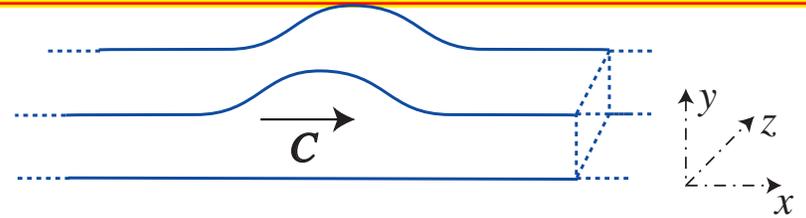

Ondes non linéaires et Formes Normales

Eric Lombardi

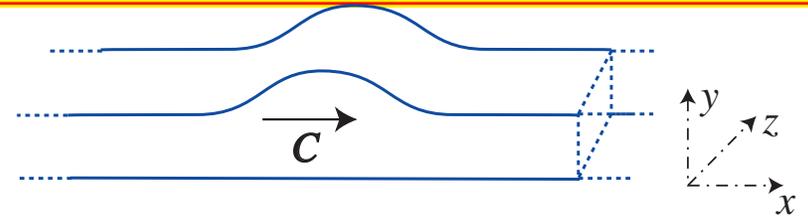
Institut de Mathématiques de Toulouse

Euler + Gravité+tension de surface

Question : Mouvements de l'interface ?



Euler + Gravité+tension de surface



Question : Mouvements de l'interface ?

Cas bidimensionnel : $w(x, y, z, t) = w(x, y, t)$

1) Existence d'ondes progressives

$$w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct.$$

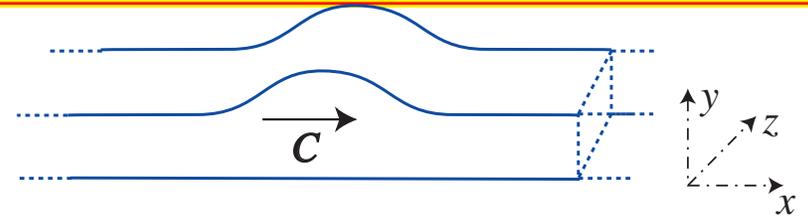


1.1 Ondes prog. périodiques : $v(\xi + T, y) = v(\xi, y)$

1.2 Ondes solitaires : $v(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$

1.3 Ondes solitaires généralisées $v(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} p(\xi \pm \varphi, y)$

Euler + Gravité+tension de surface



Question : Mouvements de l'interface ?

Cas bidimensionnel : $w(x, y, z, t) = w(x, y, t)$

1) Existence d'ondes progressives

$$w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct.$$



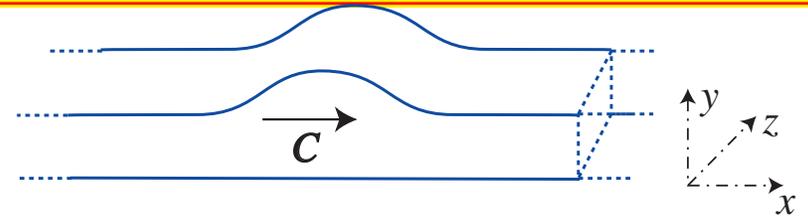
1.1 Ondes prog. périodiques : $v(\xi + T, y) = v(\xi, y)$

1.2 Ondes solitaires : $v(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$

1.3 Ondes solitaires généralisées $v(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} p(\xi \pm \varphi, y)$

2) Stabilité temporelle des ondes progressives

Euler + Gravité+tension de surface



Question : Mouvements de l'interface ?

Cas bidimensionnel : $w(x, y, z, t) = w(x, y, t)$

1) Existence d'ondes progressives

$$w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct.$$



1.1 Ondes prog. périodiques : $v(\xi + T, y) = v(\xi, y)$

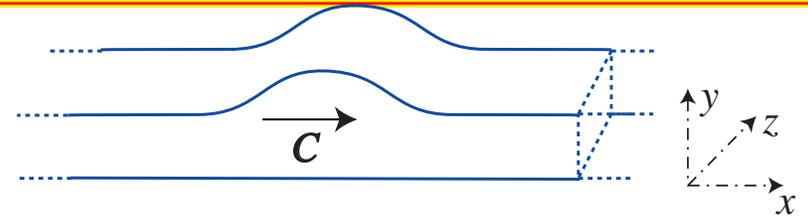
1.2 Ondes solitaires : $v(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$

1.3 Ondes solitaires généralisées $v(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} p(\xi \pm \varphi, y)$

2) Stabilité temporelle des ondes progressives

3) Comment la dynamique temporelle s'articule elle autour des ondes progressives ?

Euler + Gravité+tension de surface



Question : Mouvements de l'interface ?

Cas bidimensionnel : $w(x, y, z, t) = w(x, y, t)$

1) Existence d'ondes progressives

$$w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct.$$



1.1 Ondes prog. périodiques : $v(\xi + T, y) = v(\xi, y)$

1.2 Ondes solitaires : $v(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$

1.3 Ondes solitaires généralisées $v(\xi, y) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} p(\xi \pm \varphi, y)$

2) Stabilité temporelle des ondes progressives

3) Comment la dynamique temporelle s'articule elle autour des ondes progressives ?

4) Idem en 3 D

Vocabulaire

$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{V}(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^n \text{ ou } u \in E \text{ Hilbert}, \quad \mu \in \mathbb{R}^s$$

Vocabulaire

$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{V}(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^n \text{ ou } u \in E \text{ Hilbert}, \quad \mu \in \mathbb{R}^s$$

- p orbite T -périodique $\Leftrightarrow p(\xi + T) = u(\xi)$

Vocabulaire

$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{V}(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^n \text{ ou } u \in E \text{ Hilbert}, \quad \mu \in \mathbb{R}^s$$

- p orbite T -périodique $\Leftrightarrow p(\xi + T) = u(\xi)$
- h orbite homocline à 0 $\Leftrightarrow h(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$

Vocabulaire

$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{V}(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^n \text{ ou } u \in E \text{ Hilbert, } \mu \in \mathbb{R}^s$$

- p orbite T -périodique $\Leftrightarrow p(\xi + T) = u(\xi)$
- h orbite homocline à 0 $\Leftrightarrow h(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} 0$
- h orbite homocline à p solution périodique $\Leftrightarrow h(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\infty} p(\xi \pm \varphi)$

Dynamique spatiale pour les ondes progressives

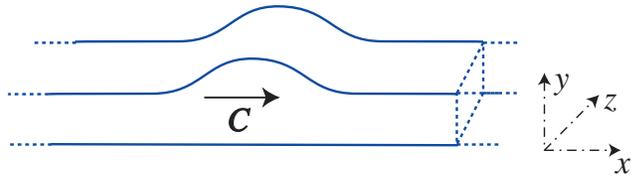
- Ondes progressives bidimensionnelles en hydrodynamique



$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct$$

Dynamique spatiale pour les ondes progressives

- Ondes progressives bidimensionnelles en hydrodynamique



$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct$$



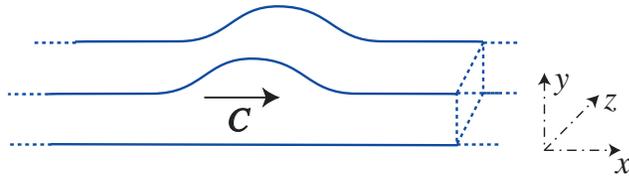
$$u : \mathbb{R} \rightarrow E$$
$$\xi \mapsto \left(y \mapsto v(\xi, y) \right)$$

- Systèmes dynamiques de dimension infinie

$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{A}(\mu).u + \mathcal{N}(u, \mu), \quad u \in E, \mu \in \mathbb{R}^s$$

