Étude de nouvelles stratégies de couplage latéral dans les modèles régionaux de prévision numérique du temps

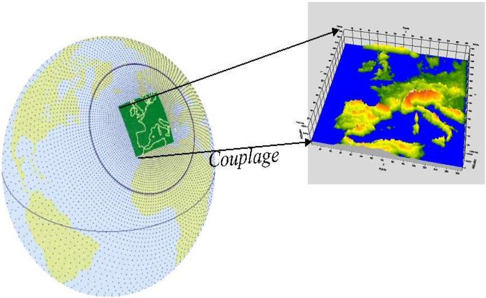
Fabrice Voitus

CNRM/GAME, Météo-France

25 *Mars* 2009

Les modèles à aire limitée :LAMs

- Zoom sur une région délimitée de l'atmosphère globale.
  ⇒ Production de prévisions du temps à échelles plus fines .



- Les bords latéraux des LAMs sont des limites artificielles.
  ⇒ ne font pas obstacle à l'écoulement.

- Résolution des équations de la météorologie dans cette région.

⇒ Résolution d'un problème aux conditons initiales et aux **conditions aux limites latérales** (LBCs) à chaque instant.

Conditions aux limites latérales bien-posées et transparentes

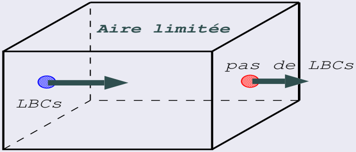
- **Sur-spécification** ⇒ Problème aux LBCs **mal-posée**
⇒ Développement de solutions parasites et problème d'instabilités.

Spécification bien-posée des LBCs

- Systèmes EDP hyperboliques :

Pour chaque vitesse caractéristique pointant localement vers l'intérieur du domaine limité, un champ doit être imposer à la frontière latérale.

Oliger et Sundström (1978)



Transparence des LBCs

- une onde en provenance de l'intérieur doit pouvoir quitter librement l'aire limitée, sans être réfléchie.
- L'information issue de l'extérieur doit pouvoir être introduite dans l'aire limité sans déformation.

L'approche historique en prévision numérique

Relaxation de Davies (1976)

Sur-spécification à la frontière

$+$

Filtrage des solutions parasites et absorption des réflexions dans un zone tampon via un terme de rappel newtonien :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = F_{\psi} - K \left(\psi - \psi^{h} \right),$$

- Points forts : Efficace, robuste et facile à implémenter.

Points faibles

1. Sur-spécification $\Rightarrow$ introduction d'erreurs inutiles (mal-posée).
2. Zone tampon partiellement réflective $\Rightarrow$ corruption de la prévision par des ondes indésirables

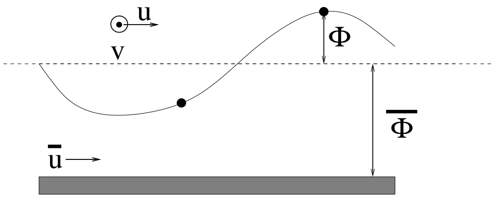
Objectif poursuivi, et méthodologie

- Remplacement de la méthode de relaxation de Davies par des stratégies mieux posées mathématiquement.

1. Méthode des LBCs radiatives bien-posées
2. Zone absorbante PML (Perfectly Matched Layer)

- Étude dans un cadre simplifié via un modèle laboratoire en équations en eau peu profonde mono-dimesionnel linéaire.

Un modèle Laboratoire : Shallow-water linéaire 1D



Évolution de la perturbation de la surface d'un fluide autour d'un état de base uniforme : $\bar{u} > 0$ et $\bar{\phi} = cte$.

Les équations du mouvement sur $0 \leq x \leq L$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} - \bar{f}\, v(x,t) &= 0, \\
\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \bar{f}\, u(x,t) &= 0, \\
\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} + \bar{c}^2\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned}
$$

$\bar{f}$: paramètre de Coriolis.
$\bar{c} = \sqrt{\bar{\phi}}$: vitesse de phase des ondes de gravité externes pures.

