

Suivi de champs denses de vitesses d'écoulements fluides par filtrage stochastique

Anne Cuzol

IRISA/INRIA, équipe Vista

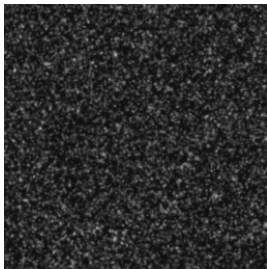
Journée Méthodes Particulières en Mécanique des Fluides
Vendredi 16 mars 2007

Introduction

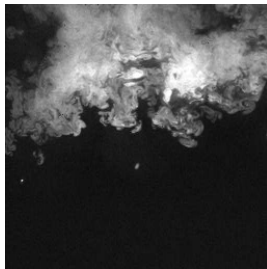
- 1 Introduction
 - Problématique
 - Rappels
 - Particules de vortex
- 2 Suivi de champs denses
 - Estimateurs de mouvement fluide
 - Filtrage stochastique
- 3 Construction du modèle de filtrage
 - Loi d'évolution des écoulements fluides
 - Modèle d'état
 - Modèle d'observation
- 4 Schéma de filtrage
- 5 Exemples

Séquences d'écoulements fluides

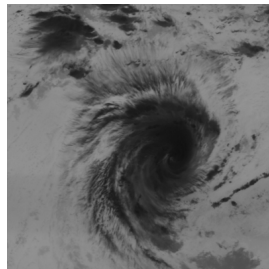
- Structures hautement déformables : forts mouvements de **rotation** et de **divergence**
- Phénomène 2D ou projection d'un phénomène 3D dans le plan image



Turbulence 2D
(CEMAGREF Rennes)



Vortex générés
au bout d'une
aile d'avion
(ONERA)



Cyclone sur
l'océan indien
(06/03/99, Météosat,
LMD)

Applications

- Sciences environnementales : observation, prévision, surveillance
 - météorologie : suivi de structures caractéristiques (vortex, cellules convectives)
 - océanographie : suivi d'agents polluants
- Mécanique des fluides expérimentale
 - meilleure compréhension des écoulements
 - contrôle des écoulements, mise en place d'actions spécifiques
- Imagerie médicale

Analyse d'écoulements fluides à partir de séquences d'images

Séquences d'images

- Fournissent des mesures de vitesses denses
- Obtenues par des capteurs non intrusifs
- Fréquence temporelle élevée
- Conditions au bord

Analyse d'écoulements fluides à partir de séquences d'images

Séquences d'images

- Fournissent des mesures de vitesses denses
- Obtenues par des capteurs non intrusifs
- Fréquence temporelle élevée
- Conditions au bord

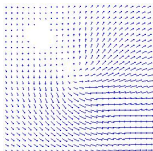
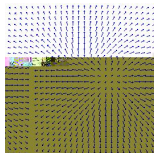
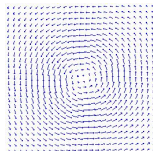
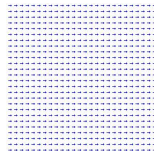
Mais : extraction et analyse de l'information de mouvement difficiles

- Projection en 2D = perte d'une dimension
- Distorsions spatiale et temporelle de la luminance
- Forts mouvements de rotation et de divergence

Champs de vecteurs 2D

Décomposition de Helmholtz :

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{irr} + \mathbf{W}_{sol} + \mathbf{W}_{tra}$$

 \mathbf{W}  \mathbf{W}_{irr}  \mathbf{W}_{sol}  \mathbf{W}_{tra}

Hypothèses :

- la composante de transport global est connue
- on ne suit pas la composante irrotationnelle

