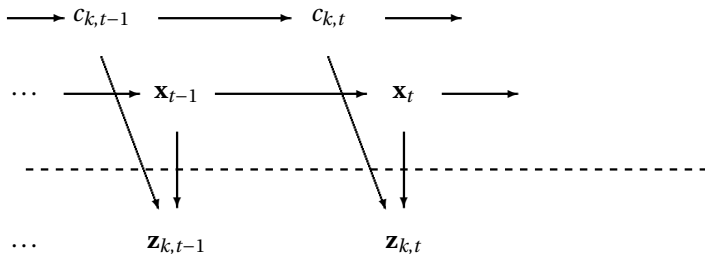
Modèle à saut

- Variable indicatrice discrète $c_{k,t}$ commande le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t, c_{k,t})$
- Quel modèle statistique pour $c_{k,t}$?
- Littérature



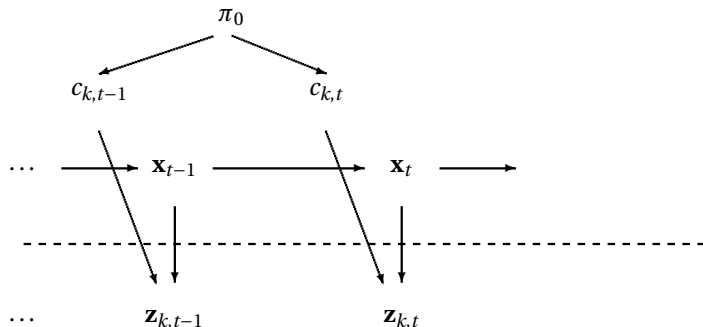
Modèle à saut

- Variable indicatrice discrète $c_{k,t}$ commande le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t, c_{k,t})$
- Quel modèle statistique pour $c_{k,t}$?
- Littérature
 - Modèle à saut de Markov



Modèle à saut

- Variable indicatrice discrète $c_{k,t}$ commande le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t, c_{k,t})$
- Quel modèle statistique pour $c_{k,t}$?
- Littérature
 - Modèle à saut de Markov
 - Modèle à probabilité *a priori* fixée



Modèle à saut

- Variable indicatrice discrète $c_{k,t}$ commande le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t, c_{k,t})$
- Quel modèle statistique pour $c_{k,t}$?
- Littérature
 - ▶ Modèle à saut de Markov
 - ▶ Modèle à probabilité *a priori* fixée
- Limites

Modèle à saut

- Variable indicatrice discrète $c_{k,t}$ commande le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t, c_{k,t})$
- Quel modèle statistique pour $c_{k,t}$?
- Littérature
 - ▶ Modèle à saut de Markov
 - ▶ Modèle à probabilité *a priori* fixée
- Limites
 - ▶ Indépendance ou dépendance markovienne entre les états de fonctionnement (pas de mémoire)

Modèle à saut

- Variable indicatrice discrète $c_{k,t}$ commande le modèle de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t, c_{k,t})$
- Quel modèle statistique pour $c_{k,t}$?
- Littérature
 - ▶ Modèle à saut de Markov
 - ▶ Modèle à probabilité *a priori* fixée
- Limites
 - ▶ Indépendance ou dépendance markovienne entre les états de fonctionnement (pas de mémoire)
 - ▶ Paramètres difficiles à définir *a priori*

Contributions

[2]

- Définition d'un **modèle à saut original** où les probabilités *a priori* des états de fonctionnement sont estimées et suivent un modèle de Markov

Contributions

[2]

- Définition d'un **modèle à saut original** où les probabilités *a priori* des états de fonctionnement sont estimées et suivent un modèle de Markov
- Définition d'**algorithmes de Monte Carlo séquentiels** avec des lois d'importance efficaces, prenant en compte des données synchrones/asynchrones, des modèles linéaires/non linéaires et le cas binaire capteur valide/invalid

Contributions

[2]

- Définition d'un **modèle à saut original** où les probabilités *a priori* des états de fonctionnement sont estimées et suivent un modèle de Markov
- Définition d'**algorithmes de Monte Carlo séquentiels** avec des lois d'importance efficaces, prenant en compte des données synchrones/asynchrones, des modèles linéaires/non linéaires et le cas binaire capteur valide/invalid
- Comparaison avec les modèles classiques sur des exemples

