

# Journée Méthodes Particulaire en MécaFlu



**Un algorithme de filtrage de mesures de vitesses d'un fluide turbulent par système de particules en interaction.**

[christophe.baehr@meteo.fr](mailto:christophe.baehr@meteo.fr)

# Contexte.

- Ce travail s'inscrit dans un projet visant à l'amélioration des mesures atmosphériques faites avec les avions de recherche de Météo-France.
- Environnement de mesures fortement perturbé.
- Le vent est un paramètre déduit de mesures bruitées, désynchronisées, délocalisées.
- De plus la plateforme est mobile évoluant dans le fluide à  $100 \text{ ms}^{-1}$ , le vent est typiquement de quelques  $\text{ms}^{-1}$  et la précision recherchée à 200 Hz:  $0.1 \text{ ms}^{-1}$ .
- On va présenter ici un cas plus académique avec des mesures faites au sol (sans bruit), que l'on bruit artificiellement et que l'on cherche à filtrer.

# Le plan.

**I - Mécanique des fluides : Point de vue probabiliste.**

**II - Le filtrage stochastique, quelques éléments.**

**III - Un algorithme de filtrage des mesures de vent.**

**IV - Quelques Applications.**

# Notations

# Notations

- **Notion de Processus Stochastique.**

On se donne un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et une famille de variables aléatoires indexée par le temps  $t$ ,  $X_t$ , c'est à dire une famille de fonctions aléatoires

$$\begin{aligned}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) &\rightarrow (E, \mathcal{B}) \\(t, \omega) &\rightarrow X_t(\omega)\end{aligned}$$

- **Loi d'un processus.**

La loi d'un processus  $X_t$  est la mesure image

$$\mathbb{P}^{X_t}(A) = \mathbb{P}(X_t^{-1}(A)) = \mathbb{P} \circ X_t^{-1}(A), \text{ pour } A \in \mathcal{B}$$

- **L'espérance du processus  $X_t$  est la moyenne :**

$$\mathbb{E}(\varphi(X_t)) = \int_{\Omega} \varphi(X_t(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_E \varphi(\xi) \mathbb{P}^{X_t}(d\xi).$$

# Modèle Eulerien de Navier-Stokes

# Modèle Eulerien de Navier-Stokes.

- On considère les vitesses d'un fluide obéissant aux équations de Navier-Stokes dans un référentiel non lié au fluide.
- On note  $U_{t,x}$  le champ de vitesse donné par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{t,x} \nabla\right) \cdot U_{t,x} = -\nabla p + \mu \cdot \Delta U_{t,x} \text{ dans } \Omega, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3$$

$$U_{t,x} = f(t, x) \text{ sur } \partial\Omega, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3$$

$$U_{0,x} = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

- Système dynamique chaotique vs système dynamique stochastique.

# Modèle Eulerien de Navier-Stokes.

- On utilise la décomposition de Reynolds en mouvement moyen et fluctuation pour une quantité  $Q_{t,x}$  :

$$Q_{t,x} = \langle Q \rangle_{t,x} + q_{tx}$$

- Le terme  $\langle Q \rangle_{t,x}$  signifie que l'on considère  $Q_{t,x}$  comme une famille de v.a., que l'on dispose d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et que l'on soit capable de calculer

$$\langle Q \rangle_{t,x} = \int_{\Omega} Q_{t,x}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \mathbb{P}^{Q_{t,x}}(d\xi)$$

- Cette quantité  $\langle Q \rangle_{t,x}$  est donc la moyenne locale en un point  $x$  au temps  $t$ .

# Modèle Eulerien de Navier-Stokes.

- En fait on va noter  $\mathbb{P}^{Q_{t,x}} = \mathbb{P}^E$ .
- Et on va supposer que  $\mathbb{P}^E$  a une densité  $f^E$  par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est à dire que  $\mathbb{P}^E(d\xi) =^{def} f^E(\xi)d\xi$ .
- Ainsi on a  $\langle Q \rangle_{t,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f^E(\xi)d\xi$ .
- Cette densité s'appelle aussi la fonction de distribution de probabilité ou **PDF**. Ici il s'agit de la PDF Eulerienne.

# Processus Lagrangien

# Processus Lagrangien.

- Pour un élément de fluide si on note  $X_t^{x_0} = X(x_0, t)$  sa position à l'instant  $t$  sachant qu'il était en  $x_0$  à l'instant initial, on appelle vitesse lagrangienne la quantité  $V_t = U(X_t^{x_0}, t)$ .
- C'est un autre processus aléatoire.
- Et on suppose que ce processus a une probabilité  $\mathbb{P}^L$  avec une densité  $f^L$  telle que,  $\mathbb{P}^L(d\xi) =^{def} f^L(\xi)d\xi$ .

# Processus Lagrangien.

- On définit une nouvelle espérance pour la quantité lagrangienne  $Q_t = Q_{t, X_t^{x_0}}$ , et pour une fonction  $\phi$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(Q_t)) &= \int_{\Omega} \phi \circ Q_t(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) \mathbb{P}^L(d\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) f^L(\xi) d\xi\end{aligned}$$

- Il y a un lien entre les PDF Eulériennes et Lagrangiennes.
- Dans le cas d'un écoulement incompressible, on a :

$$f^E(U_{t, X_t^{x_0}}) = \frac{f^L(V_t)}{f^L(X_t^{x_0})}$$

# **Introduction aux Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.**

# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

- Ce sont des modèles d'évolution (Lagrangiens) de particules sans inertie, utilisant des moyennes locales (Eulériennes).
- A la base on retrouve des équations de Langevin.
- La mise en forme de l'équation utilise des modèles empiriques (Modèle de Rotta pour les tensions de Reynolds) et reste compatible avec l'équation de Navier-Stokes.
- On identifie certains termes par des comportements en temps longs qui respectent les lois de Kolmogorov (K41) pour la turbulence.

# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

- Les modèles de Pope sont relatifs à la vitesse lagrangienne  $V_t$ .
- Pour la turbulence homogène isotrope, incompressible, il s'écrit:

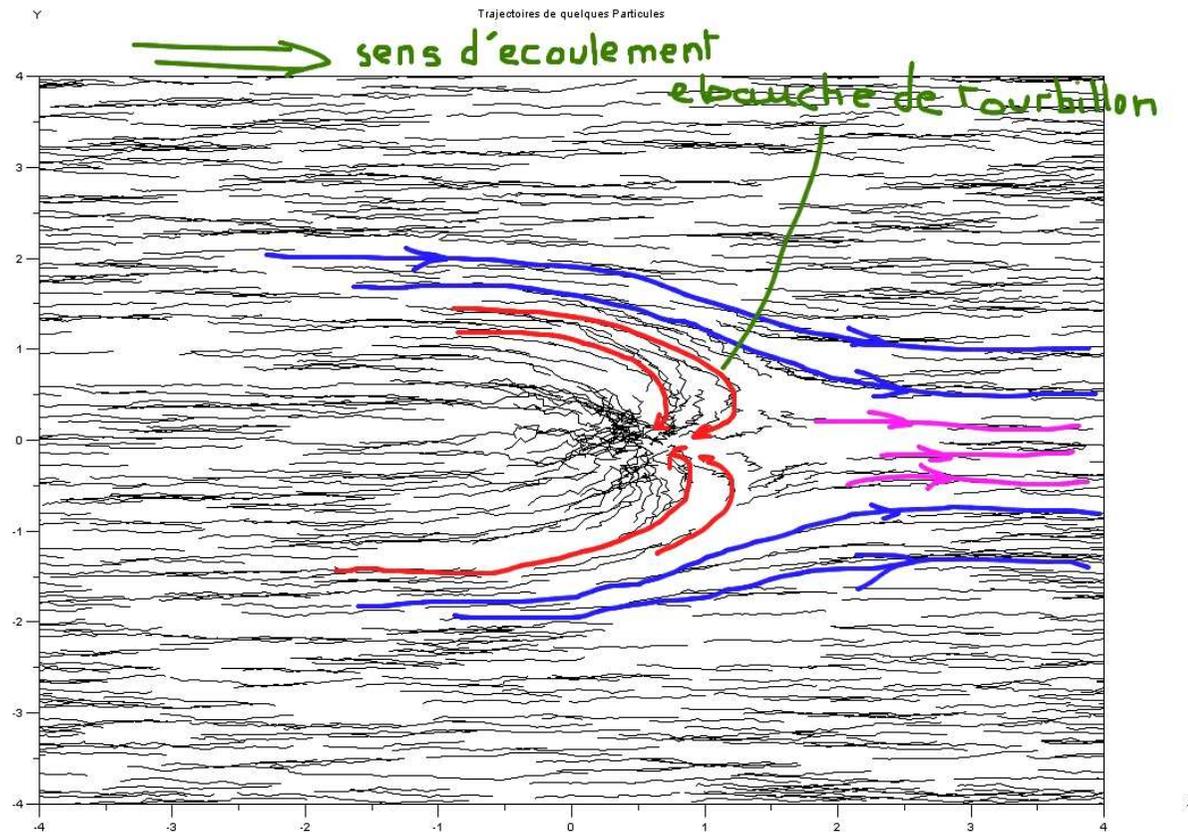
$$dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0\right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (V_t - \langle v \rangle) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon_t} dW_t$$

- L'équation de Langevin correspondante est:

$$m \frac{dV}{dt} = F_{\text{pression}} + F_{\text{frottement}} + F_{\text{aleatoire}}$$