Relations fondamentales

$$\mathbf{w}_{sol} = \nabla \psi^\perp$$

ψ fonction de potentiel

Relations fondamentales

$$\mathbf{w}_{sol} = \nabla \psi^\perp$$



$$\Delta \psi = \text{curl } \mathbf{w}$$

ψ fonction de potentiel

équation de Poisson

Relations fondamentales

$$\mathbf{w}_{sol} = \nabla \psi^\perp$$



$$\Delta \psi = \text{curl } \mathbf{w}$$



$$\psi = G * \text{curl } \mathbf{w}$$

ψ fonction de potentiel

équation de Poisson

noyau de Green : $G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{x}\|)$

Relations fondamentales

$$\mathbf{w}_{sol} = \nabla \psi^\perp$$

ψ fonction de potentiel



$$\Delta \psi = \text{curl } \mathbf{w}$$

équation de Poisson



$$\psi = G * \text{curl } \mathbf{w}$$

noyau de Green : $G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{x}\|)$



$$\mathbf{w}_{sol} = K^\perp * \text{curl } \mathbf{w}$$

$$K(\mathbf{x}) = \nabla G(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{2\pi\|\mathbf{x}\|^2}$$

intégrale de Biot-Savart

Particules de vortex

Calcul de l'intégrale de Biot-Savart $\mathbf{w}_{sol} = K^\perp * \text{curl } \mathbf{w}$

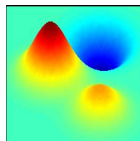


Approximation de la vorticité par des **particules de vortex** [Chorin 73, Cottet et al. 00]

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^p \gamma_j f_{\epsilon_j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

avec :

- \mathbf{x}_j **centre** de la particule de vortex
- γ_j paramètre de **force**
- ϵ_j paramètre d'**influence**



Particules de vortex

Calcul de l'intégrale de Biot-Savart $\mathbf{w}_{sol} = K^\perp * \text{curl } \mathbf{w}$

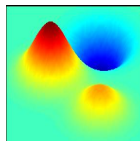


Approximation de la vorticité par des **particules de vortex** [Chorin 73, Cottet et al. 00]

$$\text{curl } \mathbf{w}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^p \gamma_j f_{\epsilon_j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

avec :

- \mathbf{x}_j **centre** de la particule de vortex
- γ_j paramètre de **force**
- ϵ_j paramètre d'**influence**



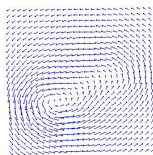
- Discrétisation / régularisation de l'intégrale de Biot-Savart
- Représentation paramétrique $\mathbf{w}_{sol}(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^p \gamma_j K_{\epsilon_j}^\perp(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$
- Représentation similaire (orthogonale) pour \mathbf{w}_{irr} (particules de **source**)

Exemple

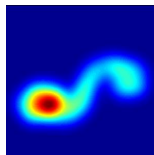
Un exemple de représentation paramétrique du mouvement :

- 15 particules de **vortex**
- 5 particules de **source**

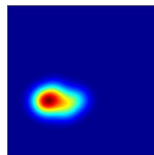
⇒ écoulement décrit par 80 paramètres



Champ



Vorticité



Divergence

Suivi de champs denses

① Introduction

Problématique

Rappels

Particules de vortex

② Suivi de champs denses

Estimateurs de mouvement fluide

Filtrage stochastique

③ Construction du modèle de filtrage

Loi d'évolution des écoulements fluides

Modèle d'état

Modèle d'observation

④ Schéma de filtrage

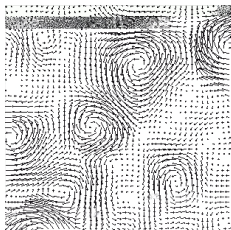
⑤ Exemples

Objectif

Estimation des champs de vecteurs 2D $\mathbf{w} = (u, v)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$



(I_1, I_2)



\mathbf{w}

Estimateurs de mouvement fluide

Méthodes basées sur la **corrélation** :

- méthodes PIV en mécanique des fluides expérimentale
- estimateurs de champs de vent en météorologie

Estimateurs **denses** dédiés :

- équation de continuité et régularisation div-curl du 2^{eme} ordre
- estimation des fonctions de potentiel