Stratégie 1 : LBCs radiatives bien-posées

Principe

Remplacer les équations du mouvement à la frontière latérale du domaine par un jeu d'équations différentielles "bien-posées" dont les relations de dispersion ne sont satisfaites que par les ondes sortant du domaine.

Théorie générale de construction, Engquist et Madja (1977)

- analyse modale de l'opérateur DtN (Dirichlet-to-Neumann) dans l'espace de Laplace dans le temps et de Fourier suivant la direction tangente à la frontière :

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial n} = \mathbf{M}_{\Gamma} \widehat{\boldsymbol{\Psi}}$$

- valeurs propres de $\mathbf{M}_{\Gamma}$ $\equiv$ inverse des vitesses caractéristiques.
- $\hat{\mathbf{W}}$: vecteurs propres associés $\equiv$ jeu d'équations pseudo-différentielles.

Stratégie 1 : LBCs radiatives bien-posées

Application au système shallow-water linéaire 1D

Transformation de Laplace :.

$$\hat{\mathbf{\Psi}}(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathbf{\Psi}(x,t)\,dt$$

L'opérateur DtN :

$$\mathbf{M}_\Gamma \quad = \quad \frac{1}{\bar{u}\left(\bar{u}^2-\bar{c}^2\right)}\begin{bmatrix} \bar{u}^2 & -\bar{u}\bar{c}^2 & \bar{u}\bar{c}^2\left(\bar{f}/s\right) \\ -\bar{u} & \bar{u}^2 & -\bar{u}^2\left(\bar{f}/s\right) \\ 0 & \left(\bar{u}^2-\bar{c}^2\right)\left(\bar{f}/s\right) & \left(\bar{u}^2-\bar{c}^2\right) \end{bmatrix}.$$

Ces valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} \quad &= \quad \frac{1}{\bar{u}\pm\bar{c}} \pm \frac{\bar{c}}{\bar{u}^2-\bar{c}^2}\left[1-\sqrt{1+\frac{f^2}{s^2}\left(1-\frac{\bar{u}^2}{\bar{c}^2}\right)}\right], \\ \lambda_{pv} \quad &= \quad \frac{1}{\bar{u}}. \end{aligned}$$

Stratégie 1 : LBCs radiatives bien-posées

Application au système shallow-water linéaire 1D

Les vecteurs propres associés :

$$\begin{aligned}\hat{W}_{\pm} &= \bar{c}\,\hat{u} + \bar{u}\frac{\bar{f}}{s}\hat{v} \pm \hat{\phi}\sqrt{1 + \frac{f^2}{s^2}\left(1 - \frac{\bar{u}^2}{\bar{c}^2}\right)}, \\ \hat{W}_{pv} &= \hat{v} + \frac{\bar{f}}{s}\left(\hat{u} + \frac{\bar{u}}{\bar{c}^2}\hat{\phi}\right).\end{aligned}$$

Approximation en développement en série (ex : Taylor, ou Padé) de $\hat{\mathbf{W}}$*, sous l'hypothèse* $\bar{f}/s \ll 1 \Rightarrow$ *Ex : LBCs radiatives d'ordre 1 en série de Taylor :*

$$\begin{aligned}W_{\pm} &= \frac{\partial}{\partial t}(\phi \pm \bar{c}u) + f\,\bar{u}\,v, & \lambda_{\pm} &= \frac{1}{\bar{u} \pm \bar{c}} \\ W_{pv} &= \frac{\partial v}{\partial t} + f\left(u + \frac{\bar{u}}{\bar{c}^2}\phi\right), & \lambda_{pv} &= \frac{1}{\bar{u}}\end{aligned}$$

Seules les conditions radiatives dont les vitesses caractéristiques associées pointent vers l'intérieur du domaine sont imposées. Les autres sont extrapolées à partir des champs intérieurs.