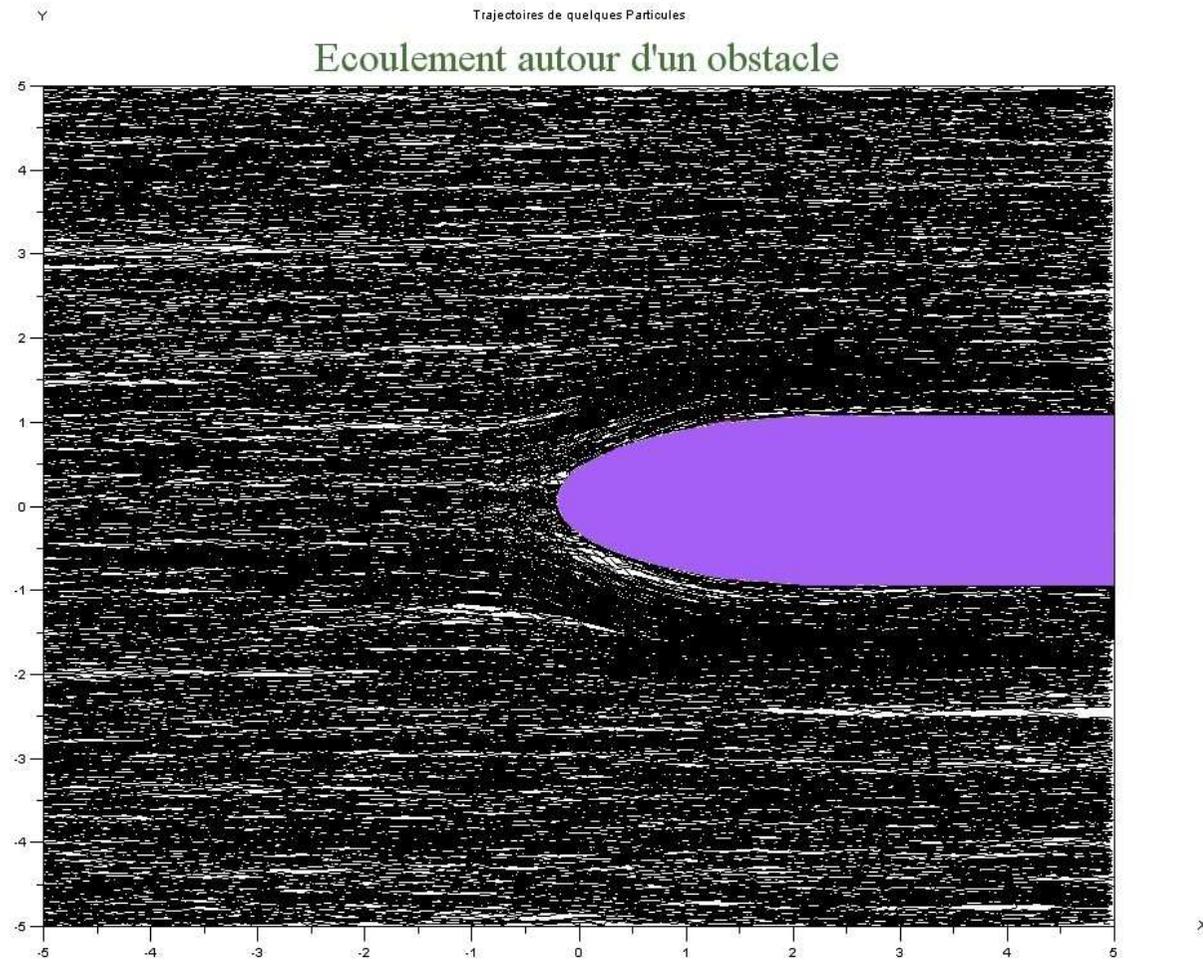
# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

- Malgré cette simplicité d'apparence, ce modèle est-il réaliste pour un fluide ?



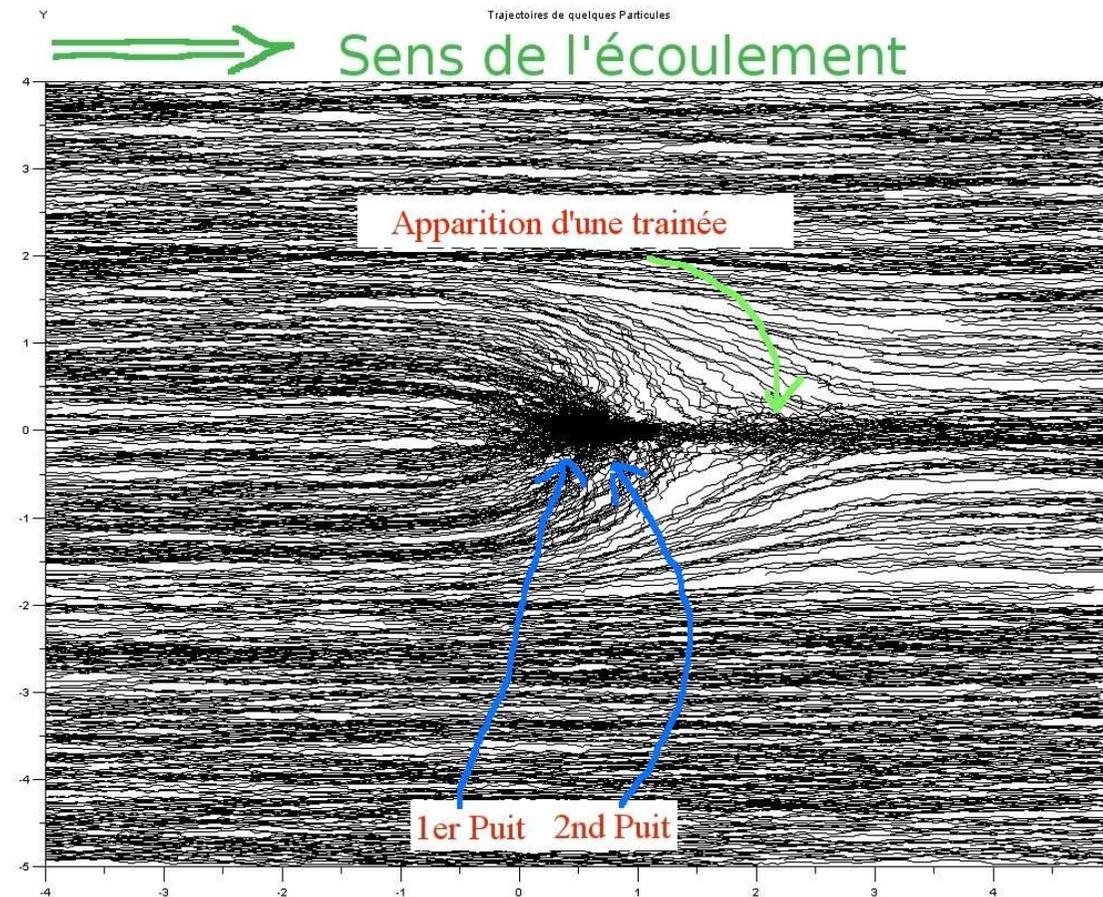
# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

● ou bien:



# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

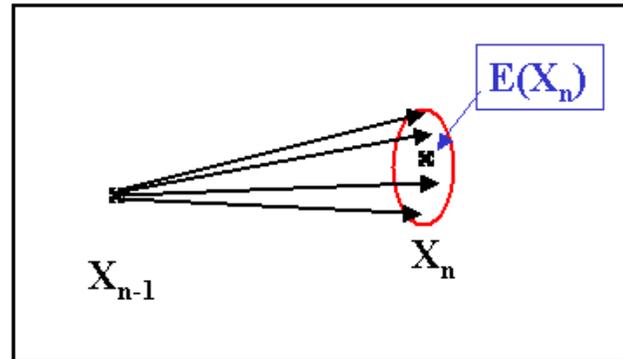
● ou encore:



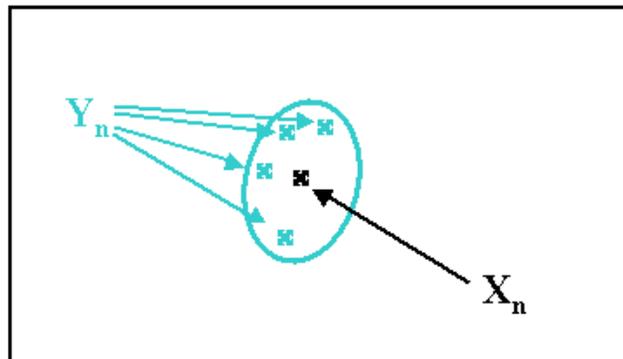
# Le filtrage stochastique

# Le filtrage stochastique.

Le paramètre d'intérêt a une dynamique aléatoire



On l'observe avec du bruit



On cherche à obtenir  $E(X_n)$  sachant  $Y_n$

# Le filtrage stochastique.

- Cela nécessite d'avoir une équation pour la dynamique et une pour l'observation.

- Par exemple pour le paramètre d'intérêt :

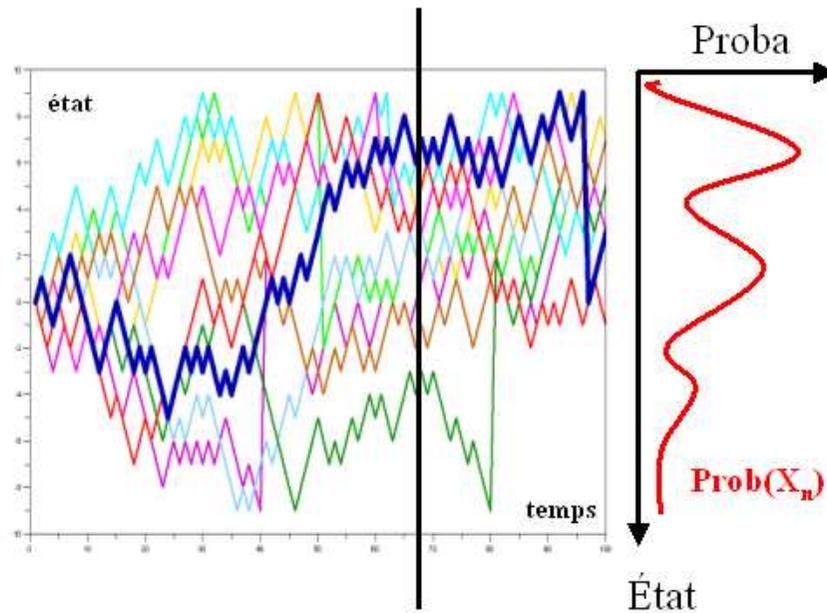
$$dX_t = \mathcal{F}(X_t, \dots) dt + \mathcal{G}(X_t, \dots) dW_t^X$$

- Il faut que le paramètre  $X_t$  ait une dynamique Markovienne.