Contributions

[2]

- Définition d'un **modèle à saut original** où les probabilités *a priori* des états de fonctionnement sont estimées et suivent un modèle de Markov
- Définition d'**algorithmes de Monte Carlo séquentiels** avec des lois d'importance efficaces, prenant en compte des données synchrones/asynchrones, des modèles linéaires/non linéaires et le cas binaire capteur valide/invalid
- Comparaison avec les modèles classiques sur des exemples
- Application à la localisation d'un véhicule terrestre

Modèle statistique

- La probabilité *a priori* que $c_{k,t}$ (pour $k = 1, \dots, n$) soit dans un état donné j ($j = 0, \dots, d_k$) est notée $\alpha_{k,j,t}$.

Modèle statistique

- La probabilité *a priori* que $c_{k,t}$ (pour $k = 1, \dots, n$) soit dans un état donné j ($j = 0, \dots, d_k$) est notée $\alpha_{k,j,t}$.
- Les $\alpha_{k,j,t}$ représentent la confiance que l'on a dans le fait qu'un capteur soit dans un état donné

$$\Pr(c_{k,t} = j) = \alpha_{k,j,t}, \quad 0 \leq j \leq d_k$$

où $\alpha_{k,j,t} \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{d_k} \alpha_{k,j,t} = 1$.

Modèle statistique

- La probabilité *a priori* que $c_{k,t}$ (pour $k = 1, \dots, n$) soit dans un état donné j ($j = 0, \dots, d_k$) est notée $\alpha_{k,j,t}$.
- Les $\alpha_{k,j,t}$ représentent la confiance que l'on a dans le fait qu'un capteur soit dans un état donné

$$\Pr(c_{k,t} = j) = \alpha_{k,j,t}, \quad 0 \leq j \leq d_k$$

où $\alpha_{k,j,t} \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{d_k} \alpha_{k,j,t} = 1$.

- Difficiles à définir *a priori*, et peuvent évoluer

Modèle statistique

- La probabilité *a priori* que $c_{k,t}$ (pour $k = 1, \dots, n$) soit dans un état donné j ($j = 0, \dots, d_k$) est notée $\alpha_{k,j,t}$.
- Les $\alpha_{k,j,t}$ représentent la confiance que l'on a dans le fait qu'un capteur soit dans un état donné

$$\Pr(c_{k,t} = j) = \alpha_{k,j,t}, \quad 0 \leq j \leq d_k$$

où $\alpha_{k,j,t} \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{d_k} \alpha_{k,j,t} = 1$.

- Difficiles à définir *a priori*, et peuvent évoluer
- Modèle d'évolution markovien suivant pour le vecteur de probabilités α_t

$$(\alpha_{k,0,t}, \dots, \alpha_{k,d_k,t}) \sim \mathcal{D}(\sigma_{k,t}^\alpha \alpha_{k,0,t-1}, \dots, \sigma_{k,t}^\alpha \alpha_{k,d_k,t-1})$$

où $\sigma_{k,t}^\alpha$ est un coefficient spécifique à chaque capteur qui ajuste la variance des $\alpha_{k,j,t}$.

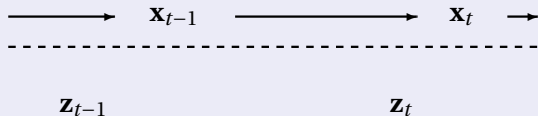
Modèle statistique (2)

- Le coefficient $\sigma_{k,t}^\alpha$ règle l'évolution de $\alpha_{k,t}$. Afin d'éviter de définir une valeur fixée pour $\sigma_{k,t}^\alpha$ (et donc une dynamique fixée pour $\alpha_{k,t}$) ce coefficient est également estimé, selon le modèle suivant

$$\log(\sigma_{k,t}^\alpha) = \log(\sigma_{k,t-1}^\alpha) + \lambda^\alpha \quad (13)$$

Modèle statistique (3)

