

Filtres particuliers et turbulence. Problèmes posés par le filtrage en grande dimension.

Journées d'étude SMAI/Météo/IMT

Christophe Baehr

Météo-France / IMT-LSP Univ. Paul Sabatier

4èmes rencontres Météo/MathAppli

Mercredi 25 Mars 2009



METEO FRANCE
Toujours un temps d'avance

De quoi parle-t-on ?

1. Le problème posé.
2. Développement d'outils probabilistes.
3. Le filtre particulaire pour les fluides turbulents.
4. Au delà, le problème de la dimensionnalité en filtrage.
5. Vers de nouveaux travaux.



Le problème posé : traitement rapide de la mesure en micrométéorologie

Mesures atmosphériques

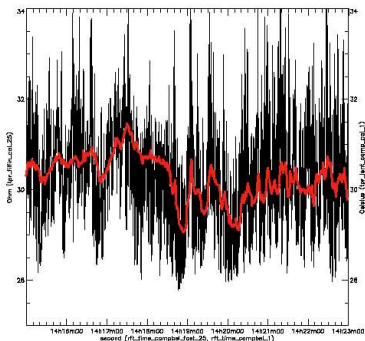
- ⊕ Des mesures sur l'atmosphère pour étudier et pour être assimilées par les modèles de prévisions météorologiques.
- ⊕ On a besoin de :
 - ⊕ Améliorer les systèmes de mesures et de numérisation.
 - ⊕ Mettre en place un traitement des signaux rapides.
 - ⊕ Estimer les grandeurs caractéristiques de la turbulence.
- ⊕ En météorologie expérimentale, les plates-formes de mesures sont multiples.

Mesures atmosphériques

Mesures lentes / Mesures rapides



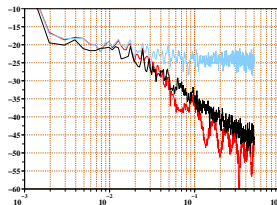
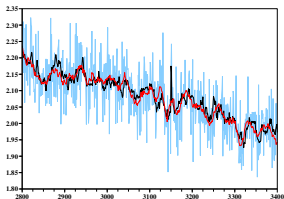
Campagne MOBILEX
Mesures mobiles LAGUNA vm0805 du 18/08/2008
de 14h15m00 à 14h23m00 UTC



- ⊕ Exemple de la température relevée le 18 Août 2008 à 14h15 UTC, en rouge à 1 Hz et en noir à 25 Hz.

Traitements linéaires en micro-météorologie

- ⊖ Exemple de traitement actuel sur une série d'observation de vent bruitées

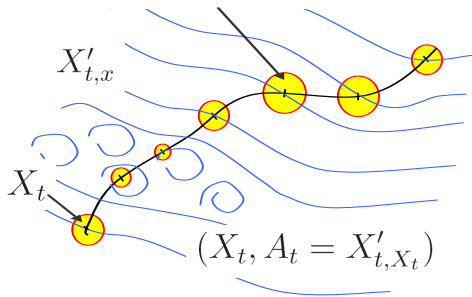


L'amélioration passe par un traitement non-linéaire de l'observation

Objet 1 :
Processus d'acquisition d'un champ de vecteur aléatoire le
long d'un chemin aléatoire

Acquisition d'un champ de vecteur

$$\mathbb{E}(f(X_t, A_t) \mid X_t \in B_t^\varepsilon) ?$$



Définition : Soit $(X_t, X'_{t,x})$ un système d'acquisition sur un espace l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ à valeurs dans $((E, \mathcal{E}) \times (E', \mathcal{E}'))$. On définit pour tout temps $t \in [0, T]$ le processus d'acquisition A_t sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ à valeurs dans (E', \mathcal{E}') par $A_t \stackrel{\text{def}}{=} X'_{t,x_t}$