- L'équation d'observation utilise la fonction de transfert :

$$Y_t = \mathcal{H}(X_t, W_t^Y, \dots) \text{ et une fonction potentiel } G_t.$$

# Le filtrage stochastique.



- Les systèmes aléatoires réalisent une trajectoire parmi d'autres.
- Dans les techniques d'estimation stochastique, on recrée cette dynamique.

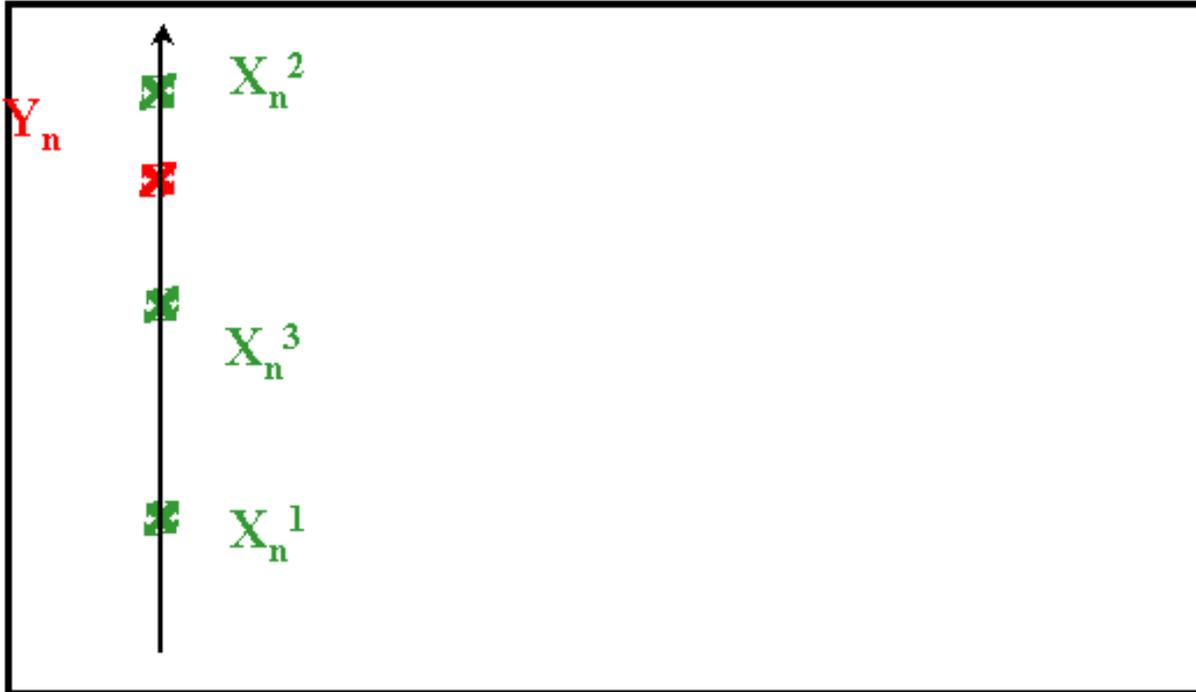
# Filtrage particulaire

On dispose d'une observation  $Y_n$ .



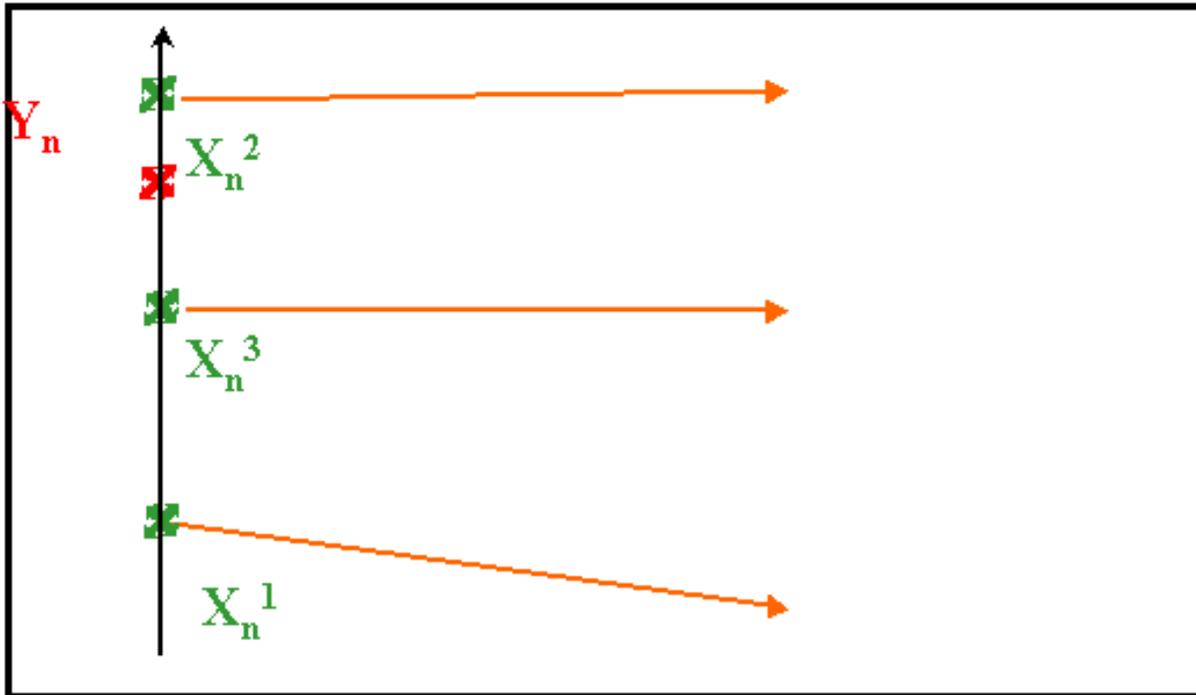
# Filtrage particulaire

On dispose d'états  $X_n^i$  placés auparavant.



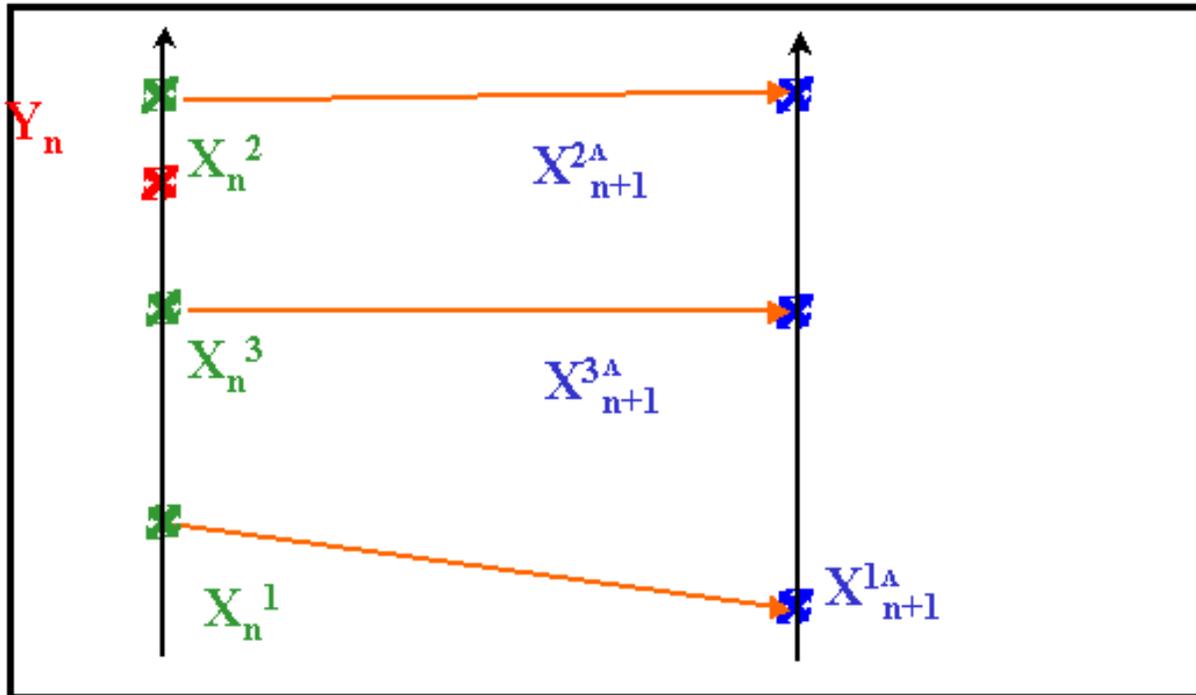
# Filtrage particulaire

On fait évoluer les états  $X_n^i$  avec la dynamique.