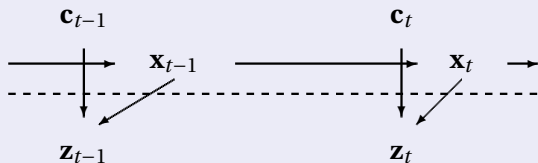
$$\mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$$



Modèle statistique (3)

$$\mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$$

$$\mathbf{z}_t \sim p(\mathbf{z}_t | \mathbf{c}_t, \mathbf{x}_t)$$

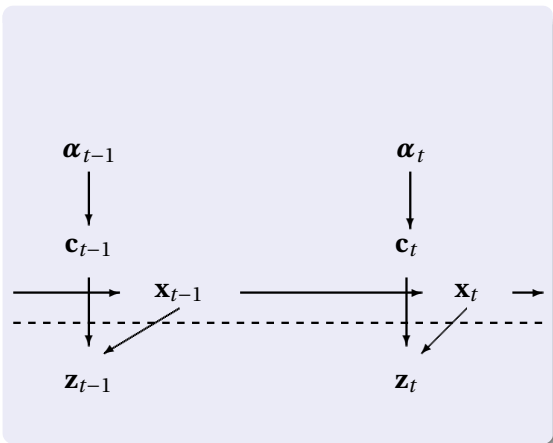


Modèle statistique (3)

$$\mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$$

$$\mathbf{z}_t \sim p(\mathbf{z}_t | \mathbf{c}_t, \mathbf{x}_t)$$

$$\mathbf{c}_t \sim \text{Pr}(\mathbf{c}_t | \boldsymbol{\alpha}_t)$$



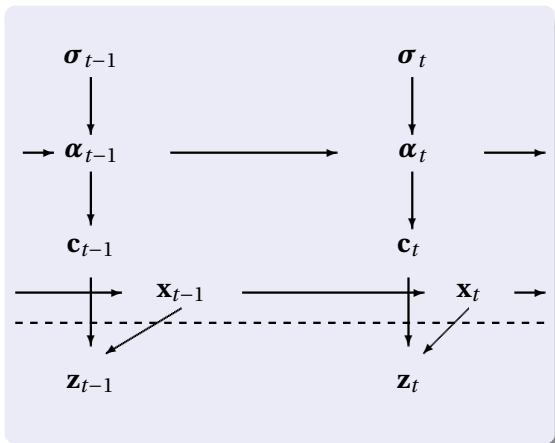
Modèle statistique (3)

$$\mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$$

$$\mathbf{z}_t \sim p(\mathbf{z}_t | \mathbf{c}_t, \mathbf{x}_t)$$

$$\mathbf{c}_t \sim \text{Pr}(\mathbf{c}_t | \alpha_t)$$

$$\alpha_t \sim p(\alpha_t | \alpha_{t-1}, \sigma_{t-1})$$



Modèle statistique (3)

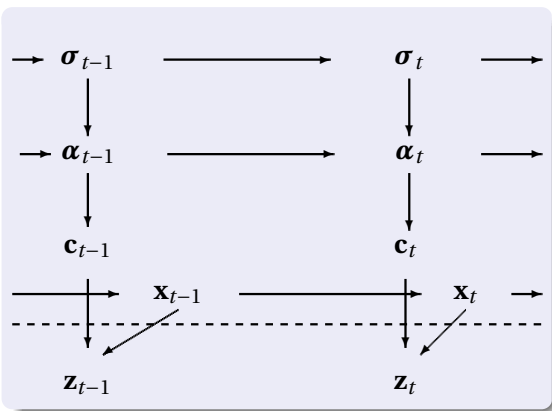
$$\mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$$

$$\mathbf{z}_t \sim p(\mathbf{z}_t | \mathbf{c}_t, \mathbf{x}_t)$$

$$\mathbf{c}_t \sim \text{Pr}(\mathbf{c}_t | \boldsymbol{\alpha}_t)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_t \sim p(\boldsymbol{\alpha}_t | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-1})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t \sim p(\boldsymbol{\sigma}_t | \boldsymbol{\sigma}_{t-1})$$



Objectifs d'estimation

- On souhaite obtenir une approximation de la distribution *a posteriori*

$$\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}, d\mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{1:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$$