Acquisition d'un champ de vecteurs décrits par ses flots

On dispose du chemin d'acquisition $(Z_i)_{0 \leq i \leq n \leq \infty}$ et d'un paramètre $\varepsilon_n > 0$, et on se donne des boules $B_n^\varepsilon(Z_n) = \{x \in E : d(x, Z_n) \leq \varepsilon_n\}$

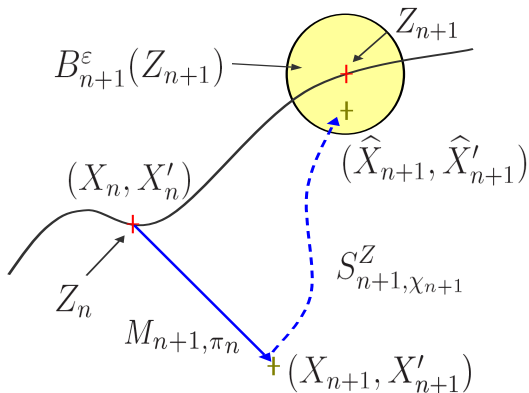
- ⊕ On décrit le champ d'acquisition par ses flots Lagrangien.
- ⊕ On mixe alors 2 systèmes d'acquisition (écrits en temps discret) :
 - ⊕ l'un étant l'acquisition Lagrangienne : $(X_n^{x_0}, X'_{n, X_n^{x_0}}) = (X_n, X'_n)$
 - ⊕ l'autre étant l'acquisition du système Lagrangien sur un chemin indépendant du milieu $Z_n : (Z_n, X'_n)$

Acquisition discrète en milieu homogène

- ⊖ Pour obtenir une description du processus d'acquisition par des flots de Feynman-Kac, **on conditionne le processus à vivre dans le long du chemin.**
- ⊖ On note χ_n^B et $\hat{\chi}_n^B$ les lois du processus restreint aux cylindres $B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E'$.
- ⊖ Ce sont des **processus à champ moyen en interaction** solutions de l'équation non-linéaire :

$$\chi_{n+1}^B(f) = \chi_n^B K_{n+1, \chi_n^B, \pi_n}^B(f) = \chi_n^B \tilde{S}_{n, \chi_n^B} \tilde{M}_{n+1, \pi_n}(f)$$

Acquisition discrète en milieu homogène



Acquisition discrète en milieu homogène

⊕ On obtient le schéma des évolutions restreintes au chemin d'acquisition :

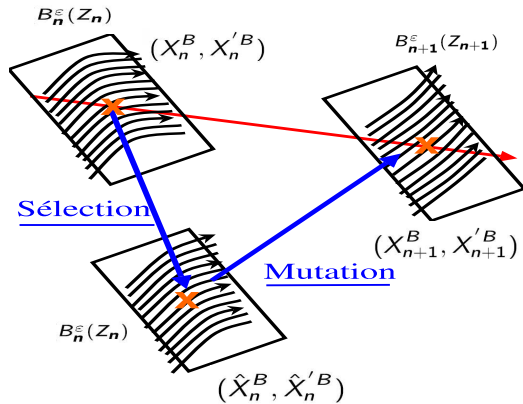
$$\hat{\chi}_n^B \xrightarrow{\tilde{M}_{n+1}, \pi_n} \chi_{n+1}^B \xrightarrow{\tilde{S}_{n+1}, \chi_{n+1}^B} \hat{\chi}_{n+1}^B$$

et pour les états :

$$\underbrace{(X_n^B, X_n'^B)}_{\in (B_n^\varepsilon(Z_n) \times E')} \xrightarrow{\text{Sélection}} \underbrace{(\hat{X}_n^B, \hat{X}_n'^B)}_{\in (B_n^\varepsilon(Z_n) \times E')} \xrightarrow{\text{Mutation restreinte}} \underbrace{(X_{n+1}^B, X_{n+1}'^B)}_{\in (B_{n+1}^\varepsilon(Z_{n+1}) \times E')}$$

⊕ Ces intégrales n'ont de solutions qu'approchées que l'on estime par un algorithme particulière.