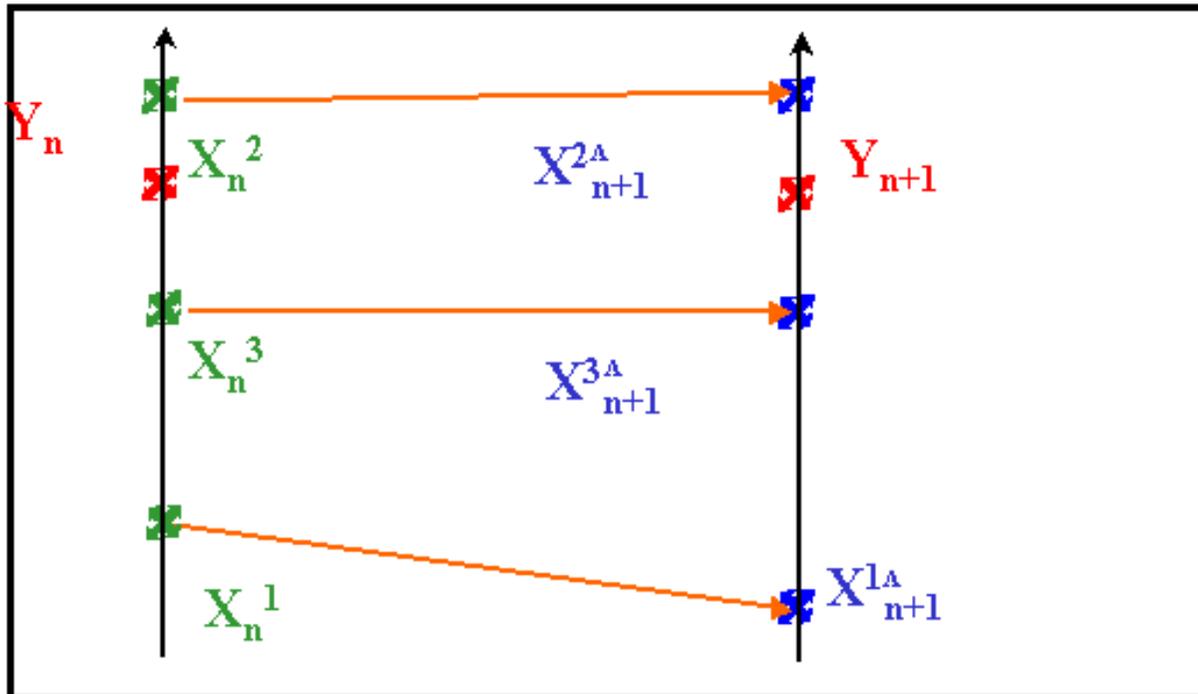
# Filtrage particulaire

Les états sont placés à l'étape suivante  $n + 1$ .



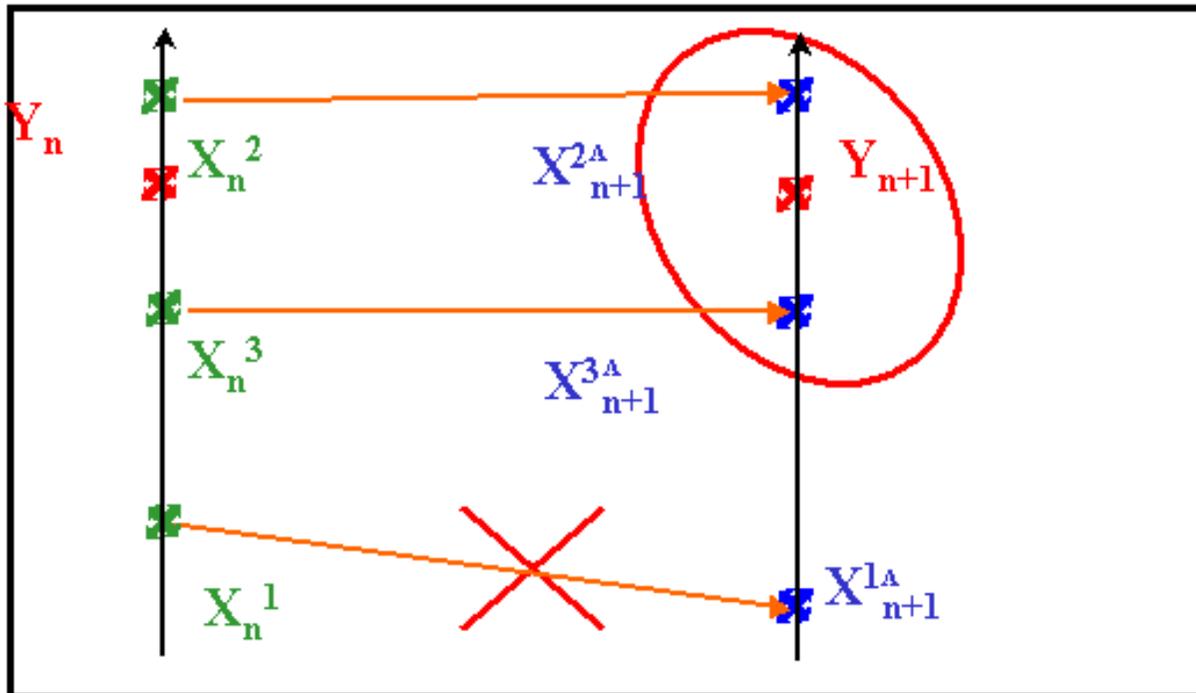
# Filtrage particulaire

La nouvelle observation arrive  $Y_{n+1}$ .



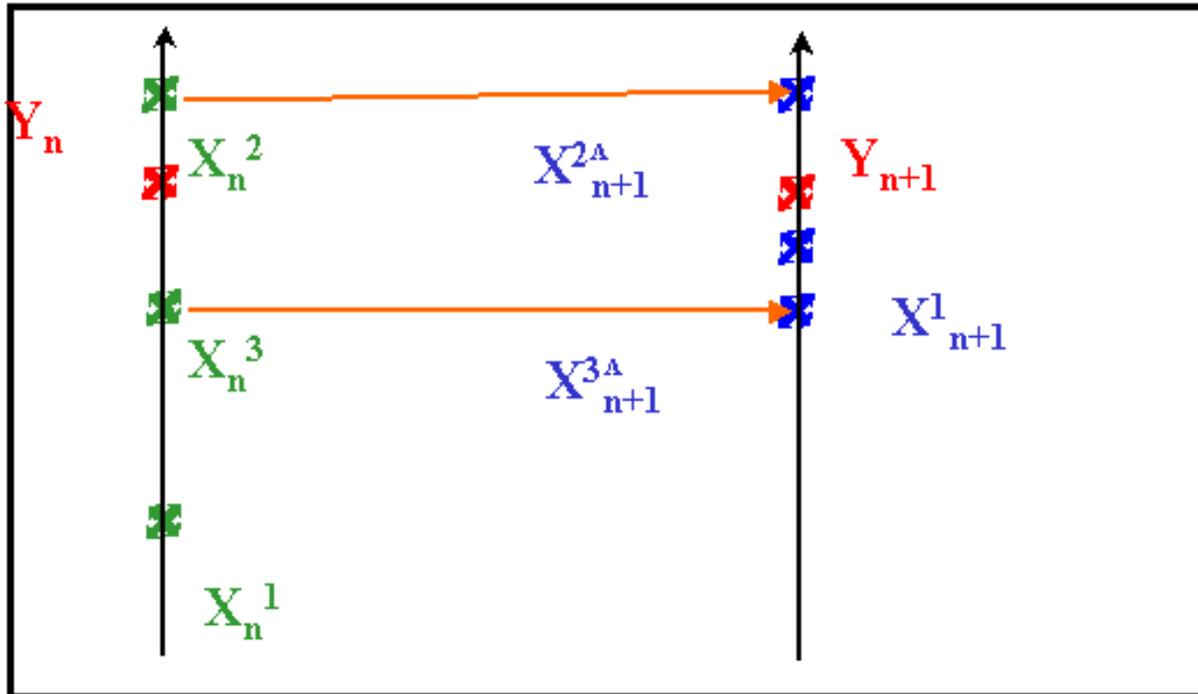
# Filtrage particulaire

On sélectionne les états les plus pertinents.



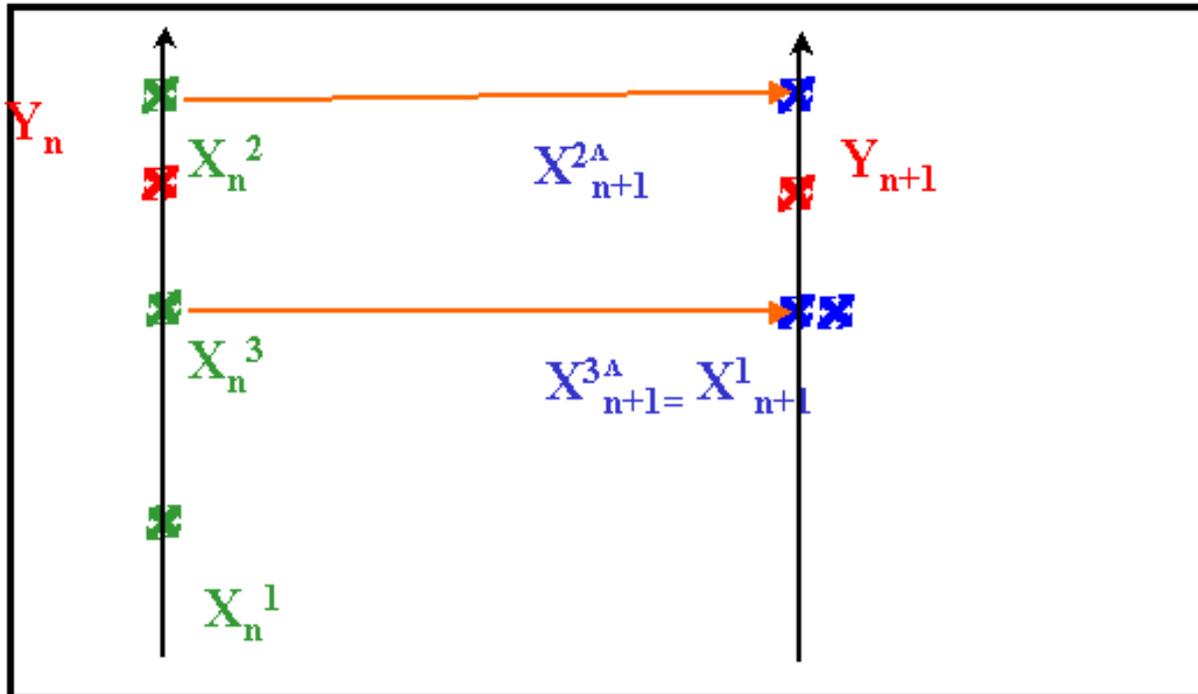
# Filtrage particulaire

On redistribue les particules éliminées.