Objectifs d'estimation

- On souhaite obtenir une approximation de la distribution *a posteriori*
 $\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{1:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$
- Approchée par la distribution empirique

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t})$$

Objectifs d'estimation

- On souhaite obtenir une approximation de la distribution *a posteriori*
 $\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{1:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$
- Approchée par la distribution empirique

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t})$$

- Particules $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}$ et poids $\tilde{w}_t^{(i)}$ obtenus à l'aide d'un **algorithme de Monte Carlo séquentiel**

Objectifs d'estimation

- On souhaite obtenir une approximation de la distribution *a posteriori*
 $\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{1:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$
- Approchée par la distribution empirique

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t})$$

- Particules $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}$ et poids $\tilde{w}_t^{(i)}$ obtenus à l'aide d'un **algorithme de Monte Carlo séquentiel**
- Plusieurs algorithmes développés

Objectifs d'estimation

- On souhaite obtenir une approximation de la distribution *a posteriori*
 $\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{1:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$
- Approchée par la distribution empirique

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t})$$

- Particules $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}$ et poids $\tilde{w}_t^{(i)}$ obtenus à l'aide d'un **algorithme de Monte Carlo séquentiel**
- Plusieurs algorithmes développés
 - ▶ Capteurs synchrones/asynchrones

Objectifs d'estimation

- On souhaite obtenir une approximation de la distribution *a posteriori*
 $\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{1:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$
- Approchée par la distribution empirique

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t})$$

- Particules $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}$ et poids $\tilde{w}_t^{(i)}$ obtenus à l'aide d'un **algorithme de Monte Carlo séquentiel**
- Plusieurs algorithmes développés
 - ▶ Capteurs synchrones/asynchrones
 - ▶ Modèle linéaire/non linéaire

Objectifs d'estimation

- On souhaite obtenir une approximation de la distribution *a posteriori*
 $\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{1:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$
- Approchée par la distribution empirique

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}, d\boldsymbol{\sigma}_{0:t})$$

- Particules $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{0:t}^{(i)}$ et poids $\tilde{w}_t^{(i)}$ obtenus à l'aide d'un **algorithme de Monte Carlo séquentiel**
- Plusieurs algorithmes développés
 - ▶ Capteurs synchrones/asynchrones
 - ▶ Modèle linéaire/non linéaire
 - ▶ Cas binaire capteur valide/invalid

Algorithme de Monte Carlo séquentiel

- Point crucial de l'algorithme de Monte Carlo séquentiel : choix de la densité d'importance $q(\mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_{t-1}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}, \mathbf{z}_t)$

Algorithme de Monte Carlo séquentiel

- Point crucial de l'algorithme de Monte Carlo séquentiel : choix de la densité d'importance $q(\mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_{t-1}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}, \mathbf{z}_t)$
- Cette densité jointe est égale au produit des densités d'importances $q(\boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2})$, $q(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{c}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2})$, $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_t, \mathbf{z}_t)$ et $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \mathbf{z}_t)$

Algorithme de Monte Carlo séquentiel

- Point crucial de l'algorithme de Monte Carlo séquentiel : choix de la densité d'importance $q(\mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_{t-1}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}, \mathbf{z}_t)$
- Cette densité jointe est égale au produit des densités d'importances $q(\boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2})$, $q(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{c}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2})$, $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_t, \mathbf{z}_t)$ et $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \mathbf{z}_t)$
- De mauvaises densités d'importance vont faire explorer des zones de faible probabilité par un grand nombre de particules

Algorithme de Monte Carlo séquentiel

- Point crucial de l'algorithme de Monte Carlo séquentiel : choix de la densité d'importance $q(\mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t, \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_{t-1}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}, \mathbf{z}_t)$
- Cette densité jointe est égale au produit des densités d'importances $q(\boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \boldsymbol{\alpha}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2})$, $q(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{c}_t, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2})$, $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_t, \mathbf{z}_t)$ et $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \mathbf{z}_t)$
- De mauvaises densités d'importance vont faire explorer des zones de faible probabilité par un grand nombre de particules
- Définition de densités d'importance efficaces