Acquisition discrète en milieu homogène



Approximation particulière d'une acquisition discrète

⊕ Avec une hypothèse de régularité classique on peut obtenir

Théorème Pour tout $n \geq 0$, pour tout $p \geq 1$, il existe des constantes C_n et C'_n telles que

$$\mathbb{E}(\|\chi_n^{B,N} - \chi_n^B\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\frac{C_n}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n}{\sqrt{d}} \right] I(\mathcal{H})$$

avec une seminorme mesurant l'écart entre 2 mesures η et η' pour une classe de fonction

$\mathcal{H} = \{h : E \times E' \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \|h\| \leq 1\}$

Objet 2 :
Filtrage non-linéaire de processus à champ moyen

Filtrage d'un processus à champs moyen à temps discret

- ⊖ On dispose d'états X_0, \dots, X_n et d'observations $Y_0 = y_0, \dots, Y_n = y_n$ avec pour tout $n \geq 0$, $Y_n = H(X_n, V_n)$.
- ⊖ Le problème de filtrage non-linéaire revient à chercher les 2 mesures :

$$\eta_n = \text{Loi}(X_n | Y_0 \dots Y_{n-1})$$

$$\hat{\eta}_n = \text{Loi}(X_n | Y_0 \dots Y_n)$$

- ⊖ On suppose que Y_n et $h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y$ sont absolument continues de densité g_n et on définit la fonction potentiel $G_n(X_n) = g_n(X_n, Y_n)$
- ⊖ On suppose également que les transitions de X_n sont données par $M_{n+1, \pi_n}(x_n, dx_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in dx_{n+1} | X_n = x_n)$

Filtrage d'un processus à champs moyen à temps discret

- ⊕ On cherche pour toute fonction mesurable bornée f , les mesures de Feynman-Kac, η_n et $\hat{\eta}_n$.
- ⊕ On définit le noyau de sélection

$$S_{n,\eta_n}(x, dy) = G_n(x)\delta_x(dy) + (1 - G_n(x))\frac{G_n(y)\cdot\eta_n(dy)}{\eta_n(G_n)}$$

- ⊕ Les lois du filtrage sont alors solutions du système dynamique :
 $\eta_{n+1}(f) = \eta_n K_{n+1,\eta_n,\pi_n}(f) = \eta_n S_{n,\eta_n} M_{n+1,\pi_n}(f)$

Filtrage d'un processus à champs moyen à temps discret

- ⊕ Ce système non-linéaire doit être résolu par approximation particulière. Dans notre cas il faut représenter 2 types de loi :
 - ⊕ les 2 Feynman-Kac du filtrage η_n et $\hat{\eta}_n$.
 - ⊕ la loi de champ moyen π_n .
- ⊕ Si π_n est une loi a priori, il faut se doter de 2 systèmes de particules, l'un apprenant les Feynman-Kac, l'autre le champ moyen.
- ⊕ Le système auxiliaire ne verra pas les observations, l'évolution est a priori et il n'y a pas d'étape de sélection.
- ⊕ Il approche π_n par une loi empirique π_n^d .

Filtrage d'un processus à champs moyen à temps discret

- ⊕ Pour filtrer on utilise un système de particules $(X_n^i)_{i=1}^N$ et on note $\eta_n^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_n^i}$
- ⊕ Les particules évoluent selon la transition M_{n, π_n^d}
- ⊕ On cherche à ce que $\eta_{n+1}^N(f) \sim \eta_n^N S_{n, \eta_n^N} M_{n, \pi_n^d}(f)$.
- ⊕ Théorème Avec les hypothèses générales, pour tout $n \leq 0$ et tout $p \leq 1$, il existe des constantes finies $C_n(p) > 0$ et $C'_n(p) > 0$ telles que

$$\mathbb{E}(\|\eta_n^N - \eta_n\|_{\mathcal{H}}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\frac{C_n(p)}{\sqrt{N}} + \frac{C'_n(p)}{\sqrt{d}} \right] I(\mathcal{H})$$

Filtrage particulaire pour les mesures sur un fluide turbulent

Filtrage d'un fluide turbulent

⊕ On va utiliser les outils que l'on a développé avec un modèle Lagrangien stochastique pour la turbulence homogène isotrope.