Stratégie 2 : Zone absorbante PML

Principe

Modifier les équations du mouvement dans une zone tampon adjacente à la frontière latérale de sorte que toutes les ondes sortantes soient totalement absorbées aux bords.

Méthode de construction, Hu (2001)

1. Transformation spatio-temporelle :

$$t' \rightarrow t + \mu x,$$

2. Changement de variable complexe PML dans le domaine fréquetiel :

$$x \rightarrow x + \frac{\hat{i}}{\omega} \int_{x_0}^{x} \sigma_x dx.$$

μ : paramètre stabilisateur à déterminer.
σ_x : coefficient d'absorption dans la zone PML.

Système sous forme matricielle :

$$\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial x} + \mathbf{C}\mathbf{\Psi} = 0,$$

PML équation dans l'espace fréquentiel :

$$\begin{aligned} -\hat{\imath}\omega\left(\mathbf{I}+\mu\mathbf{A}\right)\hat{\mathbf{\Psi}} + \frac{1}{1+\hat{\imath}\frac{\sigma_x}{\omega}}\mathbf{A}\frac{\partial \hat{\mathbf{\Psi}}}{\partial x} + \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Psi}} &= 0, \\ \Rightarrow \quad \left(-\hat{\imath}\omega + \sigma_x\right)\left(\mathbf{I}+\mu\mathbf{A}\right)\hat{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{A}\frac{\partial \hat{\mathbf{\Psi}}}{\partial x} + \left(1+\hat{\imath}\frac{\sigma_x}{\omega}\right)\mathbf{C}\hat{\mathbf{\Psi}} &= 0. \end{aligned}$$

En posant $\hat{\mathbf{q}} = \frac{\hat{\imath}}{\omega}\hat{\mathbf{\Psi}}$, il vient :

$$-i\omega\hat{\mathbf{\Psi}} + \mathbf{A}\frac{\partial \hat{\mathbf{\Psi}}}{\partial x} + \mathbf{C}\hat{\mathbf{\Psi}} + \sigma_x\left(\mathbf{I}+\mu\mathbf{A}\right)\hat{\mathbf{\Psi}} + \sigma_x\mathbf{C}\hat{\mathbf{q}} = 0.$$

Stratégie 2 : Zone absorbante PML

Application au système shallow-water linéaire 1D

Équations dans la zone PML :

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{\Psi}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} + \mathbf{C}\boldsymbol{\Psi} &= -\sigma_x \left(\mathbf{I} + \mu \mathbf{A}\right)\boldsymbol{\Psi} - \sigma_x \mathbf{C}\mathbf{q}, \\
\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= \boldsymbol{\Psi}.
\end{aligned}$$

Stabilité des équations PML

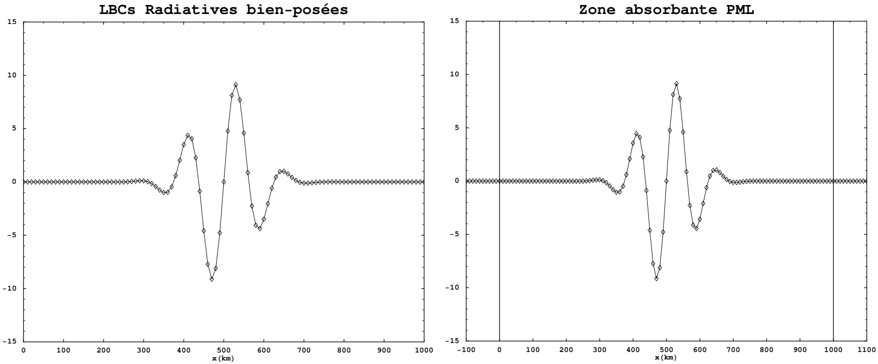
- *Ces équations sont "bien-posées" vis-à-vis du problème de Cauchy si et seulement si ,les vitesses de phase et les vitesses de groupe associées dans la direction normale, ont le même signe.*

  Béchache *et al.* (2002).