Exemples

- Sur 2 exemples non linéaire et linéaire, comparaison de notre modèle avec

Exemples

- Sur 2 exemples non linéaire et linéaire, comparaison de notre modèle avec
 - Modèle à saut à probabilités *a priori* fixées

Exemples

- Sur 2 exemples non linéaire et linéaire, comparaison de notre modèle avec
 - ▶ Modèle à saut à probabilités *a priori* fixées
 - ▶ Modèle à saut de Markov

Exemples

- Sur 2 exemples non linéaire et linéaire, comparaison de notre modèle avec
 - ▶ Modèle à saut à probabilités *a priori* fixées
 - ▶ Modèle à saut de Markov
- Meilleure adaptivité de l'algorithme en cas de défaillance soudaine, mémoire des défaillances passées

Exemples

- Sur 2 exemples non linéaire et linéaire, comparaison de notre modèle avec
 - ▶ Modèle à saut à probabilités *a priori* fixées
 - ▶ Modèle à saut de Markov
- Meilleure adaptivité de l'algorithme en cas de défaillance soudaine, mémoire des défaillances passées
- Diminution de l'erreur d'estimation de l'état d'environ 20%

Sommaire

1 Introduction

2 Algorithmes pour la fusion bayésienne de données

- Algorithmes déterministes
- Filtrage particulière

3 Fusion de capteurs à modèles d'observation multiples

- Modèles et algorithmes
- Application à la localisation d'un véhicule terrestre

Applications en robotique mobile

- Modèles/algorithmes développés adaptés aux problématiques de robotique mobile

Applications en robotique mobile

- Modèles/algorithmes développés adaptés aux problématiques de robotique mobile
- Développement de véhicules autonomes (drones, taxis automatiques) pour le transport de biens/personnes ou des opérations en milieu hostile (exploration martienne, désamorçage de mine terrestre...)

Applications en robotique mobile

- Modèles/algorithmes développés adaptés aux problématiques de robotique mobile
- Développement de véhicules autonomes (drones, taxis automatiques) pour le transport de biens/personnes ou des opérations en milieu hostile (exploration martienne, désamorçage de mine terrestre...)
- Plusieurs capteurs utilisés

Applications en robotique mobile

- Modèles/algorithmes développés adaptés aux problématiques de robotique mobile
- Développement de véhicules autonomes (drones, taxis automatiques) pour le transport de biens/personnes ou des opérations en milieu hostile (exploration martienne, désamorçage de mine terrestre...)
- Plusieurs capteurs utilisés
 - ▶ Positionnement (GPS, centrale inertielle, compas magnétiques...)

Applications en robotique mobile

- Modèles/algorithmes développés adaptés aux problématiques de robotique mobile
- Développement de véhicules autonomes (drones, taxis automatiques) pour le transport de biens/personnes ou des opérations en milieu hostile (exploration martienne, désamorçage de mine terrestre...)
- Plusieurs capteurs utilisés
 - ▶ Positionnement (GPS, centrale inertielle, compas magnétiques...)
 - ▶ Détection d'obstacle (radars, caméras...)

Applications en robotique mobile

- Modèles/algorithmes développés adaptés aux problématiques de robotique mobile
- Développement de véhicules autonomes (drones, taxis automatiques) pour le transport de biens/personnes ou des opérations en milieu hostile (exploration martienne, désamorçage de mine terrestre...)
- Plusieurs capteurs utilisés
 - ▶ Positionnement (GPS, centrale inertielle, compas magnétiques...)
 - ▶ Détection d'obstacle (radars, caméras...)
- Mesures délivrées par les capteurs peuvent être altérées à cause de conditions extérieures difficiles