Dynamique spatiale pour les ondes progressives

- Ondes progressives bidimensionnelles en hydrodynamique



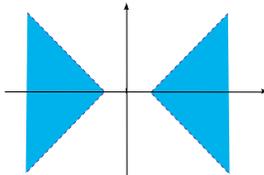
$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct$$



$$u : \mathbb{R} \rightarrow E \\ \xi \mapsto (y \mapsto v(\xi, y))$$

- Systèmes dynamiques de dimension infinie

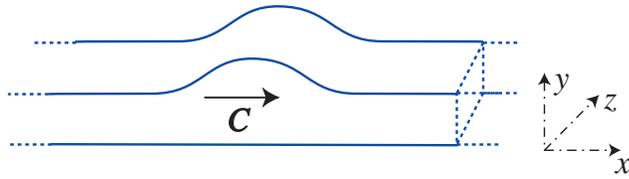
$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{A}(\mu).u + \mathcal{N}(u, \mu), \quad u \in E, \mu \in \mathbb{R}^s$$



$$E = E_c + E_h, \quad u = u_c + u_h, \\ \text{variété centrale } u_h = \Psi(u_c)$$

Dynamique spatiale pour les ondes progressives

- Ondes progressives bidimensionnelles en hydrodynamique

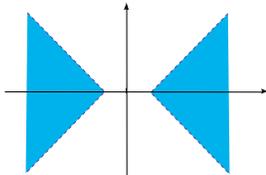


$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct$$

$$u : \mathbb{R} \rightarrow E \\ \xi \mapsto (y \mapsto v(\xi, y))$$

- Systèmes dynamiques de dimension infinie

$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{A}(\mu).u + \mathcal{N}(u, \mu), \quad u \in E, \mu \in \mathbb{R}^s$$



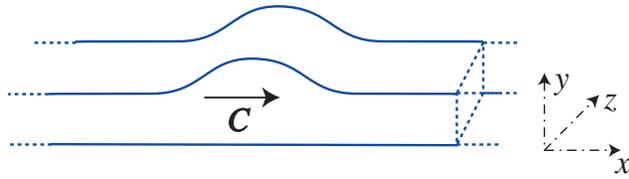
$$E = E_c + E_h, \quad u = u_c + u_h, \\ \text{variété centrale } u_h = \Psi(u_c)$$

- Bifurcations locales pour les E.D.O.

$$\frac{du_c}{d\xi} = V(u_c, \mu), \quad u_c \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^s \quad V(0, \mu) = 0$$

Dynamique spatiale pour les ondes progressives

- Ondes progressives bidimensionnelles en hydrodynamique



$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct$$

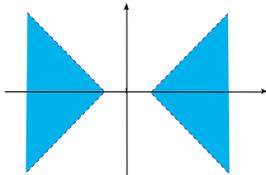


$$u : \mathbb{R} \rightarrow E$$

$$\xi \mapsto (y \mapsto v(\xi, y))$$

- Systèmes dynamiques de dimension infinie

$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{A}(\mu).u + \mathcal{N}(u, \mu), \quad u \in E, \mu \in \mathbb{R}^s$$



$$E = E_c + E_h, \quad u = u_c + u_h,$$

variété centrale $u_h = \Psi(u_c)$

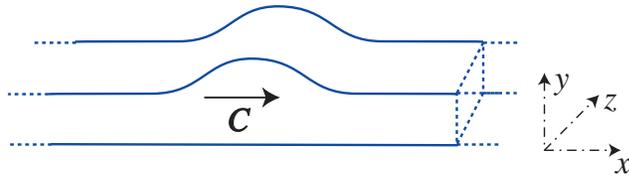
- Bifurcations locales pour les E.D.O.

$$\frac{du_c}{d\xi} = V(u_c, \mu), \quad u_c \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^s$$

$$V(0, \mu) = 0, \quad Sp(DV(0, 0)) \subset i\mathbb{R}, \quad VS = -SV$$

Dynamique spatiale pour les ondes progressives

- Ondes progressives bidimensionnelles en hydrodynamique



$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct$$

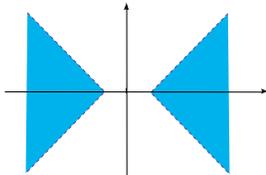


$$u : \mathbb{R} \rightarrow E$$

$$\xi \mapsto \left(y \mapsto v(\xi, y) \right)$$

- Systèmes dynamiques de dimension infinie

$$\frac{du}{d\xi} = \mathcal{A}(\mu).u + \mathcal{N}(u, \mu), \quad u \in E, \mu \in \mathbb{R}^s$$



$$E = E_c + E_h, \quad u = u_c + u_h,$$

variété centrale $u_h = \Psi(u_c)$

- Bifurcations locales pour les E.D.O.

$$\frac{du_c}{d\xi} = V(u_c, \mu), \quad u_c \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^s \quad V(0, \mu) = 0, \quad Sp(DV(0, 0)) \subset i\mathbb{R}, \quad VS = -SV$$

Question: Dynamique locale au voisinage de l'origine?

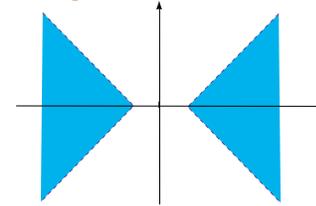
Spectre de l'opérateur linéaire $\mathcal{A}(b, F)$

Reversibilité : λ vp de $\mathcal{A} \implies \lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda}$ vp de \mathcal{A}

Spectre de l'opérateur linéaire $\mathcal{A}(b, F)$

Reversibilité : λ vp de $\mathcal{A} \implies \lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda}$ vp de \mathcal{A}

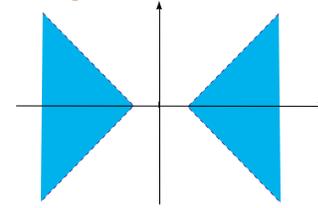
- partie I : loin de l'axe imaginaire



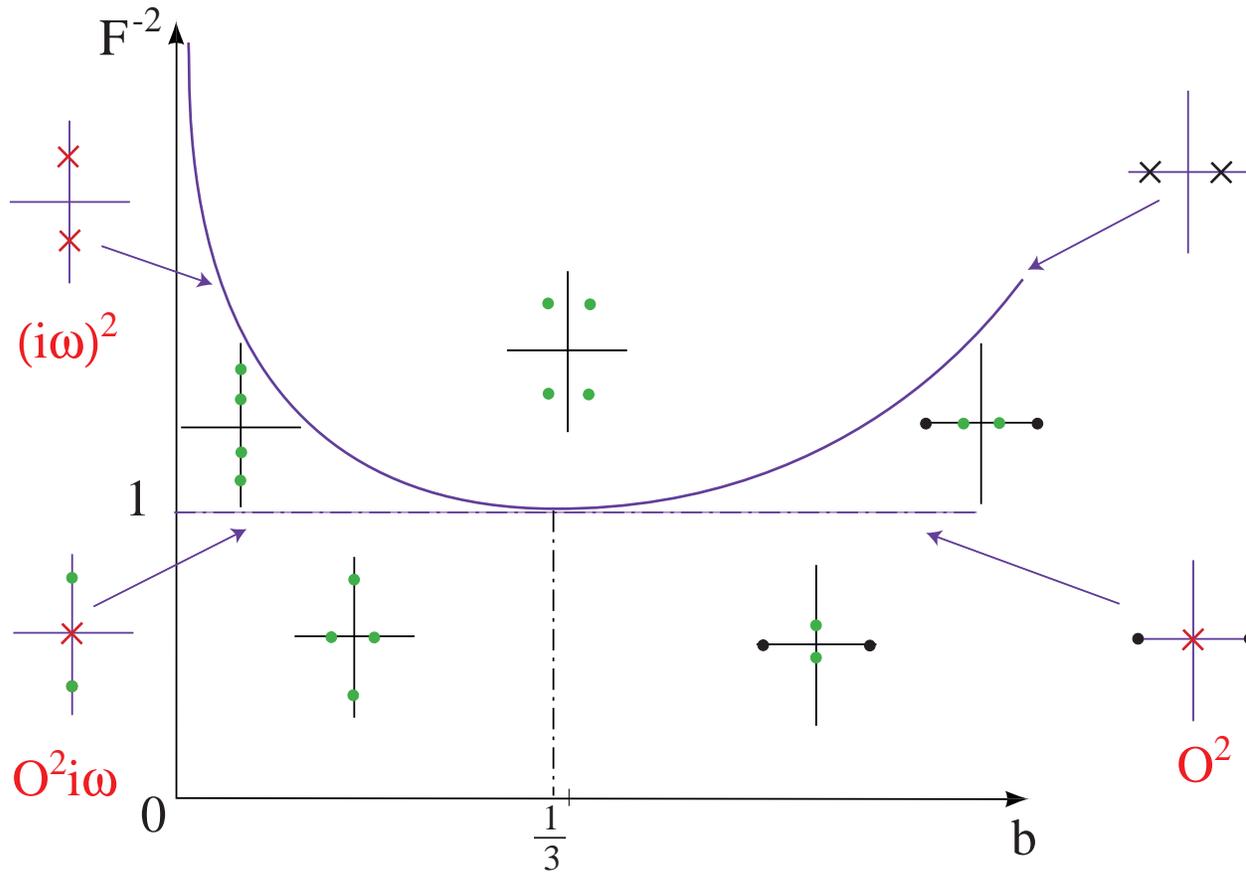
Spectre de l'opérateur linéaire $\mathcal{A}(b, F)$