Estimateurs de mouvement fluide

Jusqu'à récemment :

- estimations instantanées (à partir des paires d'images consécutives de la séquence)
- pas de modèle dynamique sous-jacent



pas de garantie d'une cohérence temporelle entre les estimations

Estimateurs de mouvement fluide

Jusqu'à récemment :

- estimations instantanées (à partir des paires d'images consécutives de la séquence)
- pas de modèle dynamique sous-jacent



pas de garantie d'une cohérence temporelle entre les estimations

Introduction d'une loi d'évolution physique dans le processus d'estimation :

- méthodes denses [Heas et al. 06, Ruhnau et al. 06]
- approches variationnelles [Papadakis et al. 06]

Estimateurs de mouvement fluide

Jusqu'à récemment :

- estimations instantanées (à partir des paires d'images consécutives de la séquence)
- pas de modèle dynamique sous-jacent

→ pas de garantie d'une cohérence temporelle entre les estimations

Introduction d'une loi d'évolution physique dans le processus d'estimation :

- méthodes denses [Heas et al. 06, Ruhnau et al. 06]
- approches variationnelles [Papadakis et al. 06]

Ici :

→ Formulation du problème d'estimation dans un cadre de **filtrage stochastique**

Filtrage stochastique

Modèle de filtrage :

$$\begin{cases} d\mathbf{X}_t &= f(\mathbf{X}_t)dt + \sigma(t)d\mathbf{B}_t \\ \mathbf{Z}_k &= g(\mathbf{X}_{t_k}) + \mathbf{V}_k \end{cases}$$

Objectif : estimation des distributions de filtrage $p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k})$

Filtrage stochastique

Modèle de filtrage :

$$\begin{cases} d\mathbf{X}_t &= f(\mathbf{X}_t)dt + \sigma(t)d\mathbf{B}_t \\ \mathbf{Z}_k &= g(\mathbf{X}_{t_k}) + \mathbf{V}_k \end{cases}$$

Objectif : estimation des distributions de filtrage $p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k})$

Equations bayésiennes du filtrage :

- prédiction

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{X}_{t_{k-1}}) p(\mathbf{X}_{t_{k-1}} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{X}_{t_{k-1}}$$

- correction (formule de Bayes)

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1})}{\int p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{X}_{t_k}}$$

Filtrage stochastique

Equations bayésiennes du filtrage :

- prédiction

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{X}_{t_{k-1}}) p(\mathbf{X}_{t_{k-1}} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{X}_{t_{k-1}}$$

- correction (formule de Bayes)

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1})}{\int p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k-1}) d\mathbf{X}_{t_k}}$$

➔ Solution analytique pour les modèles linéaires et gaussiens (filtre de Kalman)

➔ Cas non linéaire :

- Approximation gaussienne (EKF, UKF)
- Approximation de Monte-Carlo : **filtrage particulaire**

Filtrage particulière

$\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}$ état possible, avec poids $w_k^{(i)}$

Approximation de la distribution de filtrage :

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}}(\mathbf{X}_{t_k})$$

➔ Modification récursive de $\{\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}, w_k^{(i)}\}_{i=1:N}$:

- **prédiction** (échantillonnage d'importance)

$$\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} \sim \pi(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{X}_{0:t_{k-1}}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k})$$

- **correction** (formule de Bayes)

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}^{(i)}) p(\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} | \mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)})}{\pi(\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t_{k-1}}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k})}$$

- **procédure de rééchantillonnage**

Filtrage particulière

$\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}$ état possible, avec poids $w_k^{(i)}$

Approximation de la distribution de filtrage :

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}}(\mathbf{X}_{t_k})$$

➔ Modification récursive de $\{\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}, w_k^{(i)}\}_{i=1:N}$:

- **prédiction** (échantillonnage d'importance)

$$\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} \sim \pi(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{X}_{0:t_{k-1}}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k})$$

- **correction** (formule de Bayes)