Applications en robotique mobile

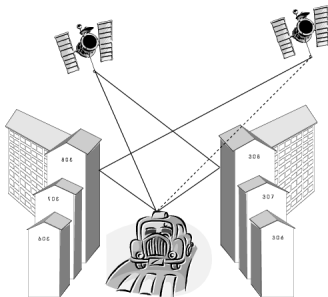
- Modèles/algorithmes développés adaptés aux problématiques de robotique mobile
- Développement de véhicules autonomes (drones, taxis automatiques) pour le transport de biens/personnes ou des opérations en milieu hostile (exploration martienne, désamorçage de mine terrestre...)
- Plusieurs capteurs utilisés
 - ▶ Positionnement (GPS, centrale inertielle, compas magnétiques...)
 - ▶ Détection d'obstacle (radars, caméras...)
- Mesures délivrées par les capteurs peuvent être altérées à cause de conditions extérieures difficiles
 - ▶ Tempête de sable sur Mars salissant la lentille de la caméra

Applications en robotique mobile

- Modèles/algorithmes développés adaptés aux problématiques de robotique mobile
- Développement de véhicules autonomes (drones, taxis automatiques) pour le transport de biens/personnes ou des opérations en milieu hostile (exploration martienne, désamorçage de mine terrestre...)
- Plusieurs capteurs utilisés
 - ▶ Positionnement (GPS, centrale inertielle, compas magnétiques...)
 - ▶ Détection d'obstacle (radars, caméras...)
- Mesures délivrées par les capteurs peuvent être altérées à cause de conditions extérieures difficiles
 - ▶ Tempête de sable sur Mars salissant la lentille de la caméra
 - ▶ Chutes de neige ajoutant des perturbations à la mesure radar

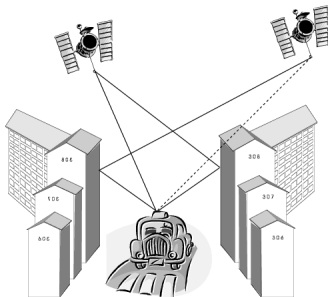
Localisation d'un véhicule terrestre

- Véhicule terrestre équipé de 3 capteurs



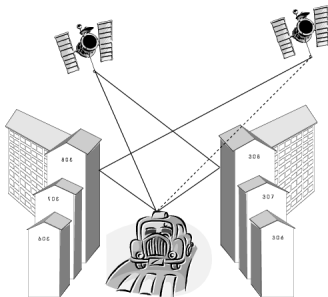
Localisation d'un véhicule terrestre

- Véhicule terrestre équipé de 3 capteurs
 - Récepteur GPS



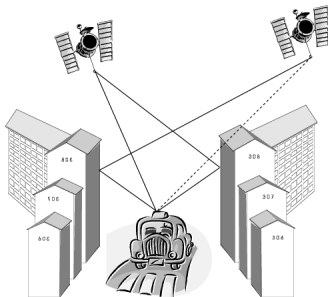
Localisation d'un véhicule terrestre

- Véhicule terrestre équipé de 3 capteurs
 - ▶ Récepteur GPS
 - ▶ Capteur d'angle de braquage



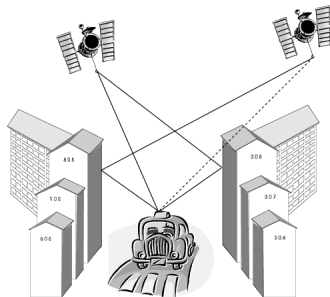
Localisation d'un véhicule terrestre

- Véhicule terrestre équipé de 3 capteurs
 - ▶ Récepteur GPS
 - ▶ Capteur d'angle de braquage
 - ▶ Capteur de vitesse



Localisation d'un véhicule terrestre

- Véhicule terrestre équipé de 3 capteurs
 - ▶ Récepteur GPS
 - ▶ Capteur d'angle de braquage
 - ▶ Capteur de vitesse
- Récepteur GPS potentiellement défaillant à cause de phénomènes de trajets multiples



Modèle statistique

Modèles d'évolution

- Basé sur un modèle cinématique de braquage d'Ackerman

$$X_{t+1} = X_t + T \left[V_t \cos \psi_t + (-a \sin \psi_t + b \cos \psi_t) \frac{V_t}{L} \tan \beta_t \right]$$

$$Y_{t+1} = Y_t + T \left[V_t \sin \psi_t + (a \cos \psi_t + b \sin \psi_t) \frac{V_t}{L} \tan \beta_t \right]$$

$$V_{t+1} = V_t + T \dot{V}_t$$

$$\psi_{t+1} = \psi_t + T \frac{V_t}{L} \tan(\beta_t)$$

$$\beta_{t+1} = \beta_t + T \dot{\beta}_t$$

$$\dot{\beta}_{t+1} = \dot{\beta}_t + T \ddot{\beta}_t$$

avec $\mathbf{v}_t = [\dot{V}_t, \dot{\beta}_t]^T$ le bruit d'état supposé blanc, gaussien et centré, de matrice de covariance connue.