Reversibilité : λ vp de $\mathcal{A} \implies \lambda, \bar{\lambda}, -\lambda, -\bar{\lambda}$ vp de \mathcal{A}

• **partie I** : loin de l'axe imaginaire

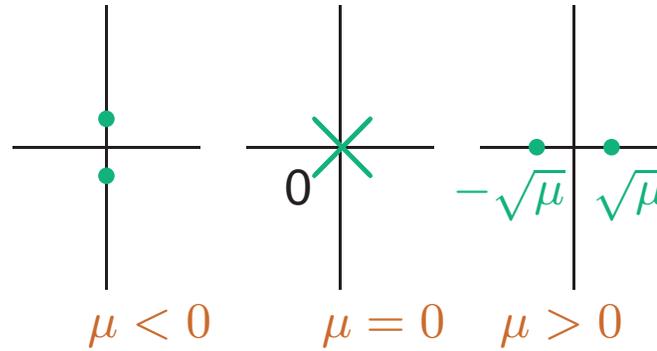


• **partie II** : au voisinage de l'axe imaginaire

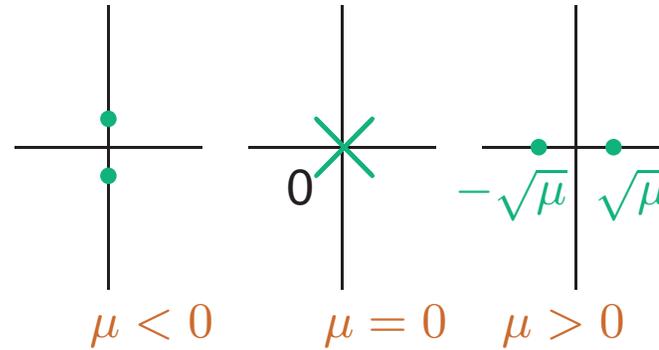


3 résonances : $0^2, 0^2 i\omega, (i\omega)^2$.

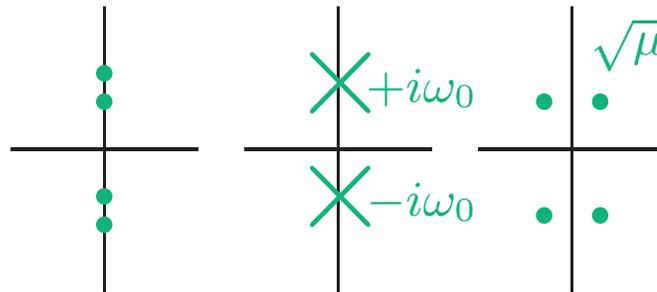
(1) Résonance 0^2



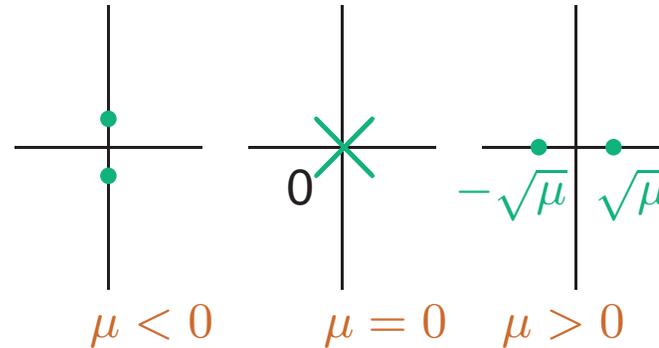
(1) Résonance 0^2



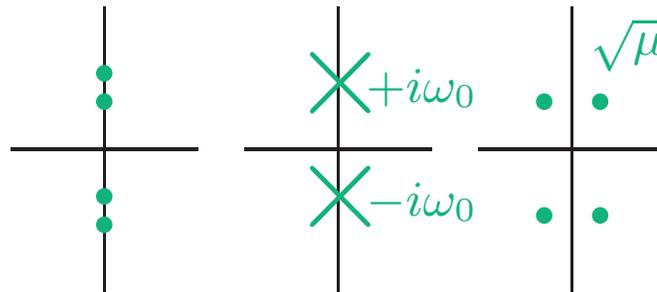
(2) Résonance $(i\omega)^2$



(1) Résonance 0^2

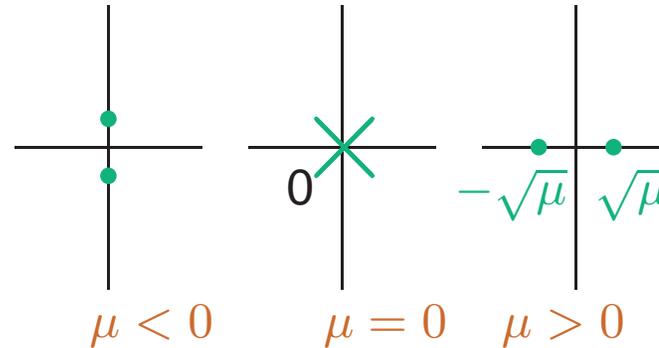


(2) Résonance $(i\omega)^2$

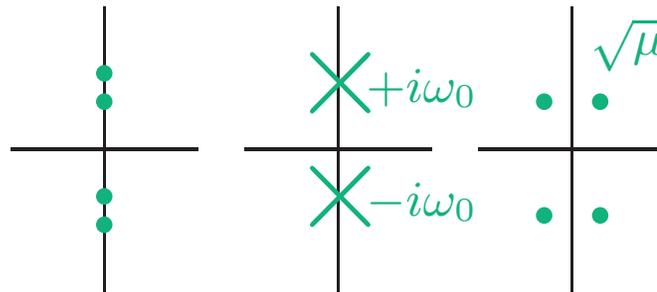


Thm Si $V(u, \mu)$ est réversible ($SV = -VS$, $S^2 = \text{Id}$) et admet une résonance 0^2 (resp. $(i\omega)^2$) à l'origine, alors V admet une orbite homocline à 0 pour $\mu > 0$ suffisamment petit.

(1) Résonance 0^2

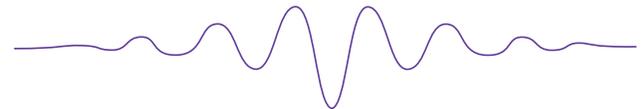


(2) Résonance $(i\omega)^2$



Thm Si $V(u, \mu)$ est réversible ($SV = -VS$, $S^2 = \text{Id}$) et admet une résonance 0^2 (resp. $(i\omega)^2$) à l'origine, alors V admet une orbite homocline à 0 pour $\mu > 0$ suffisamment petit.

Application. Existence d'ondes solitaires pour $\mu > 0$ suffisamment petit pour $b > \frac{1}{3}$, $F \approx 1$ (rés. 0^2) et $0 < b < \frac{1}{3}$, $F \approx C(b)$ (rés. $(i\omega)^2$)



Thm Si $V(u, \mu)$ est réversible ($SV = -VS$, $S^2 = \text{Id}$) et admet une résonance 0^2 (resp. $(i\omega)^2$) à l'origine, alors V admet une orbite homocline à 0 pour $\mu > 0$ suffisamment petit.