- Pour $|\bar{u}| < \bar{c}$, une condition nécessaire et suffisante est :

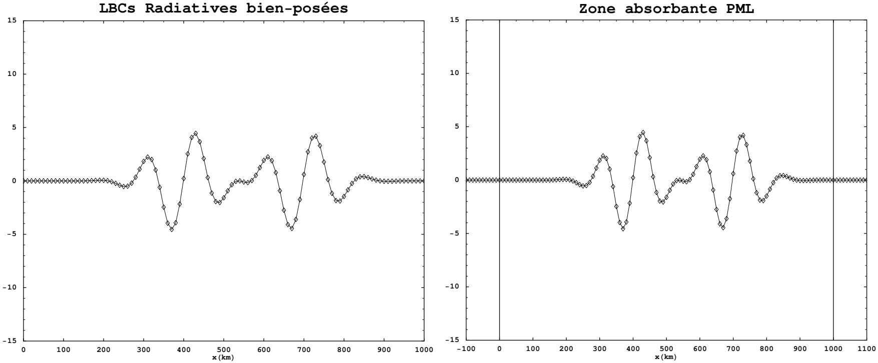
$$\mu = \frac{\bar{u}}{\bar{c}^2 - \bar{u}^2}$$

Discrétisation en différence finies sur un grille décalée type-C ; avance temporelle : Leap-Frog.
$\bar{c} = 300 m\,s^{-1}$, $\bar{u} = 100 m\,s^{-1}$, $L = 1000\,km$, $\Delta x = 10\,km$ et $\Delta t = 10\,s$.



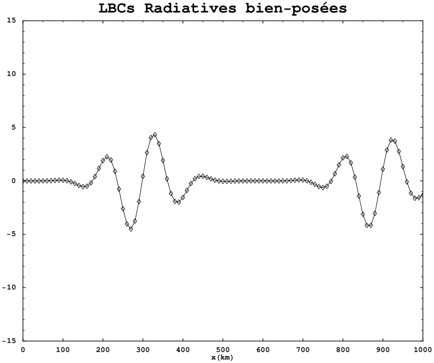
État initial : Géopotentiel $\phi(x, 0)$ Gaussienne modulée par une sinusoïde, et
$u(x, 0) = v(x, 0) = 0$.

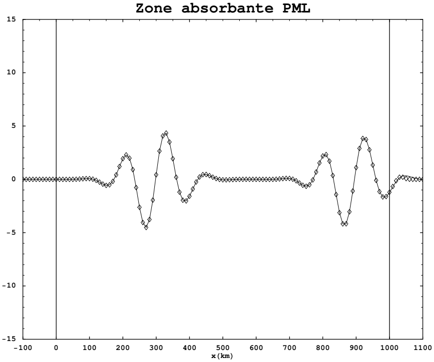
Discrétisation en différence finies sur un grille décalée type-C ; avance temporelle : Leap-Frog.
$\bar{c} = 300 m\, s^{-1}$, $\bar{u} = 100 m\, s^{-1}$, $L = 1000\, km$, $\Delta x = 10\, km$ et $\Delta t = 10\, s$.



T$=50\Delta t$, propagation de paquets d'ondes d'inertie-gravité dans la direction $+x$ à environ $\bar{u} + \bar{c} = 400\, ms^{-1}$ et dans la direction -x à environ $\bar{u} - \bar{c} = -200\, ms^{-1}$.