Modèle statistique

Modèles de mesure

- Modèle d'observation nominal du GPS

$$\mathbf{z}_{1,t} = h_1(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{1,t} = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \mathbf{w}_{1,t}$$

Modèle statistique

Modèles de mesure

- Modèle d'observation nominal du GPS

$$\mathbf{z}_{1,t} = h_1(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{1,t} = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \mathbf{w}_{1,t}$$

- Si le capteur GPS est défaillant, densité vague $p_0(\mathbf{z}_{1,t})$

Modèle statistique

Modèles de mesure

- Modèle d'observation nominal du GPS

$$\mathbf{z}_{1,t} = h_1(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{1,t} = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \mathbf{w}_{1,t}$$

- Si le capteur GPS est défaillant, densité vague $p_0(\mathbf{z}_{1,t})$
- Modèles d'observation des capteurs de vitesse et d'angle de braquage

$$z_{2,t} = h_2(\mathbf{x}_t) + w_{2,t} = (1 + \tan(\beta_t) \frac{H}{L}) v_t + w_{2,t}$$

et

$$z_{3,t} = h_3(\mathbf{x}_t) + w_{3,t} = \beta_t + w_{3,t}$$

Modèle statistique

Défaillance du récepteur GPS

- Défaillance du GPS modélisée selon les modèles décrits précédemment

Modèle statistique

Défaillance du récepteur GPS

- Défaillance du GPS modélisée selon les modèles décrits précédemment
- Variable indicatrice discrete $c_{1,t} \in \{0, 1\}$

Modèle statistique

Défaillance du récepteur GPS

- Défaillance du GPS modélisée selon les modèles décrits précédemment
- Variable indicatrice discrete $c_{1,t} \in \{0, 1\}$
- Probabilités $\alpha_{1,t}$

Modèle statistique

Défaillance du récepteur GPS

- Défaillance du GPS modélisée selon les modèles décrits précédemment
- Variable indicatrice discrete $c_{1,t} \in \{0, 1\}$
- Probabilités $\alpha_{1,t}$
- Hyperparamètres $\sigma_{1,t}^\alpha$

Algorithme

- Evolution quasi-déterministe (bruits d'évolution faibles)

Algorithme

- Evolution quasi-déterministe (bruits d'évolution faibles)
 - Problème d'appauvrissement des échantillons dans le filtre particulaire

Algorithme

- Evolution quasi-déterministe (bruits d'évolution faibles)
 - Problème d'appauvrissement des échantillons dans le filtre particulaire
- Utilisation d'un filtre de Kalman sans parfum rao-blackwellisé [Briers *et al.*, 2003]

Algorithme

- Evolution quasi-déterministe (bruits d'évolution faibles)
 - Problème d'appauvrissement des échantillons dans le filtre particulaire
- Utilisation d'un filtre de Kalman sans parfum rao-blackwellisé [Briers *et al.*, 2003]
- Banque de filtres de Kalman sans parfum en interaction

Résultats

- Données réelles collectée par l'ACFR¹

1. Australian Center for fields Robotics

Résultats

- Données réelles collectée par l'ACFR¹
 - ▶ Simulation de trajets multiples par l'ajout d'un biais aléatoire constant par morceaux aux données réelles GPS

1. Australian Center for fields Robotics

Résultats

- Données réelles collectée par l'ACFR ¹
 - ▶ Simulation de trajets multiples par l'ajout d'un biais aléatoire constant par morceaux aux données réelles GPS
 - ▶ Simulation d'un dérapage du véhicule en modifiant la mesure d'angle de braquage