Dem.

Thm Si $V(u, \mu)$ est réversible ($SV = -VS$, $S^2 = \text{Id}$) et admet une résonance 0^2 (resp. $(i\omega)^2$) à l'origine, alors V admet une orbite homocline à 0 pour $\mu > 0$ suffisamment petit.

Dem.

$$\frac{du}{dt} = V(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}, \quad V(0, \mu) = 0$$

Thm Si $V(u, \mu)$ est réversible ($SV = -VS$, $S^2 = \text{Id}$) et admet une résonance 0^2 (resp. $(i\omega)^2$) à l'origine, alors V admet une orbite homocline à 0 pour $\mu > 0$ suffisamment petit.

Dem.

$$\frac{du}{dt} = V(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}, \quad V(0, \mu) = 0$$

- Étape 0. $\dot{u} = T_p(u, \mu) + \mathcal{O}(|u|^{p+1})$

Thm Si $V(u, \mu)$ est réversible ($SV = -VS$, $S^2 = \text{Id}$) et admet une résonance 0^2 (resp. $(i\omega)^2$) à l'origine, alors V admet une orbite homocline à 0 pour $\mu > 0$ suffisamment petit.

Dem.

$$\frac{du}{dt} = V(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}, \quad V(0, \mu) = 0$$

- Étape 0. $\dot{u} = T_p(u, \mu) + \mathcal{O}(|u|^{p+1})$
 - Étape 1. $\dot{y} = N_p(y, \mu) + \mathcal{O}(|y|^{p+1})$
- $u = y + \Phi_p(y, \mu)$
formes Normales
-

Thm Si $V(u, \mu)$ est réversible ($SV = -VS$, $S^2 = \text{Id}$) et admet une résonance 0^2 (resp. $(i\omega)^2$) à l'origine, alors V admet une orbite homocline à 0 pour $\mu > 0$ suffisamment petit.

Dem.

$$\frac{du}{dt} = V(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}, \quad V(0, \mu) = 0$$

- Étape 0. $\dot{u} = T_p(u, \mu) + \mathcal{O}(|u|^{p+1})$
 - Étape 1. $\dot{y} = N_p(y, \mu) + \mathcal{O}(|y|^{p+1})$
 - Étape 2. (Troncature) $\dot{y} = N_p(y, \mu)$
- $u = y + \Phi_p(y, \mu)$
formes Normales
-

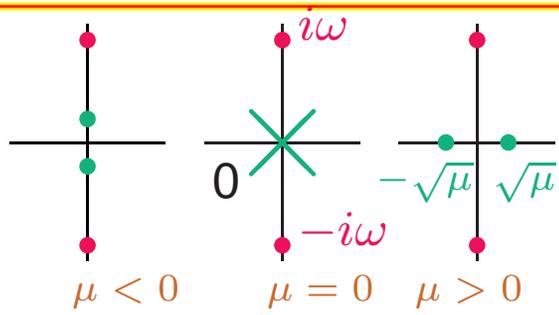
Thm Si $V(u, \mu)$ est réversible ($SV = -VS$, $S^2 = \text{Id}$) et admet une résonance 0^2 (resp. $(i\omega)^2$) à l'origine, alors V admet une orbite homocline à 0 pour $\mu > 0$ suffisamment petit.

Dem.

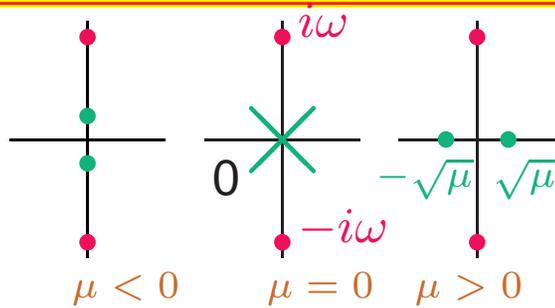
$$\frac{du}{dt} = V(u, \mu), \quad u \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}, \quad V(0, \mu) = 0$$

- Étape 0. $\dot{u} = T_p(u, \mu) + \mathcal{O}(|u|^{p+1})$
- Étape 1. $\dot{y} = N_p(y, \mu) + \mathcal{O}(|y|^{p+1})$  $u = y + \Phi_p(y, \mu)$
formes Normales
- Étape 2. (Troncature) $\dot{y} = N_p(y, \mu)$
- Étape 3. (Persistance) $\dot{y} = N_p(y, \mu) + R_p(y, \mu)$ Théorie de perturbations C^r

(3) Résonance $0^2 i\omega$



(3) Résonance $0^2 i\omega$

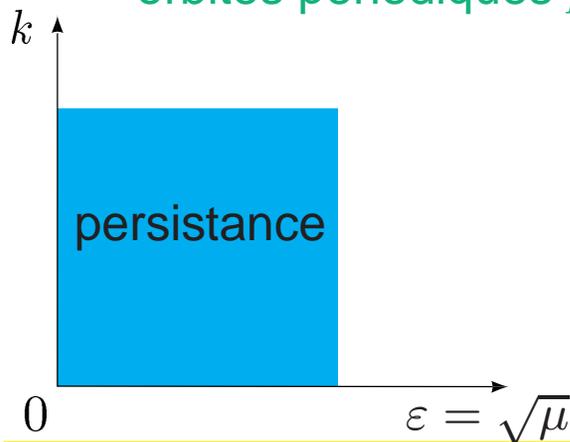


Thm Soit $V(u, \mu)$, $u \in \mathbb{R}^4$, $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$, analytique et réversible, tel que $V(0, \mu) = 0$ et admettant une résonnance $0^2 i\omega$

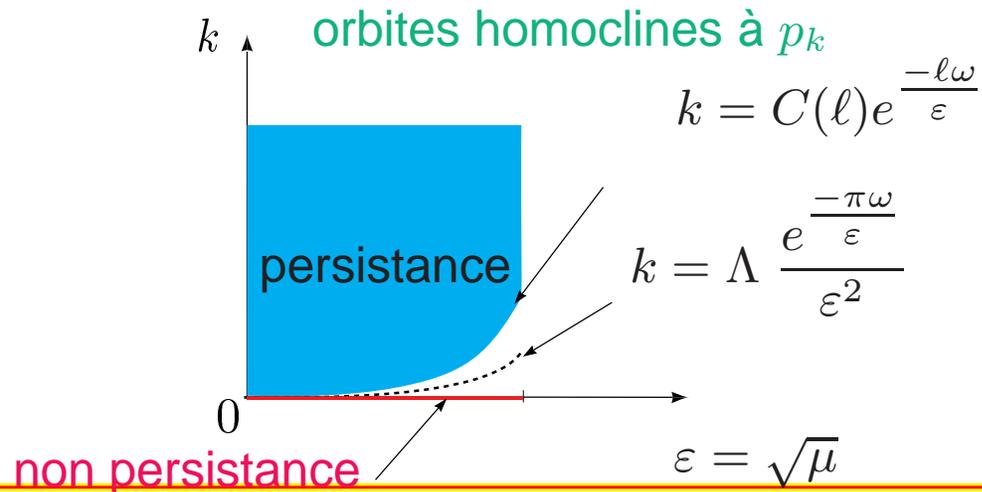
Alors, pour $\mu > 0$ assez petit, V admet

1. des orbites périodiques p_k de taille arbitrairement petite $k \geq 0$
2. des orbites homoclines à p_k pourvu que $k \geq C(\ell)e^{-\frac{l\omega}{\varepsilon}}$, $0 < \ell < \pi$
3. Génériquement pas d'orbite homocline à 0