# Filtrage particulaire

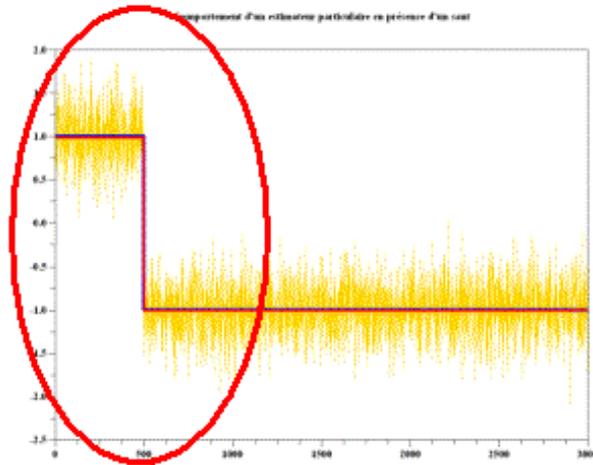
On peut utiliser les positions existentes.



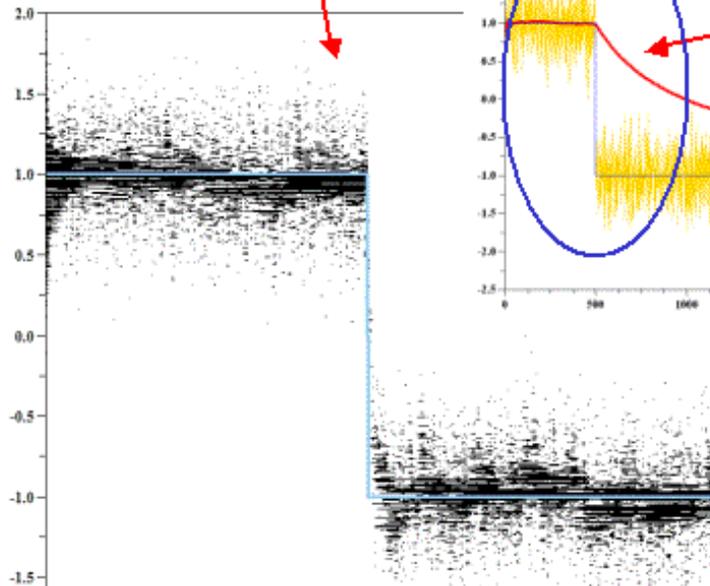
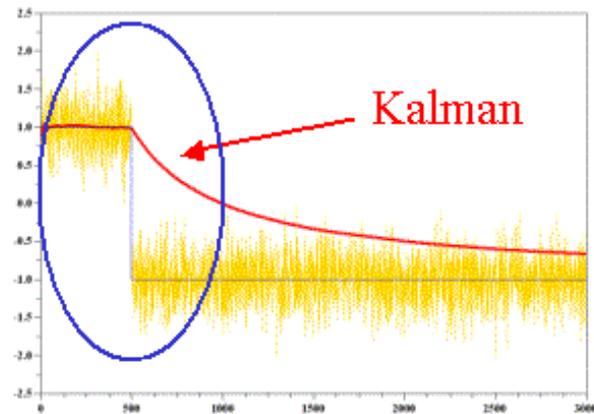
# Le filtrage stochastique.

- Dans le problème du filtrage stochastique, on cherche à calculer la  $\mathcal{L}oi(X_0, \dots, X_n | Y_0, \dots, Y_n) = \hat{\eta}_n$
- C'est une estimation trajectorielle.
- On cherche alors un algorithme itératif qui solutionne ce problème de filtrage.
- Les techniques particulières avec une étape de prédiction et une étape de sélection sont une solution.
- Mais l'algorithme doit être adapté au processus.

# Filtrage particulaire

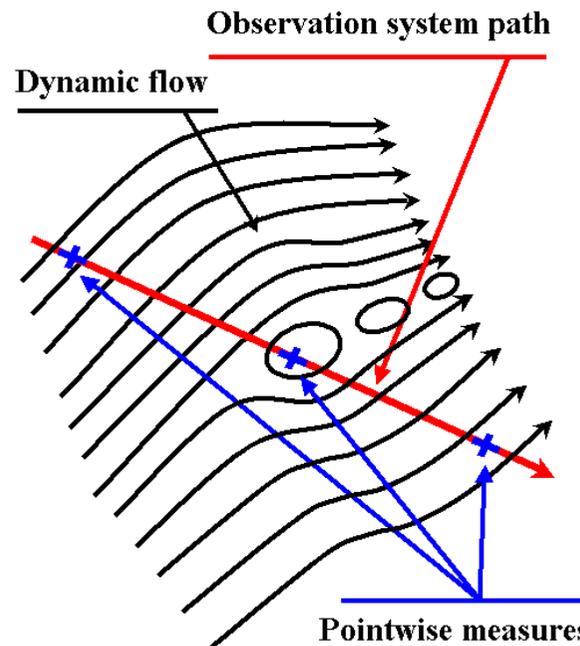


Comportement d'un estimateur de Kalman en présence d'un saut



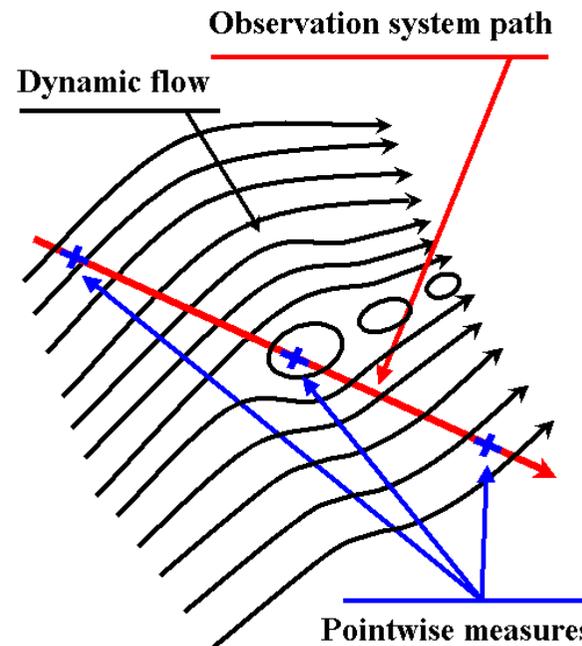
# Filtrage des mesures des vitesses d'un fluide

# Problématique.



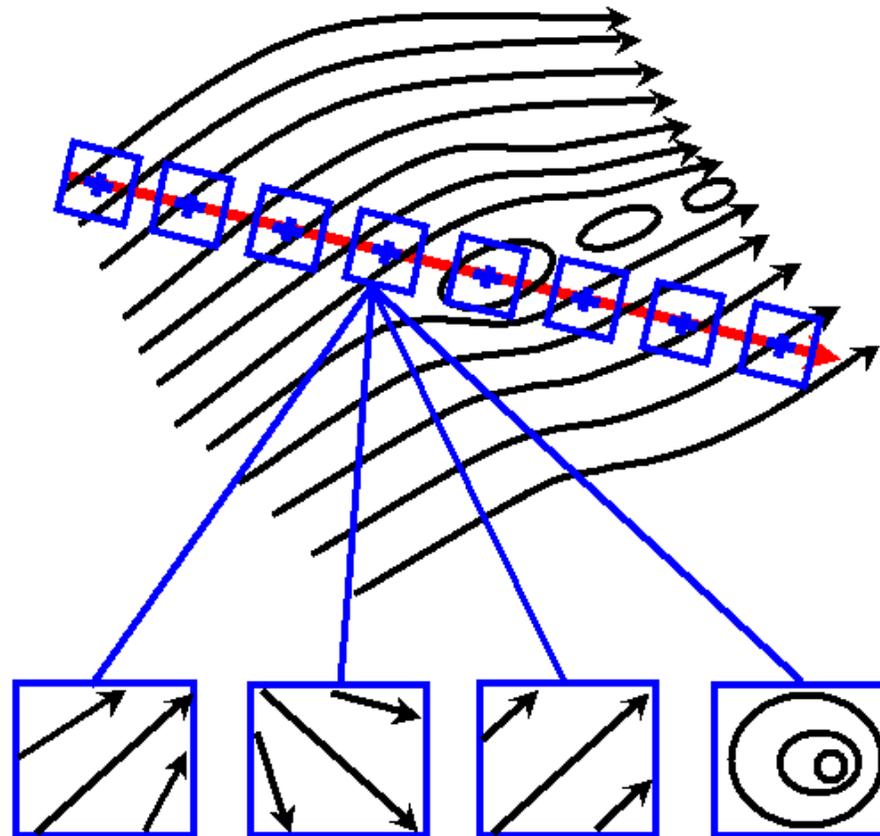
- On mesure ponctuellement un champ continu.
- Pas beaucoup de points pour reconstituer ce champ.