⊕ Le modèle de Pope à temps continu s'écrit

$$\begin{cases} dX_t &= V_t dt \\ dV_t &= -\nabla_x \langle p \rangle dt + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0\right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} [V_t - \langle v \rangle] dt + \sqrt{C_0 \cdot \varepsilon_t} dW_t \end{cases}$$

⊕ Par conditionnement nous allons coupler ce système à l'observation et le localiser à son chemin d'acquisition.

⊕ C'est un modèle à champ moyen conditionnel, le problème de filtrage associé, retrouver $Loi(V_n | Y_0, \dots, Y_n)$, est résolu par un système de particules unique.

⊕ Pour la partie pratique, nous allons utiliser des estimations trajectorielles, la convergence se faisant sur les lignes ancestrales.

Filtrage d'un fluide turbulent atmosphérique

- ⊕ Pour traiter dans l'atmosphère la turbulence en dimension 3 il faut changer de modèle.
- ⊕ On s'est inspiré du modèle de dispersion pour la turbulence stratifiée proposé par Das & Durbin.

$$\begin{cases} d\tilde{v}_t^h &= -\frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} \tilde{v}_t^h dt + (C_{2\theta} - 1) \tilde{w}_t \frac{d\langle V^h \rangle}{dz} dt + (C_0 \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^h \\ d\tilde{w}_t &= -\frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} \tilde{w}_t dt + (1 - C_{5\theta}) \beta_t g \tilde{\theta}_t dt + (C_0 \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^W \\ d\tilde{\theta}_t &= -\left(C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}\right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} \tilde{\theta}_t dt - \tilde{w}_t \frac{d\langle \Theta \rangle}{dz} dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^\theta \end{cases}$$

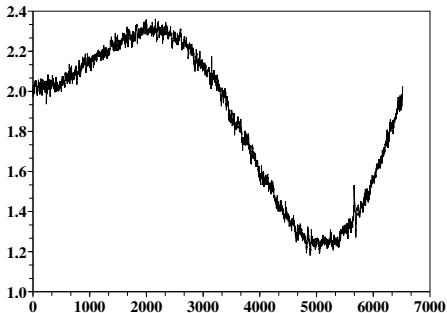
où $\langle V^h \rangle = \langle U^h \rangle_{t, X_t^{x_0}}$, $\langle \Theta \rangle = \langle \theta \rangle_{t, X_t^{x_0}}$. Les constantes ont été ajustées expérimentalement.

- ⊕ Avec les mêmes méthodes, on a obtenu un algorithme pour filtrer les observations de la turbulence en atmosphère sèche.

Applications au filtrage des observations de fluides
turbulents atmosphériques

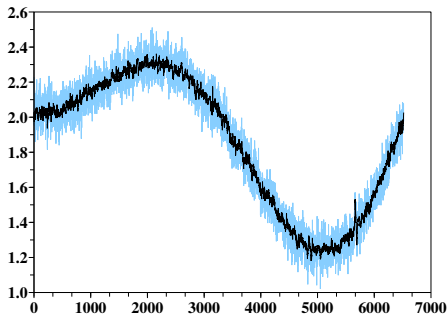
Filtrage d'un vent 1D simulé

- ⊕ Avec le matériel dont on dispose, on est en mesure de simuler un vent 1D en choisissant des commandes.