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}^{(i)}) p(\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} | \mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)})}{\pi(\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} | \mathbf{X}_{0:t_{k-1}}^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:k})}$$

- **procédure de rééchantillonnage**

➔

- pas d'hypothèse gaussienne ou de linéarité
- pas adapté aux espaces d'état de grande dimension

Construction du modèle de filtrage

- 1 Introduction
 - Problématique
 - Rappels
 - Particules de vortex
- 2 Suivi de champs denses
 - Estimateurs de mouvement fluide
 - Filtrage stochastique
- 3 Construction du modèle de filtrage**
 - Loi d'évolution des écoulements fluides
 - Modèle d'état
 - Modèle d'observation
- 4 Schéma de filtrage
- 5 Exemples

Loi d'évolution

Equation de Navier-Stokes 2D incompressible :

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{w}$$

Forme **vorticité-vitesse** :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \xi = \nu \Delta \xi$$

➡ pas de terme de pression

➡ deux parties dans l'équation :

- transport de la vorticité
- diffusion de la vorticité

Evolution des particules de vortex

Forme vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes :

- partie **convection** : $\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \xi = 0$
- partie **diffusion** : $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \Delta \xi$

Evolution des particules de vortex

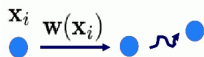
Forme vorticité-vitesse de l'équation de Navier-Stokes :

- partie **convection** : $\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \xi = 0$
- partie **diffusion** : $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \Delta \xi$

Pour les **particules de vortex** :

- convection : $\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{x}_i)$
- diffusion : méthode de marche aléatoire [Chorin 73]

➔ perturbation gaussienne appliquée à \mathbf{x}_i



Modèle d'état

Evolution des particules de vortex = **système de particules en interaction** :

$$d\mathbf{x}_{i,t} = \sum_{j=1}^p \gamma_j K_{\epsilon_j}^{\perp}(\mathbf{x}_{i,t} - \mathbf{x}_{j,t})dt + \sqrt{2\nu}d\mathbf{B}_{i,t}, \quad 1 \leq i \leq p$$

Avec $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)^T$ et $\mathbf{w}(\mathbf{X}) = (\mathbf{w}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{w}(\mathbf{x}_p))^T$:

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)dt + \sqrt{2\nu}d\mathbf{B}_t$$

Modèle d'état

Evolution des particules de vortex = **système de particules en interaction** :

$$d\mathbf{x}_{i,t} = \sum_{j=1}^p \gamma_j K_{\epsilon_j}^{\perp}(\mathbf{x}_{i,t} - \mathbf{x}_{j,t})dt + \sqrt{2\nu}d\mathbf{B}_{i,t}, \quad 1 \leq i \leq p$$

Avec $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)^T$ et $\mathbf{w}(\mathbf{X}) = (\mathbf{w}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{w}(\mathbf{x}_p))^T$:

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)dt + \sqrt{2\nu}d\mathbf{B}_t$$

Ajout d'un terme d'**erreur**

➔
$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)dt + (\sqrt{2\nu} + \eta)d\mathbf{B}_t$$

Modèle d'observations

Au temps t_k , hypothèse de conservation de la luminance :

$$I_k(\mathbf{x}) = I_{k+1}(\mathbf{x} + \mathbf{w}_{t_k}(\mathbf{x})) + u_k \quad u_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Vecteur d'observations :

$$\mathbf{Z}_k = \{I_k(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in R = \cup_{j=1}^p R_j} \quad (R_j \text{ définie autour de la particule } \mathbf{x}_j)$$

➔ **Vraisemblance** : $p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) \propto \exp\left(- \int_R \frac{(I_k(\mathbf{x}) - I_{k+1}(\mathbf{x} + \mathbf{w}_{t_k}(\mathbf{x})))^2}{2\sigma^2} d\mathbf{x}\right)$

Suivi de champs de vitesses

Modèle de filtrage :

$$\begin{cases} d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)dt + \sigma d\mathbf{B}_t \\ p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}) \end{cases}$$