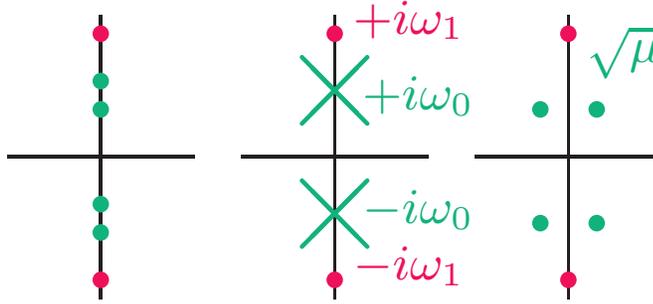
orbites periodiques p_k



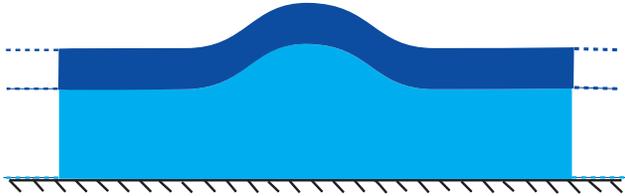
orbites homoclines à p_k



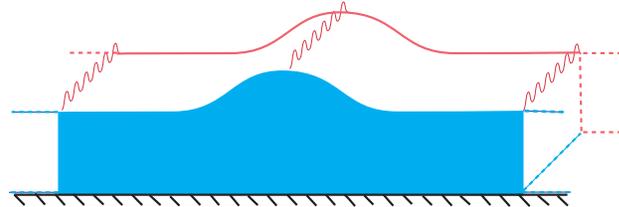
(4) résonance $(i\omega_0)^2 i\omega_1$



- Ondes 2-D pour 2 couches

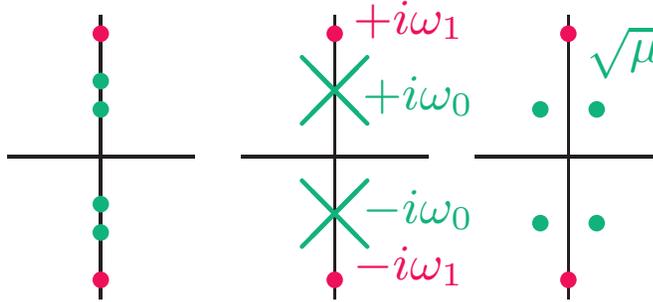


- Ondes 3-D pour une couche avec des modulations transverses paires et périodiques

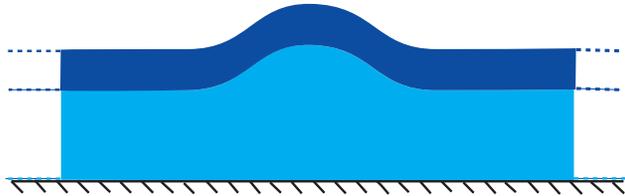


Thm identique à celui pour la résonance $0^2 i\omega$

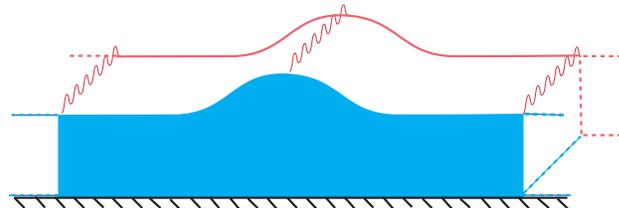
(4) résonance $(i\omega_0)^2 i\omega_1$



- Ondes 2-D pour 2 couches



- Ondes 3-D pour une couche avec des modulations transverses paires et périodiques

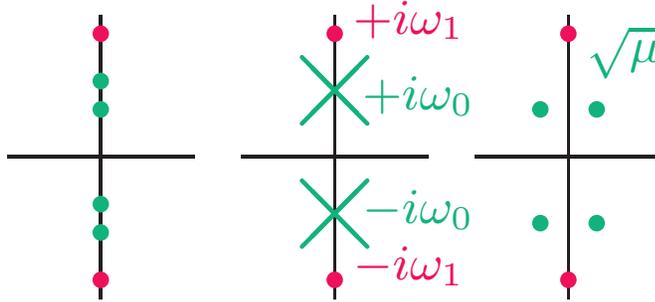


Thm identique à celui pour la résonance $0^2 i\omega$

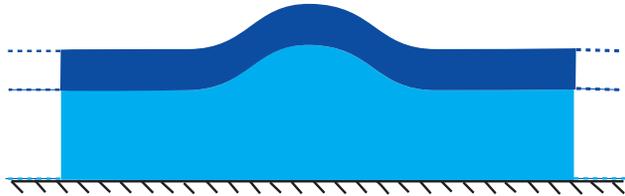
Dem Problème de résonance entre ω_0 et ω_1

► Calcul d'intégrales bi-oscillantes $J(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \frac{\omega_0 t}{\varepsilon}, \varepsilon) e^{\frac{i\omega_1 t}{\varepsilon}} dt$

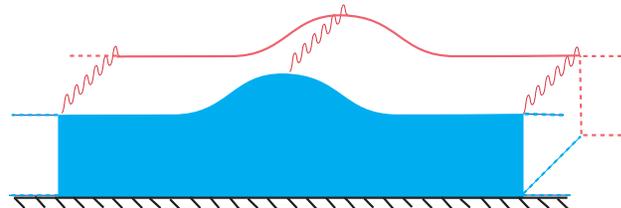
(4) résonance $(i\omega_0)^2 i\omega_1$



- Ondes 2-D pour 2 couches



- Ondes 3-D pour une couche avec des modulations transverses paires et périodiques



Thm identique à celui pour la résonance $0^2 i\omega$

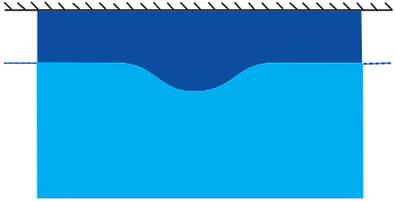
Dem Problème de résonance entre ω_0 et ω_1

► Calcul d'intégrales bi-oscillantes $J(f, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \frac{\omega_0 t}{\varepsilon}, \varepsilon) e^{\frac{i\omega_1 t}{\varepsilon}} dt$

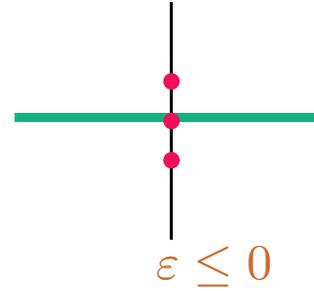
► Méthode à deux échelles de temps

$$\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\omega_0}{\varepsilon} \frac{\partial y}{\partial s} = V(y, \varepsilon) \xrightarrow{u(\xi) = y(\xi, \frac{\omega_0 \xi}{\varepsilon})} \frac{du}{d\xi} = V(u, \varepsilon)$$

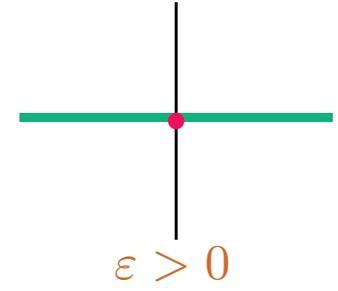
(5) Résonance $C_{\mathbb{R}} 0$



Euler+gravité
Profondeur infinie

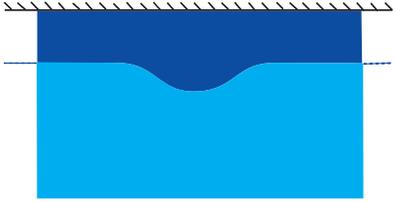


$$\varepsilon \leq 0$$



$$\varepsilon > 0$$

(5) Résonance $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} 0$



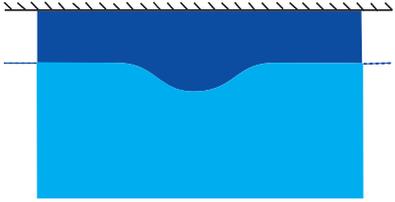
Euler+gravité
Profondeur infinie



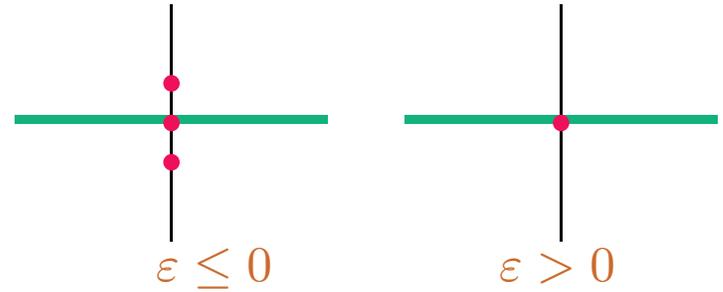
- Equation modèle : Benjamin-Ono :