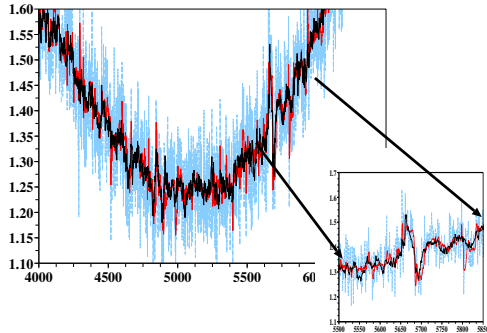
Filtrage d'un vent 1D simulé

⊕ On bruite notre signal de référence par un bruit, ici blanc et gaussien.



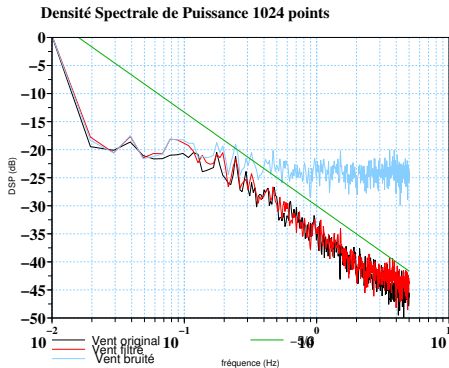
Filtrage d'un vent 1D simulé

- ⊕ On débruite avec 300 particules le signal perturbé.



Filtrage d'un vent 1D simulé

- ⊕ On complète l'analyse en examinant les spectres de puissance.

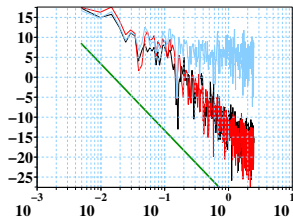
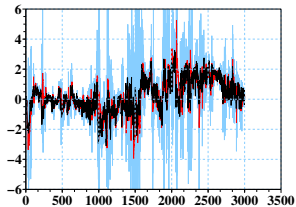
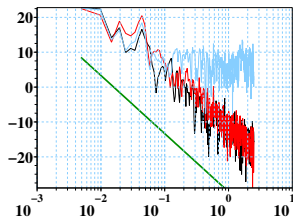
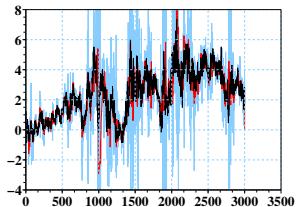


Filtrage d'un vent 1D simulé

- ⊕ Par cet exemple on vient de tester l'algorithme.
- ⊕ On peut alors passer directement à des filtrages de mesures de vent 1D ou 2D.
- ⊕ Il est possible de tester différents algorithmes (a priori vs conditionnel) ou de proposer des bruits corrélés avec la turbulence.
- ⊕ Nous avons également mené des tests de pertinence du modèle et d'intérêt du champ moyen.

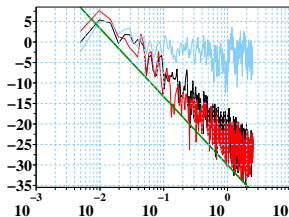
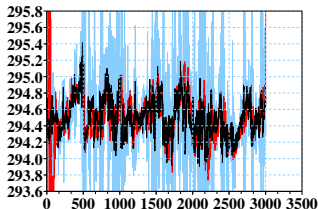
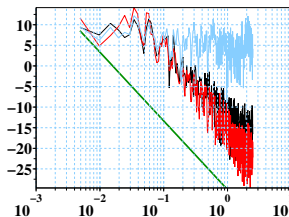
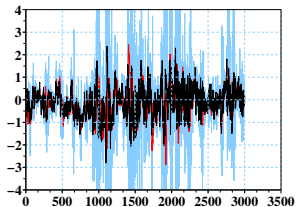
Filtrage d'un vent 3D réel

⊖ Séries temporelles et DSP des composantes U et V de référence, bruitées et filtrés. Bruit corrélé à la variance locale du signal, estimateur à 800 particules.