- ➔ Fortes non linéarités
- ➔ Technique du filtrage particulaire (temps continu [Del Moral et al. 01])

Suivi de champs de vitesses

$t_k = 0$: Initialisation de $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{x}_{1,0}, \dots, \mathbf{x}_{p,0})^T$ et $\beta = \{\gamma_j, \epsilon_j\}_{j=1:p}$

$t_k = 1, 2, \dots$:

- prédiction

$$\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} \sim p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)})$$

→ simulation de N trajectoires $\{\mathbf{X}_t^{(i)} : t_{k-1} < t \leq t_k\}_{i=1:N}$
selon $d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)dt + \sigma d\mathbf{B}_t$

Suivi de champs de vitesses

$t_k = 0$: Initialisation de $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{x}_{1,0}, \dots, \mathbf{x}_{p,0})^T$ et $\beta = \{\gamma_j, \epsilon_j\}_{j=1:p}$

$t_k = 1, 2, \dots$:

- prédiction

$$\mathbf{X}_{t_k}^{(i)} \sim p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{X}_{t_{k-1}}^{(i)})$$



simulation de N trajectoires $\{\mathbf{X}_t^{(i)} : t_{k-1} < t \leq t_k\}_{i=1:N}$
selon $d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)dt + \sigma d\mathbf{B}_t$

- correction

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{Z}_k | \mathbf{X}_{t_k}^{(i)})$$

Suivi de champs de vitesses

$t_k = 1, 2, \dots :$

- estimation

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}}(\mathbf{X}_{t_k})$$

Suivi de champs de vitesses

$t_k = 1, 2, \dots :$

- estimation

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}}(\mathbf{X}_{t_k})$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{t_k} = (\hat{\mathbf{x}}_{1,t_k}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{p,t_k})^T = \mathbb{E}(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^{(i)} \mathbf{X}_{t_k}^{(i)}$$

Suivi de champs de vitesses

$t_k = 1, 2, \dots :$

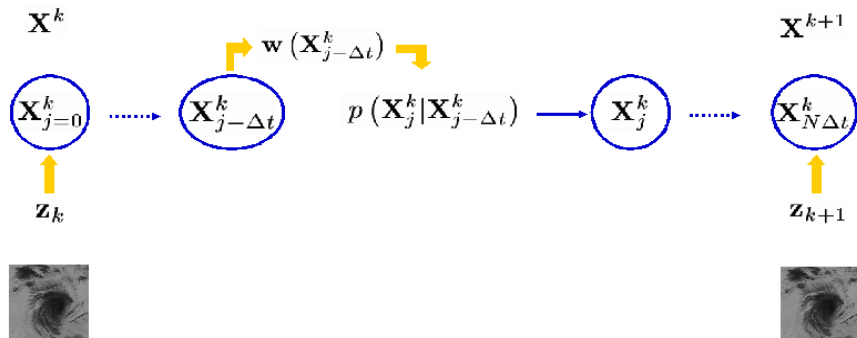
- estimation

$$p(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta_{\mathbf{X}_{t_k}^{(i)}}(\mathbf{X}_{t_k})$$

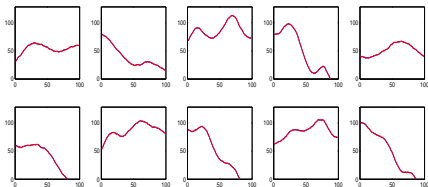
$$\hat{\mathbf{X}}_{t_k} = (\hat{\mathbf{x}}_{1,t_k}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{p,t_k})^T = \mathbb{E}(\mathbf{X}_{t_k} | \mathbf{Z}_{1:k}) \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k^{(i)} \mathbf{X}_{t_k}^{(i)}$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{t_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \gamma_j K_{\epsilon_j}^\perp(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{j,t_k}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Suivi de champs de vitesses