# Problématique.



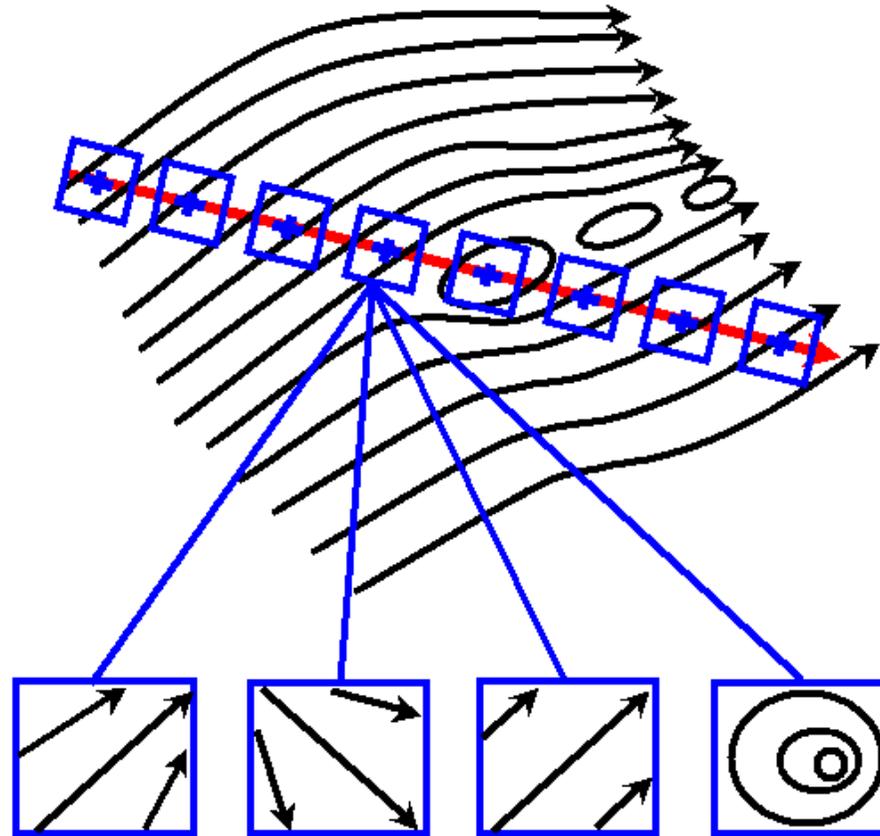
- On ne dispose que d'un échantillonnage sur la trajectoire.
- Pour terminer la mesure est bruitée.

# Heuristique de la technique de filtrage.



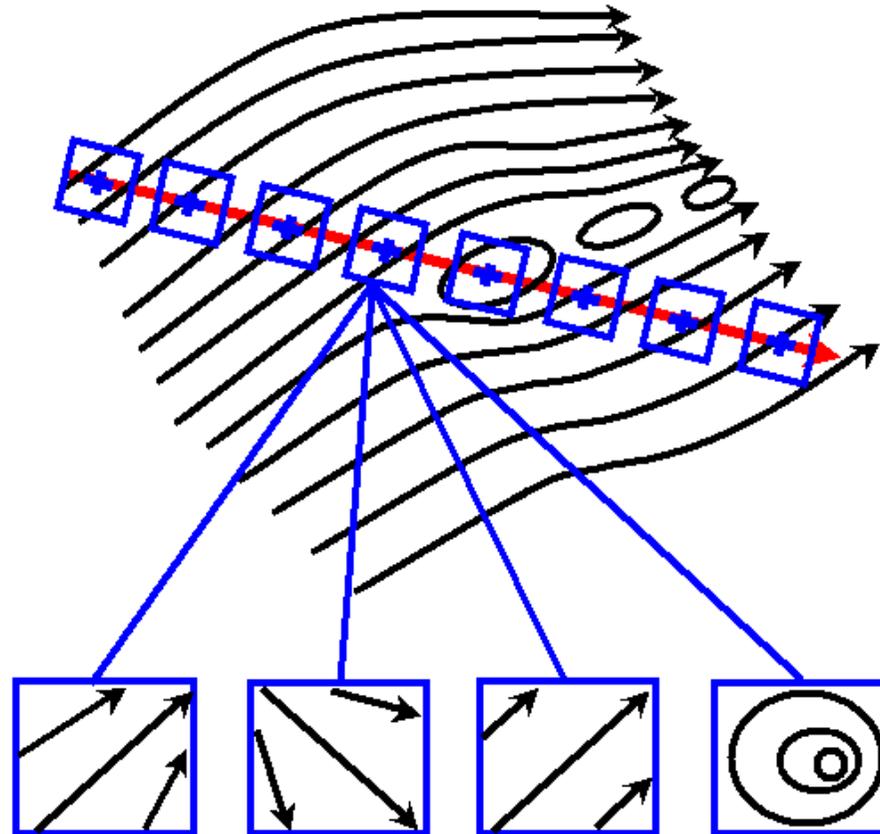
- On peut comparer des champs simulés pour retrouver l'estimé.

# Heuristique de la technique de filtrage.



- Mais ce serait difficile à mettre en œuvre et trop coûteux.

# Heuristique de la technique de filtrage.



- On utilisera plutôt des particules test placées dans le fluide pour lesquelles on a des modèles.

# Heuristique de la technique de filtrage.

- Les équations du filtrage ont 2 étapes: Prédiction, Correction.
- On va développer un algorithme de filtrage particulière basé sur:
  1. Des modèles Lagrangiens pour le comportement de nos particules.
  2. Une sélection de type génétique pour capter les particules les plus adaptées.
- Comme on manque d'information sur les écoulements, on va conditionner le modèle à l'observation.

# Modèle de Pope discrétisé

# Modèle stochastique discrétisé.

- On part du couple (position  $\mathcal{X}_t$ , vitesse  $\mathcal{V}_t$ ) que l'on suppose markovien.
- En discrétisant les vitesses en des temps  $t_j = j.\Delta t$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$  et  $\Delta t > 0$  est un pas de temps fixe, on sépare les échelles.
- La vitesse  $\mathcal{V}_n$  s'écrit comme une vitesse de grande échelle  $V_n$  plus un bruit correspondant aux structures sous-maille:  $\mathcal{V}_n = V_n + \mathbf{v}_n$
- Les petites structures agissent comme un bruit sur les positions.

# Modèle stochastique discrétisé.

- Il faut approcher la moyenne Eulérienne :

$$\langle \varphi(V) \rangle_{n,x} \sim \Pi_n^\delta(\varphi)(x) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}_\delta(\varphi(V_n) | X_n = x)$$

- On peut voir  $-\nabla_x \langle p \rangle$  comme une V.A. exogène que l'on va enclore dans la variable  $\mathbb{E}(Z_n)$  et on a

$$\mathbb{E}_\delta(\Delta V_n) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E}(Z_n) \cdot \Delta t$$

- De même pour  $\varepsilon_n$  on écrit:  $\mathbb{E}_\delta(\Delta V_n \cdot \Delta V_n) = C_0 \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_n) \cdot \Delta t$

- Alors

$$\Delta V_n = \mathbb{E}(Z_n) \cdot \Delta t - C_1 \frac{\varepsilon_n}{k_n} (V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)) \Delta t + \sqrt{C_0 \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_n)} \Delta W_n$$

- Le modèle de Pope fait partie d'une classe d'équations bien étudiée.

# Filtrage des vitesses d'un fluide

# Problème de filtrage d'un fluide

- Objectif: Estimer les composantes d'un fluide à l'aide d'observations partielles et bruitées.
- Modèle de filtrage stochastique:
  - Signal fluide  $\mathcal{X}_n = (X_n, V_n)$  en champ moyen.
  - Observations de vitesses bruitées  $\mathcal{Y}_n$ .
- Rappel du problème : Calculer la  $\mathcal{L}oi(\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_n | \mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_n)$ .
- On va faire une estimation trajectorielle.

# Modèle a priori vs Modèle conditionné

- On est dans le cas d'un modèle à champs moyen.
- On peut l'écrire de manière abstraite sous la forme:

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{X}_{n+1} &= F(\mathcal{X}_n, \eta_n) \Delta t + \sigma(\mathcal{X}_n, \eta_n) \Delta W_{n+1}^{\mathcal{X}} \\ \mathcal{Y}_n &= H(\mathcal{X}_n, W_n^{\mathcal{Y}}) \end{cases}$$

avec  $\mathcal{X}_n = (X_n, V_n)$  et  $\eta_n = \text{Loi}(\mathcal{X}_n)$

- le processus est markovien et sa loi s'écrit avec le noyau de transition  $M_{n, \eta_{n-1}}$ :

$$\eta_n = \eta_{n-1} M_{n, \eta_{n-1}} \stackrel{\text{def.}}{=} \int \eta_{n-1}(dx) M_{n, \eta_{n-1}}(x, \cdot)$$

# Modèle a priori vs Modèle conditionné

- La procédure d'évolution a priori est numériquement très coûteuse.
- On propose de changer la méthode et de considérer  $\hat{\eta}_n = \text{Loi}(\mathcal{X}_n / \mathcal{Y}_0^n)$  au lieu de  $\eta_n = \text{Loi}(\mathcal{X}_n)$
- C'est alors un modèle différent, conditionné aux observations  $\mathcal{Y}_0^n = (\mathcal{Y}_0 \dots \mathcal{Y}_n)$
- Les paramètres du modèle sont estimés en utilisant l'information contenue dans les observations au lieu d'être tirés aléatoirement.
- Et donc  $\mathbb{E}(\cdot) \rightsquigarrow \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{Y}_0^n)$

# Modèle de filtrage d'un fluide.

● Le système du fluide filtré :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} = V_n + \mathbb{E}(Z_n | Y_0 \dots Y_n) \Delta t \\ \quad - C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)}{k_n} \\ \quad \quad \left[ V_n - \frac{\int v G^\delta(X_n - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))}{\int 1 G^\delta(X_n - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))} \right] \Delta t \\ \quad \quad + \sqrt{C_0 \mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)} \Delta W_n^V \\ Y_n = H(V_n) + \left( h(\sigma_n^X W_n^X) \right) + \sigma^Y W_n^Y \end{array} \right.$$

avec

$$k_n = \int \left[ w - \frac{\int v G^\delta(z - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))}{\int 1 G^\delta(z - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))} \right]^2 \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(z, w))$$

# Modèle de filtrage d'un fluide.

- Modèle Stochastique de filtrage.  
On pose pour signal/observation:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{X}_n & = (X_n, V_n) & \text{Signal Fluide} \\ \mathcal{Y}_n & = \underbrace{h_n(\mathcal{X}_n)}_{=H(V_n)} + \underbrace{\text{Bruit}}_{\sim N(0, \sigma^Y)} & \text{Observation} \end{array} \right.$$

$\mathcal{X}_n$  est un Markov Conditionnel de loi de transition  $M_{n+1, \hat{\eta}_n}$  avec  $\hat{\eta}_n = \text{Loi}(\mathcal{X}_n | \mathcal{Y}_0^n)$

$$\mathbb{P}^{\mathcal{X}_{n+1} | \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_0^n} (d(z, v) | (x, u)) = M_{n+1, \hat{\eta}_n} ((x, u), d(z, v))$$

- Avec une localisation en espace pour respecter le modèle 1 point de Pope.