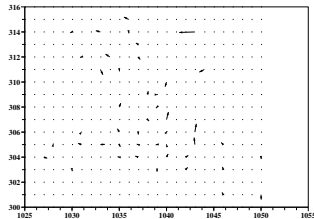
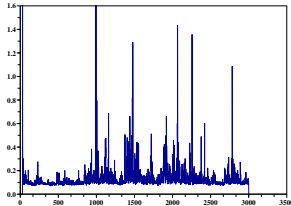
Filtrage d'un vent 3D réel

⊖ Séries temporelles et DSP des composantes W et T de référence, bruitées et filtrés. Bruit corrélé à la variance locale du signal, estimateur à 800 particules.



Filtrage d'un vent 3D réel

- ⊖ Séries temporelles des paramètres du milieu turbulent, estimateur à 800 particules.



Le problème de la dimension en filtrage particulaire
(travail conjoint avec O. Pannekoucke - Météo France)

On revient au problème générique

⊕ On se donne un système non-linéaire qui fixe le problème de filtrage.

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + A_n(X_n)\Delta t + B_n(X_n)\Delta W_n \\ Y_n &= H_n(X_n)\Delta t + \sigma V_n \end{cases}$$

où les V_n et W_n sont des processus de Wiener ou non. A_n , B_n et H_n sont des fonctions quelconques de l'état caché X_n .

⊕ Le problème de filtrage associé consiste à calculer

$$\hat{\eta}_n(f) = \mathbb{E}(f(X_{[0,n]})/\mathcal{Y}_n)$$

Filtres non-linéaires

⊕ L'algorithme de filtrage qui se déduit de cet ensemble d'équations utilise

⊕ le noyau de Markov M_n associé à l'équation de dynamique

$$X_{n+1} = X_n + A_n(X_n)\Delta t + B_n(X_n)W_n$$

⊕ le noyau de sélection génétique des états (qui est un choix non unique)

$$S_{n,\eta_n}(x_n, dx) = G_n(x_n)\delta_{x_n}(dx) + [1 - G_n(x_n)]\frac{G_n(x)}{\eta_n(G_n)}\eta_n(dx)$$

avec $G_n(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} g_n(x_n, y_n)$ avec

$$\mathbb{P}(H(x_n) + \sigma V_n \in dy_n \mid X_n = x_n) = g_n(x_n, y_n)\lambda_n(dy_n)$$

⊕ Ce qui donne l'algorithme du filtrage non-linéaire

$$\eta_n \xrightarrow{S_{n,\eta_n}} \hat{\eta}_n = \eta_n \xrightarrow{M_{n+1}} \eta_{n+1} = \hat{\eta}_n M_{n+1}$$

Filtrage particulaire

- ⊕ Mais on ne dispose pas de solutions à ces équations non-linéaires. On cherche alors une approximation particulière de la solution.
- ⊕ On définit alors des états-test ξ_n que l'on fait évoluer selon le modèle de dynamique et que l'on filtre selon la méthode de sélection.
- ⊕ On a alors l'estimation empirique : $\eta_n = \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_n^i}$, que l'on évalue contre des fonctions-tests.

Filtrage particulaire et dimension

- ⊖ C'est dans l'estimation particulaire qu'arrive le problème de la dimensionnalité.
- ⊖ Problème que l'on va rediriger temporairement vers ...
.... un problème sans dimension.

Filtrage particulaire et taille critique d'ensemble

⊕ En effet le problème de la dimension est en fait celui de la taille critique de l'ensemble de particules nécessaire pour estimer correctement.

⊕ La question est en fait celle-ci :

« De combien de particules ai-je besoin pour que mon algorithme ne diverge pas? ».

Filtrage particulière et taille critique d'ensemble

- ⊕ Les algorithmes de filtrage que l'on utilise sont du type « estimateurs génétiques ».
- ⊕ On connaît les travaux de Raphaël Cerf pour les espaces d'états finis, et sa détermination d'une taille critique de population pour que l'algorithme génétique converge :

Théorème [Cerf 1998 Asymptotic Convergence of Genetic Algorithms]
On se donne un espace d'état fini E , un potentiel de sélection G_n , un noyau de mutation M_n . Il existe une taille critique N^* de particules dépendant des objets précédents telle que, quand N est plus grand que N^* , « l'algorithme génétique ne diverge pas ».