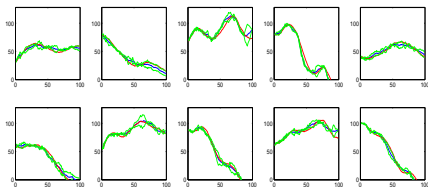


Séquence synthétique de 5 particules de vortex



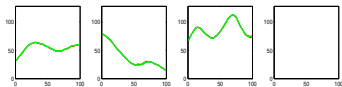
$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_5)^T$$

Trajectoires des 10 coordonnées



Résultat du suivi (modélisation **discrète**)

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \mathbf{w}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{v}_k$$



Résultat du suivi (modélisation **continue**)

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{w}(\mathbf{X}_t)dt + \sigma d\mathbf{B}_t$$

Séquence synthétique de turbulence 2D

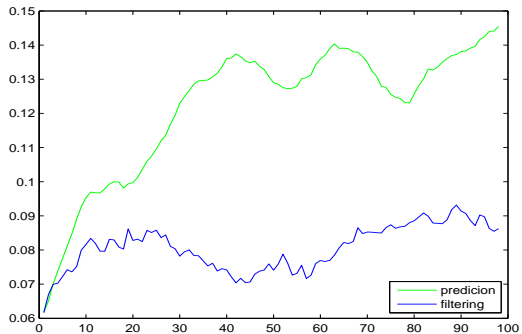
Navier-Stokes 2D simulée par DNS (*Simulation Numérique Directe*)

Séquence synthétique de turbulence 2D

Résultat du suivi (100 particules de vortex, 1000 trajectoires de filtrage)

Séquence synthétique de turbulence 2D

Erreur d'estimation de la vorticité



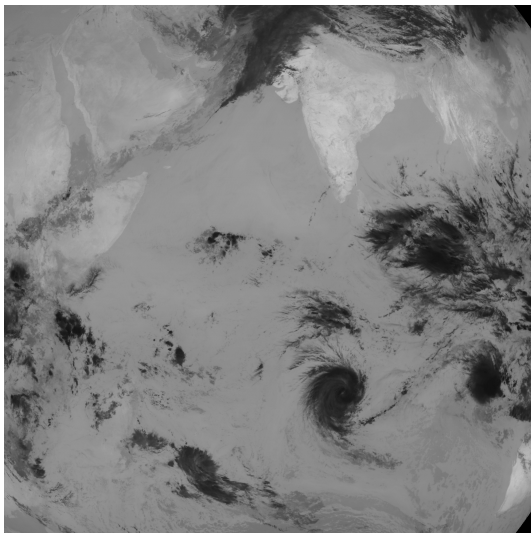
Application en mécanique des fluides : vortex générés en bout d'aile d'avion

Propagation des particules de vortex selon le modèle d'évolution

Application en mécanique des fluides : vortex générés en bout d'aile d'avion

Résultat du suivi (15 particules de vortex, 1000 trajectoires de filtrage)

Application en météorologie : cyclone sur l'océan indien (LMD)



Application en météorologie : cyclone sur l'océan indien (LMD)

Résultat du suivi (15 particules de vortex, 1000 trajectoires de filtrage)

Application en météorologie : cyclone Vince (LMD)

Résultat du suivi (7 particules de vortex, 1000 trajectoires de filtrage)

Conclusion

- représentation réduite de l'écoulement (particules de vortex)
 - connaissance *a priori* sur l'évolution du fluide
 - modèle continu / observations discrètes
 - cohérence temporelle
 - champs de vecteur disponibles à chaque instant
- ➔
- bons résultats pour espaces d'état de dimension réduite
 - écoulements complexes : suivi des grandes échelles

Perspectives

- extension en 3D
- problème de la dimension
 - parallélisation de l'algorithme
 - réduction de la dimension du problème de filtrage
 - simuler le processus vers les observations
- autres modèles réduits de l'écoulement
- autres méthodes de filtrage



<http://www.irisa.fr/vista>



<http://fluid.irisa.fr>