# Modèle de filtrage d'un fluide.

- La variance des bruits d'observation  $\sigma^Y$  fournit la résolution du signal fluide.
  - $\sigma^Y \sim 0$  haute résolution avec peu de frottements dus aux interactions de petites structures. En observation parfaite, on obtient les équations du fluide à résolution maximale :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} &= V_n + Z_n \Delta t + \sqrt{C_0 \varepsilon_n} \Delta W_n^V \end{cases}$$

- $\sigma^Y \gg 0$  faible résolution, prise en compte des interactions de petites structures (sur des grandes échelles). Sans les observations, on retrouve le modèle de Pope discrétisé dans un milieu homogène.

# Interprétation particulière.

- On va alors utiliser un algorithme particulière pour estimer les paramètres du fluide.

Filtre optimal = ( Prédiction / Correction )



Filtre particulière = ( Mutation / Sélection )

- Convergence par Arbres Généalogiques:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\text{lignes ancestrales}^{(i)}} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} \text{Loi}(\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_n | \mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_n)$$

cf P. Del Moral *Feynman-Kac Formulæ, Genealogical and Interacting Particle Systems*, Springer 2004

# Dynamique de la population.

- L'étape de sélection

$\mathcal{X}_n^i = (X_n^i, V_n^i) \xrightarrow{\text{Sélection}} \hat{\mathcal{X}}_n^i = (\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^i)$  utilise le noyau

$$G_n(V_n^i) = e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2} (Y_n - H(V_n^i))^2}$$

- C'est une sélection génétique, donc on garde  $(X_n^i, V_n^i)$  avec la probabilité  $G_n(V_n^i)$  et on redistribue sur le paquet avec  $1 - G_n(V_n^i)$  selon

$$\psi_n\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{V_n^j}\right) = \sum_{j=1}^N \frac{G_n(V_n^j)}{\sum_{k=1}^N G_n(V_n^k)} \delta_{V_n^j}$$

- On estime alors les paramètres locaux  $(\mathbb{E}(Z_n | \mathcal{X}_n^{B_n}, \mathcal{Y}_0^n), \mathbb{E}(\varepsilon_n | \mathcal{X}_n^{B_n}, \mathcal{Y}_0^n))$  par des moyennes sur les incréments de vitesses des particules sélectionnées.

# Dynamique de la population.

- Pour chaque particule on calcule la vitesse moyenne locale approchée par

$$\Pi_n^\delta(\hat{V}_n^i)(\hat{X}_n^i) = \frac{\sum_{j=1}^N \hat{V}_n^j G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^j)}{\sum_{k=1}^N 1 \cdot G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^k)}$$

- L'étape de mutation coïncide avec celle du signal fluide en champ moyen localisé :

$$\hat{\mathcal{X}}_n^i = (\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^i) \xrightarrow{M_{n+1, \hat{\eta}_n^N}} \tilde{\mathcal{X}}_{n+1}^i \xrightarrow{\mathcal{S}_{\tilde{\eta}_{n+1}^N}^{B_{n+1}^N}} \mathcal{X}_{n+1}^i = (X_{n+1}^i, V_{n+1}^i)$$

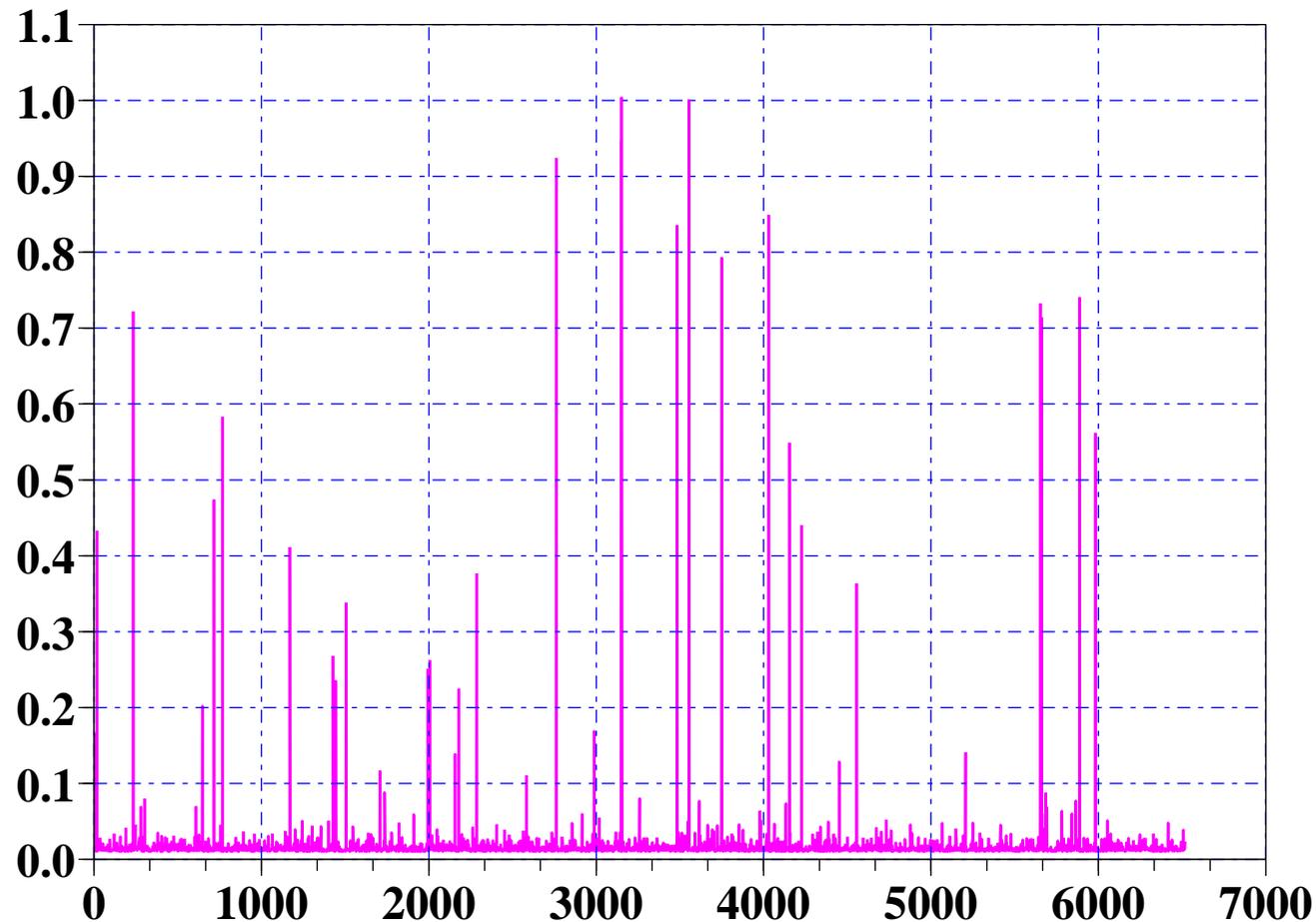
avec  $B_{n+1}^N$  centrée en  $m_{n+1}^N = \int x \eta_{n+1}^N(dx)$ .

# Applications à des mesures simulées puis bruitées

# Applications sur vent simulé 1D

On simule une série de  $\varepsilon_n$ .

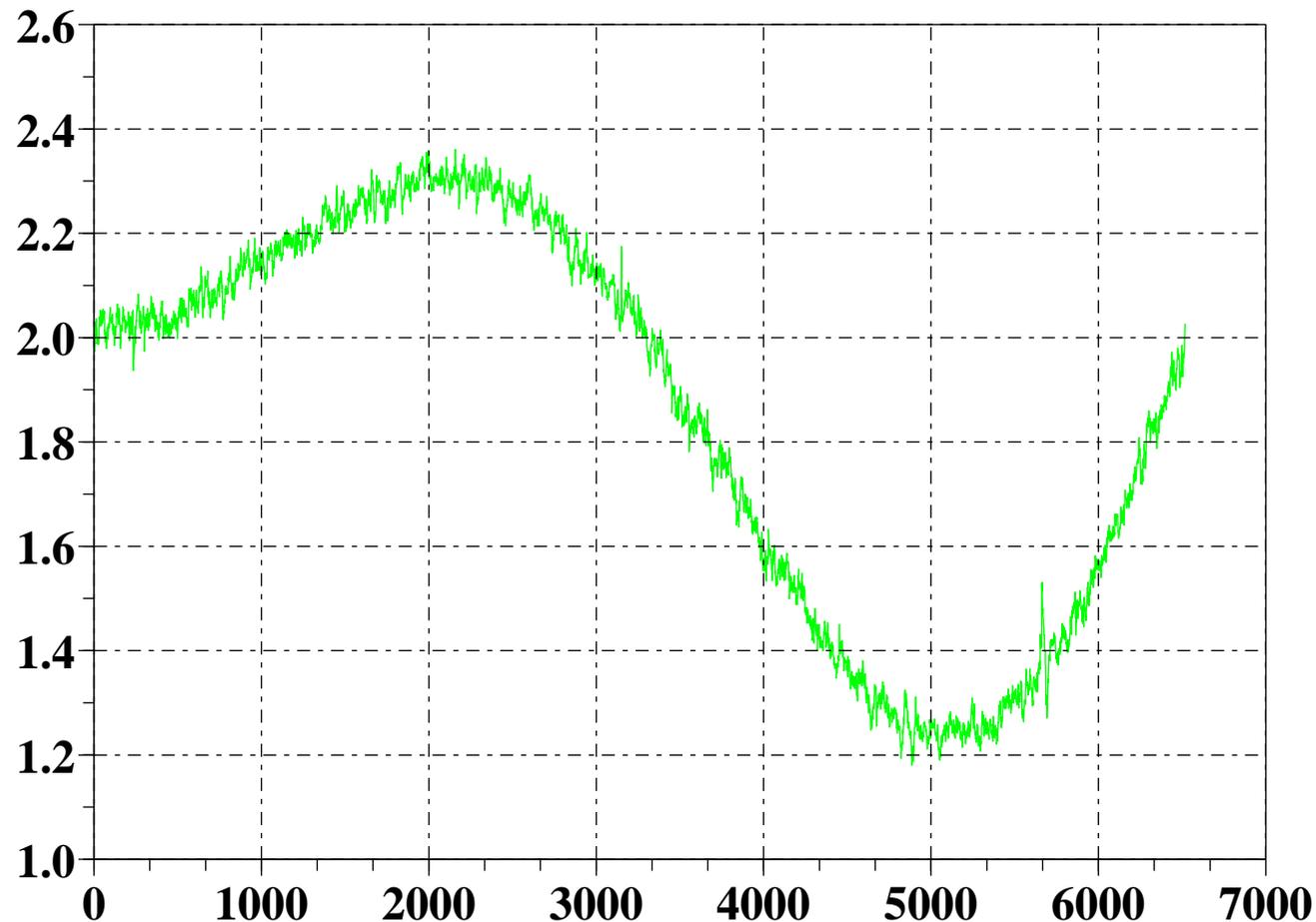
**Taux Dissipation Turbulente Vent 1D Simulé**