$$\mathcal{H}(u') = u^2 - u$$

(5) Résonance $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} 0$



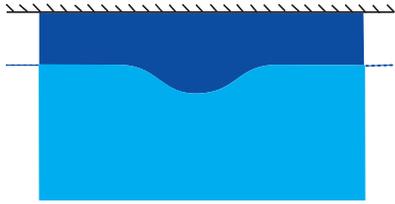
Euler+gravité
Profondeur infinie



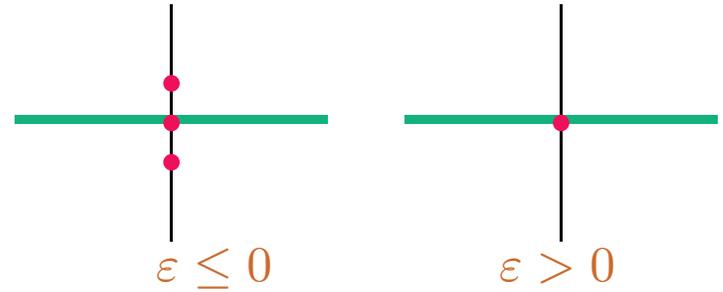
• Equation modèle : Benjamin-Ono : $\mathcal{H}(u') = u^2 - u$

où $\mathcal{H}(u)(\tau) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{\tau - s} ds$ $\widehat{\mathcal{H}(u)}(\zeta) = -i \operatorname{sgn}(\zeta) \widehat{u}(\zeta)$

(5) Résonance $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^0$



Euler+gravité
Profondeur infinie



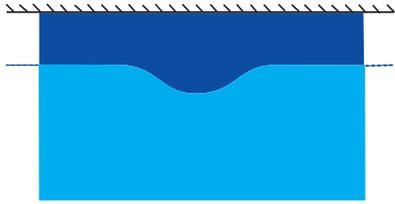
• Equation modèle : Benjamin-Ono : $\mathcal{H}(u') = u^2 - u$

où $\mathcal{H}(u)(\tau) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{\tau - s} ds$ $\widehat{\mathcal{H}(u)}(\zeta) = -i \operatorname{sgn}(\zeta) \widehat{u}(\zeta)$

Rmq Benjamin Ono admet une onde solitaire

$$h(\tau) = \frac{2}{1 + \tau^2}$$

(5) Résonance $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} 0$



Euler+gravité
Profondeur infinie



- Equation modèle : Benjamin-Ono : $\mathcal{H}(u') = u^2 - u$

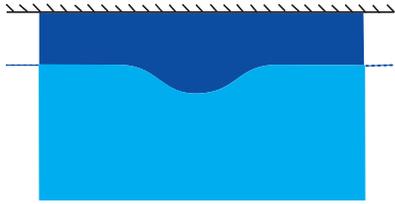
où $\mathcal{H}(u)(\tau) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{\tau - s} ds$ $\widehat{\mathcal{H}(u)}(\zeta) = -i \operatorname{sgn}(\zeta) \widehat{u}(\zeta)$

Rmq Benjamin Ono admet une onde solitaire

$$h(\tau) = \frac{2}{1 + \tau^2}$$

- Equation d'Euler

(5) Résonance $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} 0$



Euler+gravité
Profondeur infinie



- Equation modèle : Benjamin-Ono : $\mathcal{H}(u') = u^2 - u$

où $\mathcal{H}(u)(\tau) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{\tau - s} ds$ $\widehat{\mathcal{H}(u)}(\zeta) = -i \operatorname{sgn}(\zeta) \widehat{u}(\zeta)$

Rmq Benjamin Ono admet une onde solitaire

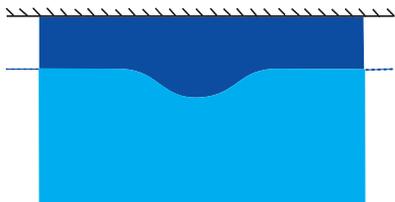
$$h(\tau) = \frac{2}{1 + \tau^2}$$

- Equation d'Euler ($c = c_0 + \mu$)

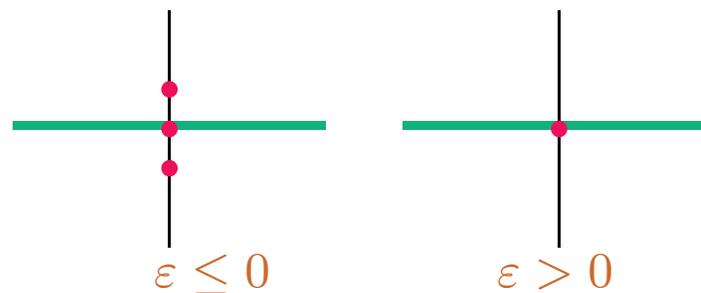
Thm Il existe une onde solitaire de la forme

$$\eta(\xi) = d + \varepsilon h(\varepsilon \xi) + \varepsilon^2 h_1(\varepsilon \xi) \quad \text{avec} \quad \sup_{\tau \in \mathbb{R}} (1 + |\tau|) \left| \frac{d^j h_1}{d\tau^j}(\tau) \right| \leq K_j$$

(5) Résonance $C_{\mathbb{R}}^0$



Euler+gravité
Profondeur infinie



• Equation modèle : Benjamin-Ono : $\mathcal{H}(u') = u^2 - u$

où $\mathcal{H}(u)(\tau) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s)}{\tau - s} ds$ $\widehat{\mathcal{H}(u)}(\zeta) = -i \operatorname{sgn}(\zeta) \widehat{u}(\zeta)$

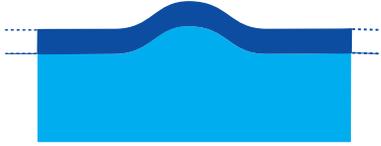
Rmq Benjamin Ono admet une onde solitaire $h(\tau) = \frac{2}{1 + \tau^2}$

• Equation d'Euler ($c = c_0 + \mu$)

Thm Il existe une onde solitaire de la forme

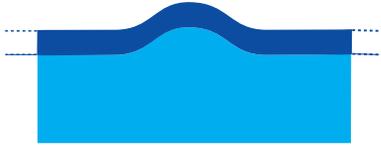
$$\eta(\xi) = d + \varepsilon h(\varepsilon \xi) + \varepsilon^2 h_1(\varepsilon \xi) \quad \text{avec} \quad \sup_{\tau \in \mathbb{R}} (1 + |\tau|) \left| \frac{d^j h_1}{d\tau^j}(\tau) \right| \leq K_j$$

Dem : Formes Normales : Euler \Leftrightarrow Benjamin Ono + perturbation



Euler+gravité
Profondeur infinie

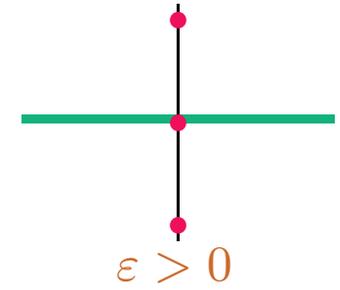
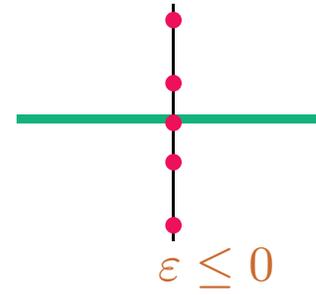
(6) Résonance $C_{\mathbb{R}} 0i\omega$