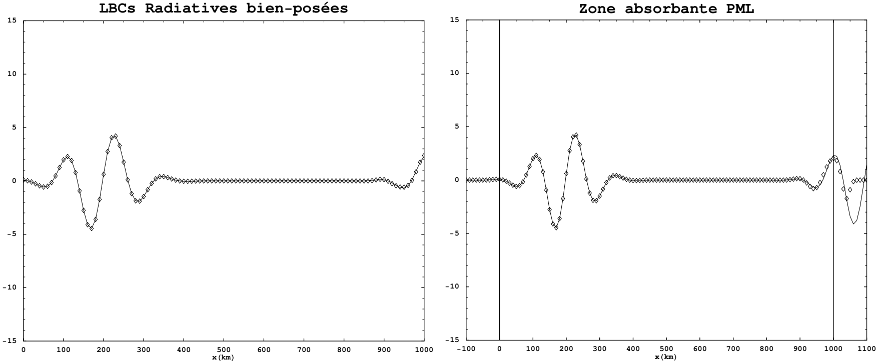
Discrétisation en différences finies sur un grille décalée type-C ; avance temporelle : Leap-Frog.
$\bar{c} = 300 m\, s^{-1}$, $\bar{u} = 100 m\, s^{-1}$, $L = 1000\, km$, $\Delta x = 10\, km$ et $\Delta t = 10\, s$.





T$=100\Delta t$, propagation de paquets d'ondes d'inertie-gravité dans la direction $+x$ à environ $\bar{u} + \bar{c} = 400\, ms^{-1}$ et dans la direction -x à environ $\bar{u} - \bar{c} = -200\, ms^{-1}$.

Discrétisation en différences finies sur un grille décalée type-C ; avance temporelle : Leap-Frog.
$\bar{c} = 300 m\,s^{-1}$, $\bar{u} = 100 m\,s^{-1}$, $L = 1000\,km$, $\Delta x = 10\,km$ et $\Delta t = 10\,s$.

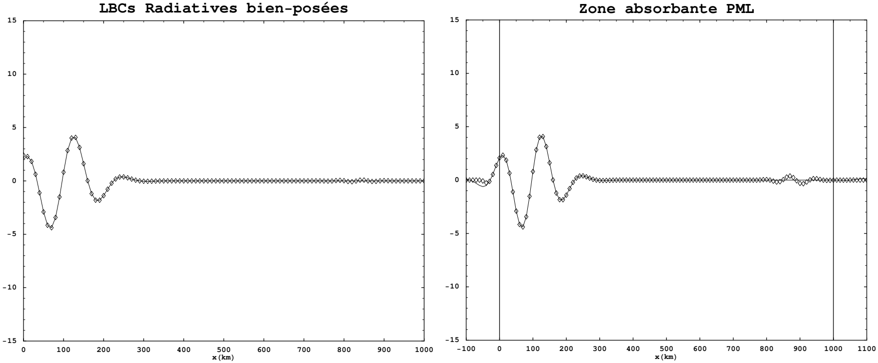


T$=150\Delta t$, propagation de paquets d'ondes d'inertie-gravité dans la direction $+x$ à environ $\bar{u} + \bar{c} = 400\,ms^{-1}$ et dans la direction -x à environ $\bar{u} - \bar{c} = -200\,ms^{-1}$.

Test numériques

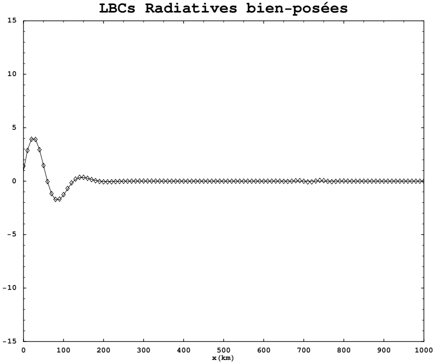
Dissipation des ondes de gravité

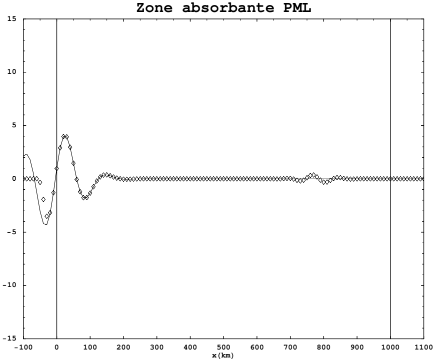
Discrétisation en différences finies sur un grille décalée type-C ; avance temporelle : Leap-Frog. $\bar{c} = 300 m\, s^{-1}$, $\bar{u} = 100 m\, s^{-1}$, $L = 1000\, km$, $\Delta x = 10\, km$ et $\Delta t = 10\, s$.