1. Australian Center for fields Robotics

Résultats

- Données réelles collectée par l'ACFR ¹
 - ▶ Simulation de trajets multiples par l'ajout d'un biais aléatoire constant par morceaux aux données réelles GPS
 - ▶ Simulation d'un dérapage du véhicule en modifiant la mesure d'angle de braquage
- Comparaison du modèle/ algorithme proposé

1. Australian Center for fields Robotics

Résultats

- Données réelles collectée par l'ACFR ¹
 - ▶ Simulation de trajets multiples par l'ajout d'un biais aléatoire constant par morceaux aux données réelles GPS
 - ▶ Simulation d'un dérapage du véhicule en modifiant la mesure d'angle de braquage
- Comparaison du modèle/ algorithme proposé
 - ▶ Filtre de Kalman sans parfum classique

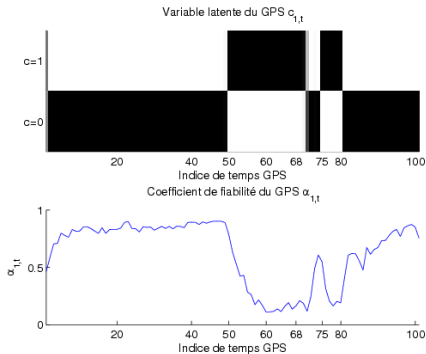
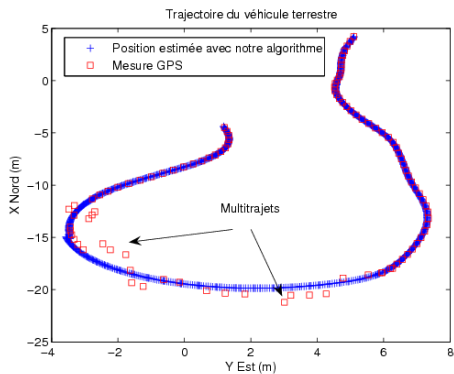
1. Australian Center for fields Robotics

Résultats

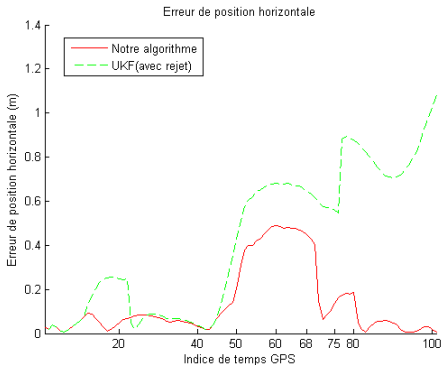
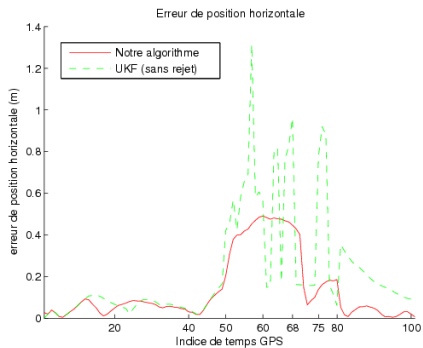
- Données réelles collectée par l'ACFR ¹
 - ▶ Simulation de trajets multiples par l'ajout d'un biais aléatoire constant par morceaux aux données réelles GPS
 - ▶ Simulation d'un dérapage du véhicule en modifiant la mesure d'angle de braquage
- Comparaison du modèle/ algorithme proposé
 - ▶ Filtre de Kalman sans parfum classique
 - ▶ Filtre de Kalman sans parfum avec rejet des mesures selon un test statistique

1. Australian Center for fields Robotics

Résultats



Résultats



Bibliographie



M. Briers, S. Maskell, and R. Wright.

A Rao-Blackwellised Unscented Kalman Filter.

In Proceedings of 6th International Conference on Information Fusion, 2003.



F. Caron, M. Davy, E. Duflos, and P. Vanheeghe.

Particle Filtering for Multisensor Data Fusion with Switching Observation Models.
Application to Land Vehicle Positioning.

IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 55, 2007.



A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon (Edt.)

Sequential Monte Carlo Methods in Practice.

Springer, 2001.



P. Del Moral

Feynman-Kac Formulae. Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications.

Springer, 2004.

This is the end

Merci pour votre attention !!

<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~fcaron>