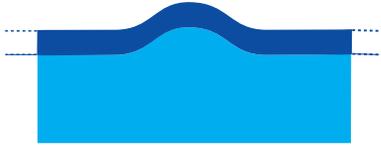
$$\omega = \frac{gh}{c^2} \text{ et } \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Euler+gravité
Profondeur infinie

$$\omega(1 - \rho) = 1 - \varepsilon$$



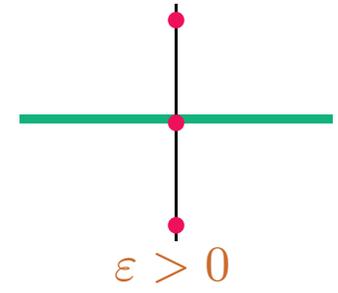
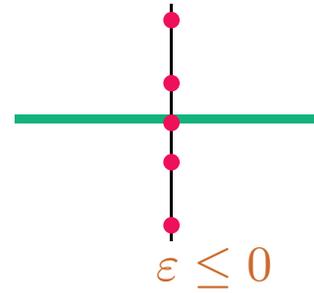
(6) Résonance $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} 0i\omega$



$$\omega = \frac{gh}{c^2} \text{ et } \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Euler+gravité
Profondeur infinie

$$\omega(1 - \rho) = 1 - \varepsilon$$

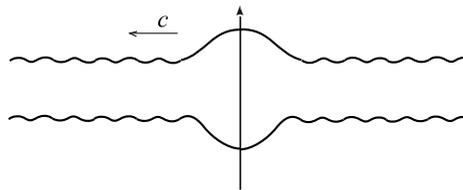


Thm Pour $\varepsilon > 0$ assez petit il existe

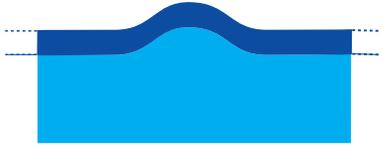
1. une famille à un paramètre d'orbites périodiques p_k de taille $k \geq 0$
2. Pour tout $\ell \in]0, \rho[$ et $k \geq c(\ell)e^{-\frac{\ell\omega}{\varepsilon}}$, une orbite u_k homocline à p_k

$$u_k(\xi) = p_k(\xi + \varphi \arctan \xi) + \varepsilon h(\varepsilon \xi) + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon|\xi|}\right)$$

où h est le soliton de Benjamin-Ono $h(x) = \frac{1}{1 + x^2}$



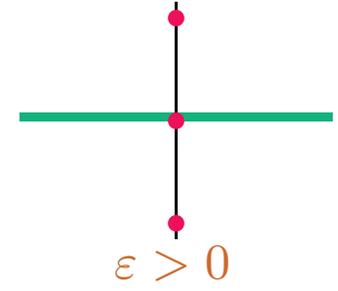
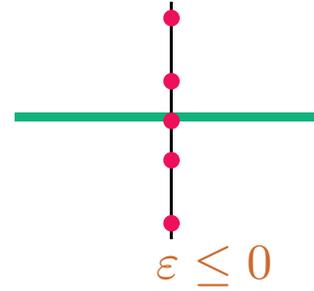
(6) Résonance $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} 0i\omega$



$$\omega = \frac{gh}{c^2} \text{ et } \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Euler+gravité
Profondeur infinie

$$\omega(1 - \rho) = 1 - \varepsilon$$

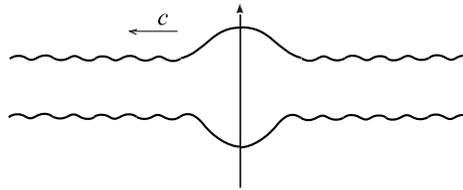


Thm Pour $\varepsilon > 0$ assez petit il existe

1. une famille à un paramètre d'orbites périodiques p_k de taille $k \geq 0$
2. Pour tout $\ell \in]0, \rho[$ et $k \geq c(\ell)e^{-\frac{\ell\omega}{\varepsilon}}$, une orbite u_k homocline à p_k

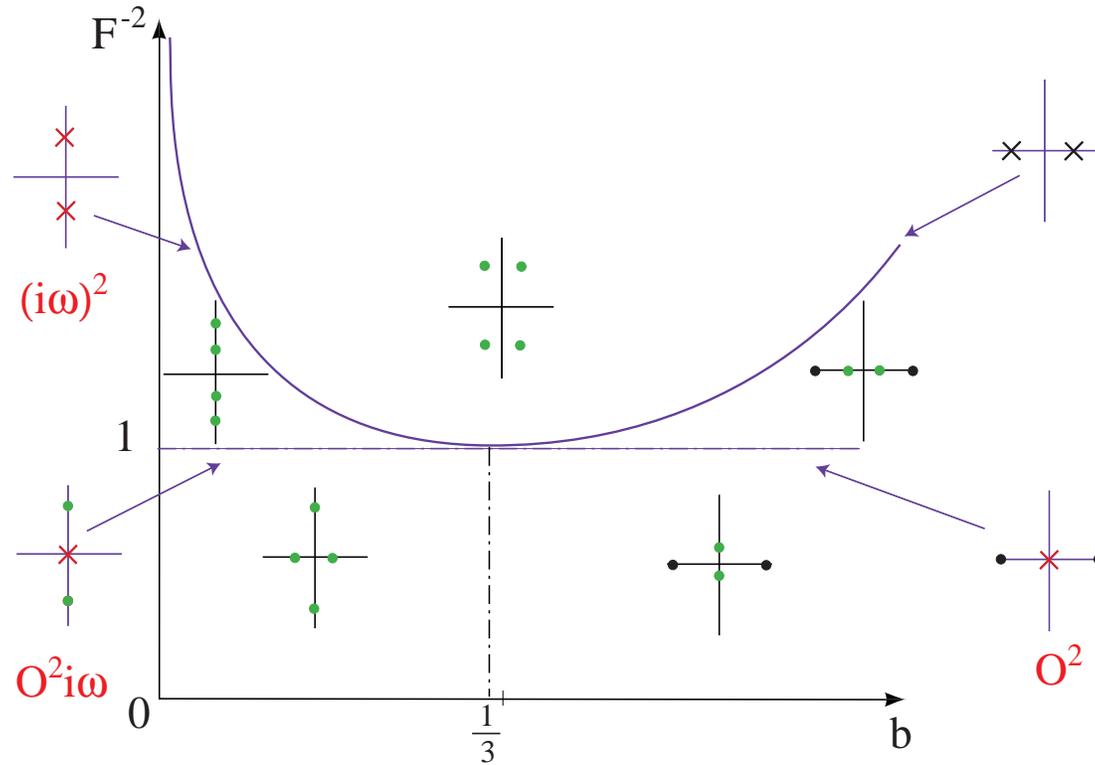
$$u_k(\xi) = p_k(\xi + \varphi \arctan \xi) + \varepsilon h(\varepsilon \xi) + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon|\xi|}\right)$$

où h est le soliton de Benjamin-Ono $h(x) = \frac{1}{1 + x^2}$



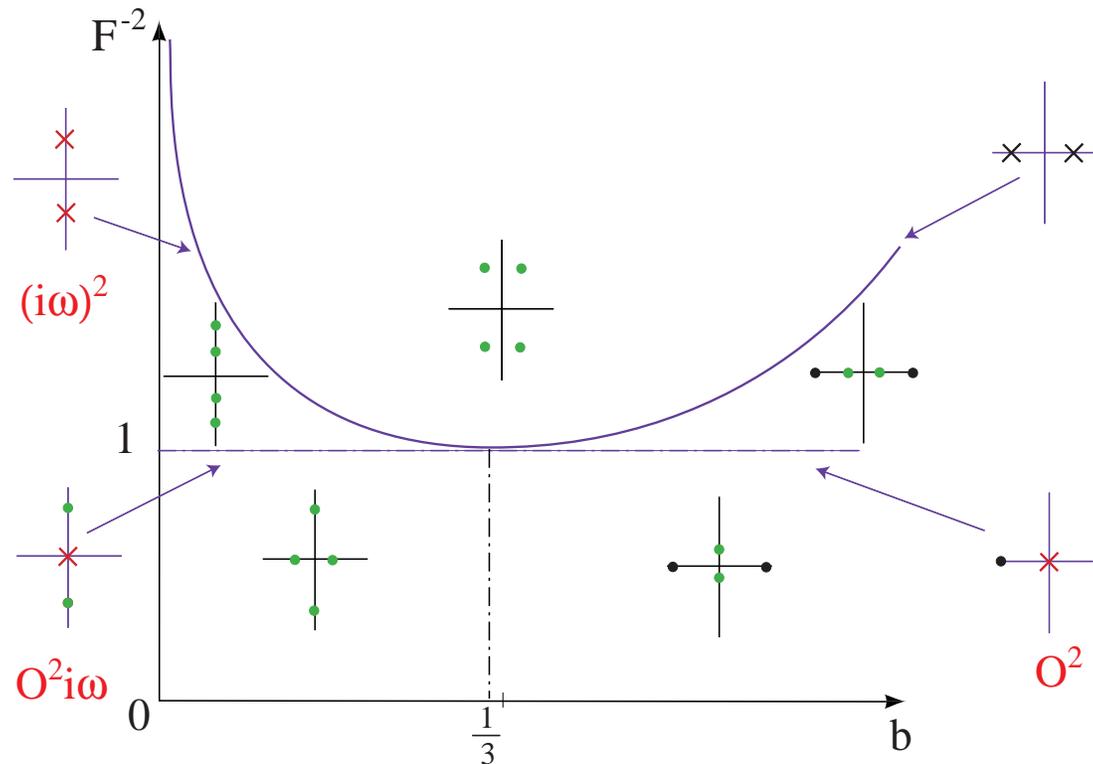
Dem : Euler \Leftrightarrow Benjamin Ono couplé à un oscillateur + perturbation