Filtrage particulière et dimension

- ⊕ On revient au problème de la dimension, pour le moment, les suggestions viennent des expériences numériques.
- ⊕ On utilise par exemple un système dynamique cyclique décrit par Lorentz en 95 qui couple des dimensions :

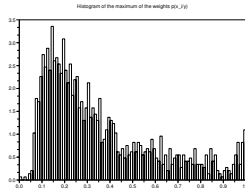
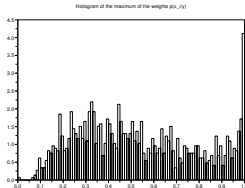
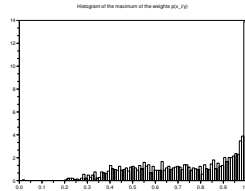
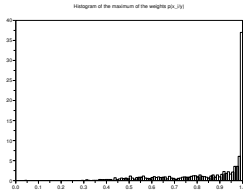
$$\frac{dx_i}{dt} = -x_{i-2} \cdot x_{i-1} + x_{i-1} \cdot x_{i+1} - x_i + F$$

où x_i est la i -ème composante avec $1 \leq i \leq d$.

- ⊕ Il est facile à coder et on peut faire varier les dimensions facilement pour tester $d \rightarrow \infty$.

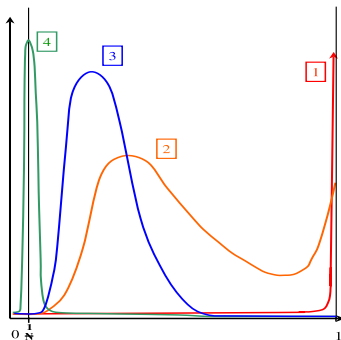
Illustration numérique

⊕ Exemple en dimension 40 d'évolution du poids maximal quand le nombre de particule augmente (40,100,1000,4000 particules).



Le problème de la dimension

- ⊕ A algorithme égal, à modélisation égale, il semble qu'il y ait une distribution des poids maximaux dans les approximations particulières qui suivent :

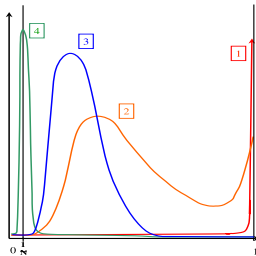


La question

⊕ Existerait-il ce théorème ?

Théorème On se donne un espace d'état quelconque E de dimension d , un potentiel de sélection G_n , un noyau de mutation M_n (et des hypothèses qui nous manquent). Il existe une taille critique $N^*(d)$ de particules dépendant des objets précédents telle que, quand N est plus grand que $N^*(d)$, « l'algorithme génétique ne diverge pas ».

La question



⊕ Sont-ce les quantificateurs du problème à rechercher ?

⊕ Cas 1 : $\mathbb{P}(W_{max} = 1) = 1 ?$

⊕ Cas 3 : $\mathbb{P}(W_{max} \leq \varepsilon) \geq \alpha ?$

⊕ Cas 4 : $\mathbb{P}(|W_{max} - \frac{1}{N}| \leq \varepsilon) = 1 ?$

En guise de conclusion

- ⊕ On a fait du chemin sur l'application du filtrage particulaire en météorologie.
- ⊕ Mais on a encore des travaux qui nous attendent :
 - ⊕ en modélisation, pour prendre en compte de plus en plus de paramètres.
 - ⊕ en mathématiques, contenir les difficultés dues aux dimensions.
 - ⊕ mais aussi en mathématiques, étudier la stabilité des algorithmes que l'on a développé.
- ⊕ Pour utiliser le filtrage particulaire en assimilation de données météorologiques, tout est à faire et on va le faire.