T$=200\Delta t$, propagation de paquets d'ondes d'inertie-gravité dans la direction $+x$ à environ $\bar{u} + \bar{c} = 400\, ms^{-1}$ et dans la direction -x à environ $\bar{u} - \bar{c} = -200\, ms^{-1}$.

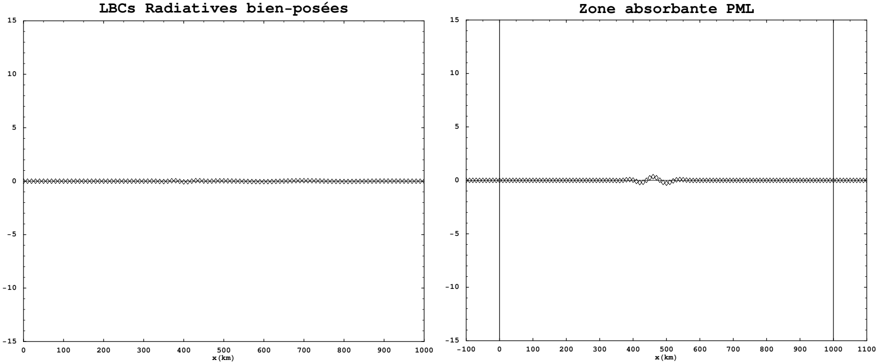
Discrétisation en différences finies sur un grille décalée type-C ; avance temporelle : Leap-Frog.
$\bar{c} = 300 m\, s^{-1}$, $\bar{u} = 100 m\, s^{-1}$, $L = 1000\, km$, $\Delta x = 10\, km$ et $\Delta t = 10\, s$.



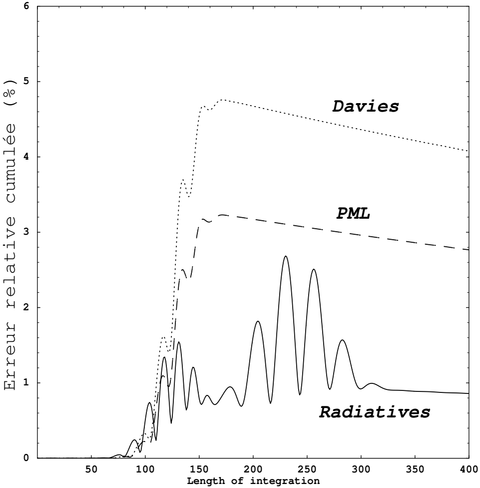


T$=250\Delta t$, processus d'ajustement géostrophique.

Discrétisation en différences finies sur un grille décalée type-C ; avance temporelle : Leap-Frog.
$\bar{c} = 300 m\, s^{-1}$, $\bar{u} = 100 m\, s^{-1}$, $L = 1000\, km$, $\Delta x = 10\, km$ et $\Delta t = 10\, s$.



T$=400\Delta t$, Établissement d'un équilibre géostrophique



- Les deux nouvelles stratégies sont de performences supérieures à la relaxation de Davies.

  .

- La stratégie des LBCs radiatives bien-posées garantie le minimum de réflexions aux bords.

Problèmes à étudier

LBCs radiatives bien-posées

1. Forte sensibilité aux conditions initiales des LBCs radiatives d'ordre supérieure à un $\Rightarrow$ Nécessité d'une parfaite adéquation entre les conditions initiales et les LBCs à l'instant $t = 0$.
2. Stabilité des LBCs radiatives dans un schéma temporelle semi-implicite semi-Lagrangien, (ex : Théorie GKSO).
3. Construction des LBCs radiatives pour le système d'Euler pleinement compressible.

Zone absorbante PML

1. Construction stable des équations PML dans le cas $|\bar{u}| > \bar{c}$.
2. Faisabilité des PML dans un schéma semi-implicite semi-Lagrangien.
3. Stabilisation des PML dans un contexte non-linéaire.