Q.1 Bifurcations secondaires



Quelques problèmes ouverts

Q.1 Bifurcations secondaires



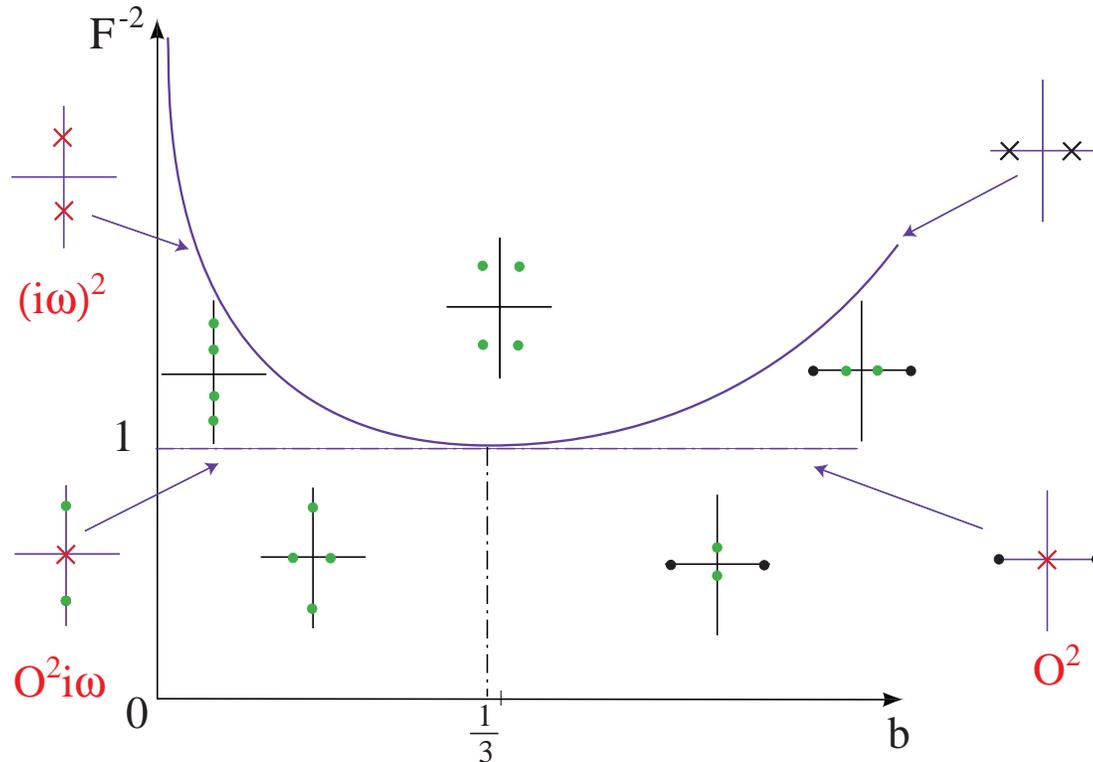
Q.2 Stabilité temporelle des ondes progressives

$$w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct \quad u : \mathbb{R} \rightarrow E$$

$$\xi \mapsto \left(y \mapsto v(\xi, y) \right)$$

Quelques problèmes ouverts

Q.1 Bifurcations secondaires



Q.2 Stabilité temporelle des ondes progressives

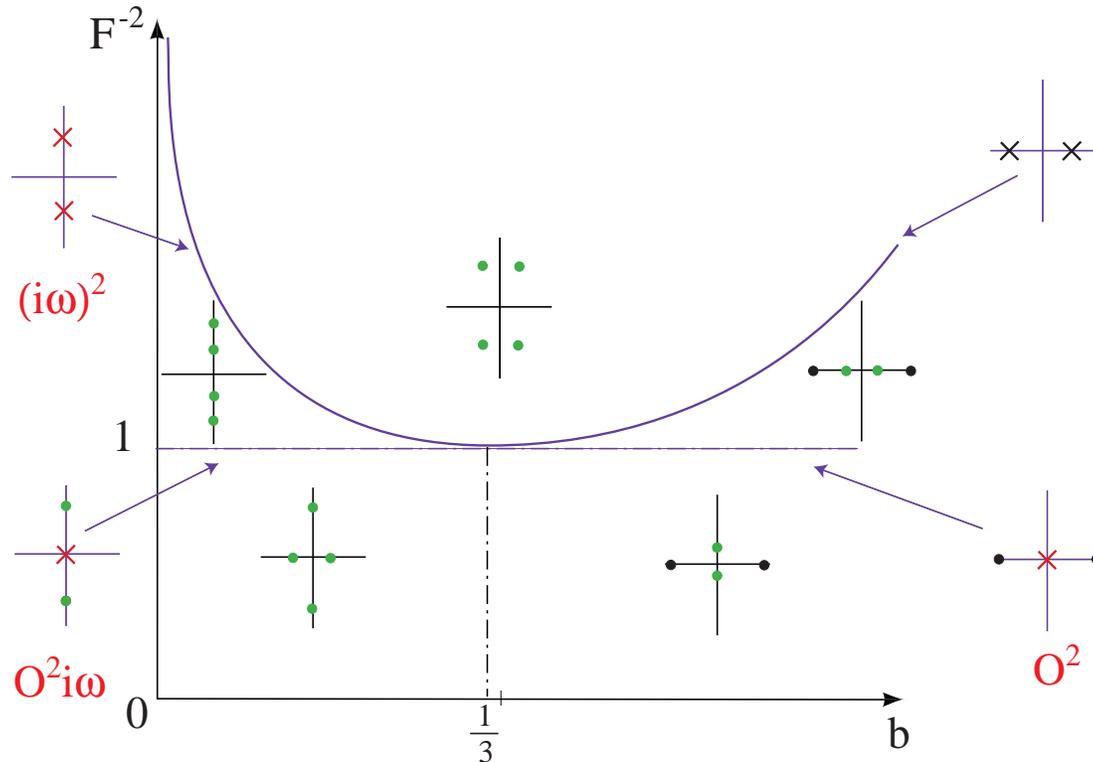
$$w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct \quad u: \mathbb{R} \rightarrow E$$

$$\xi \mapsto \left(y \mapsto v(\xi, y) \right)$$

Q.3 Comment la dynamique temporelle s'articule elle autour des ondes progressives ?

Quelques problèmes ouverts

Q.1 Bifurcations secondaires



Q.2 Stabilité temporelle des ondes progressives

$$w(x, y, t) = v(\xi, y) \text{ où } \xi = x - ct \quad u: \mathbb{R} \rightarrow E$$

$$\xi \mapsto \left(y \mapsto v(\xi, y) \right)$$

Q.3 Comment la dynamique temporelle s'articule elle autour des ondes progressives ?

Q.4 Ondes 3 D. Rupture de dimensions