# Applications sur vent simulé 1D

On se donne une série de  $Z_n$  et on simule le vent 1D avec le modèle de Pope.

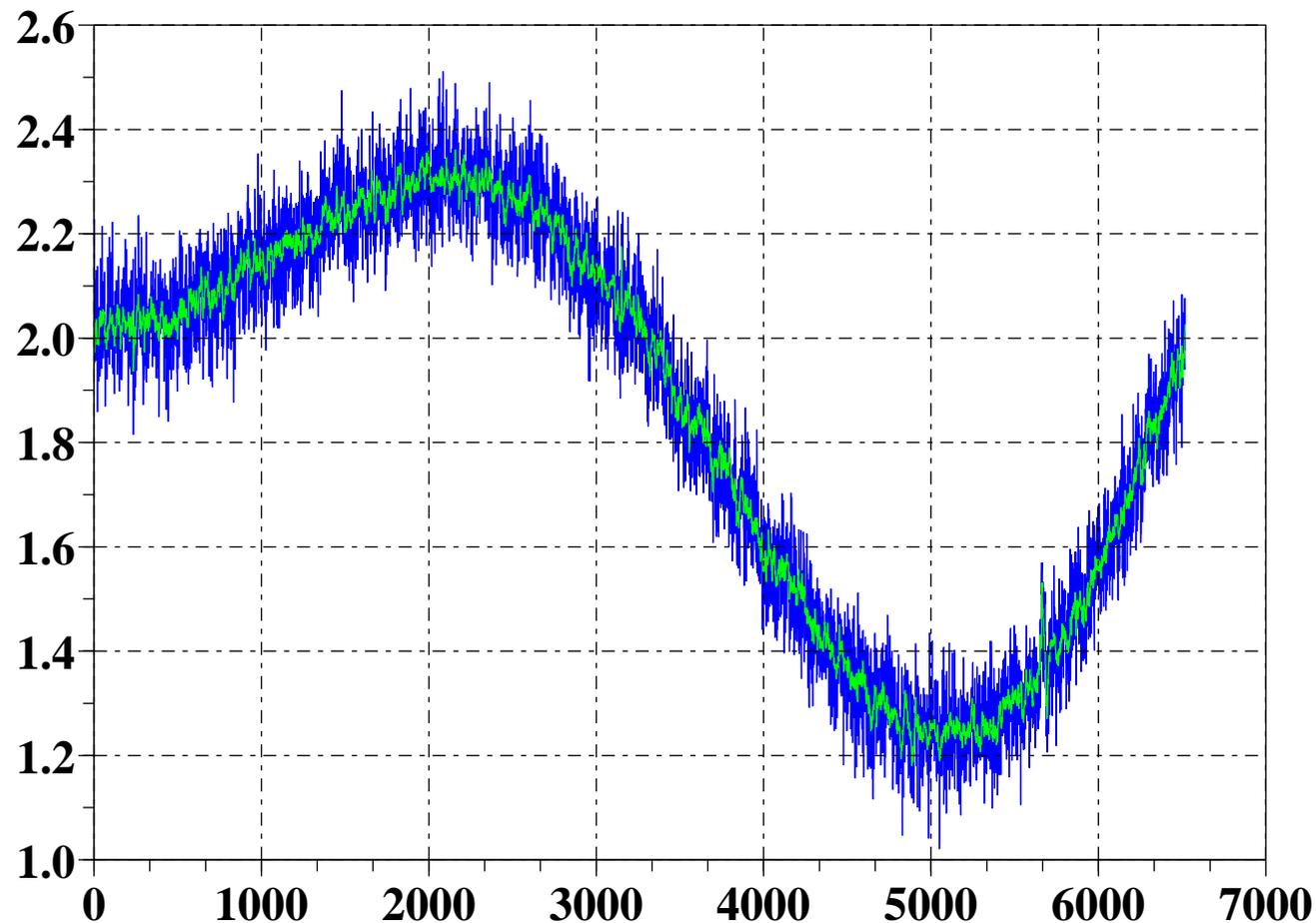
**Filtrage par Algorithme Génétique Vent 1D Simulé**



# Applications sur vent simulé 1D

On bruite alors la donnée, par exemple avec un bruit blanc.

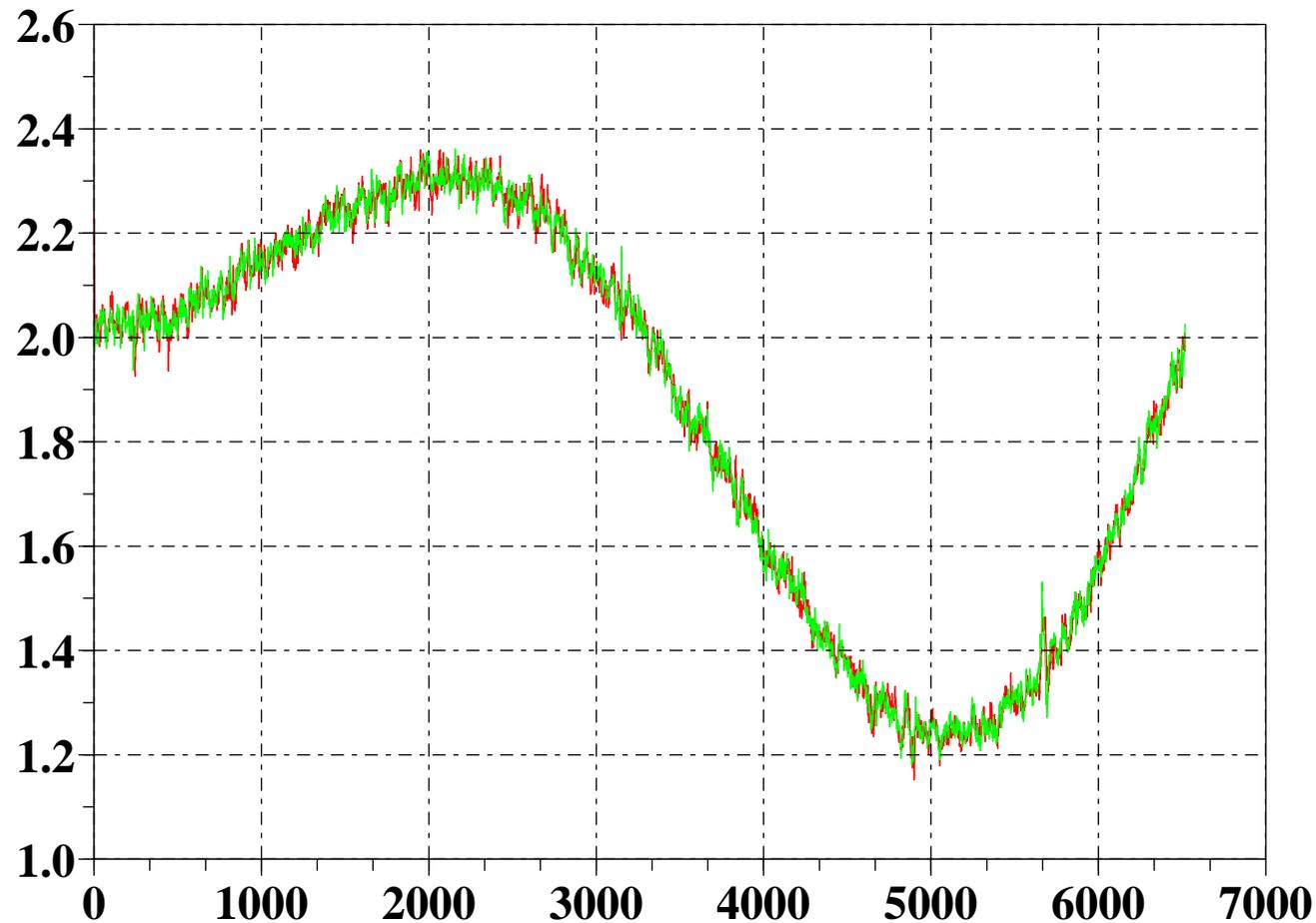
**Filtrage par Algorithme Génétique Vent 1D Simulé**



# Applications sur vent simulé 1D

Le filtre restitue alors une série estimée.

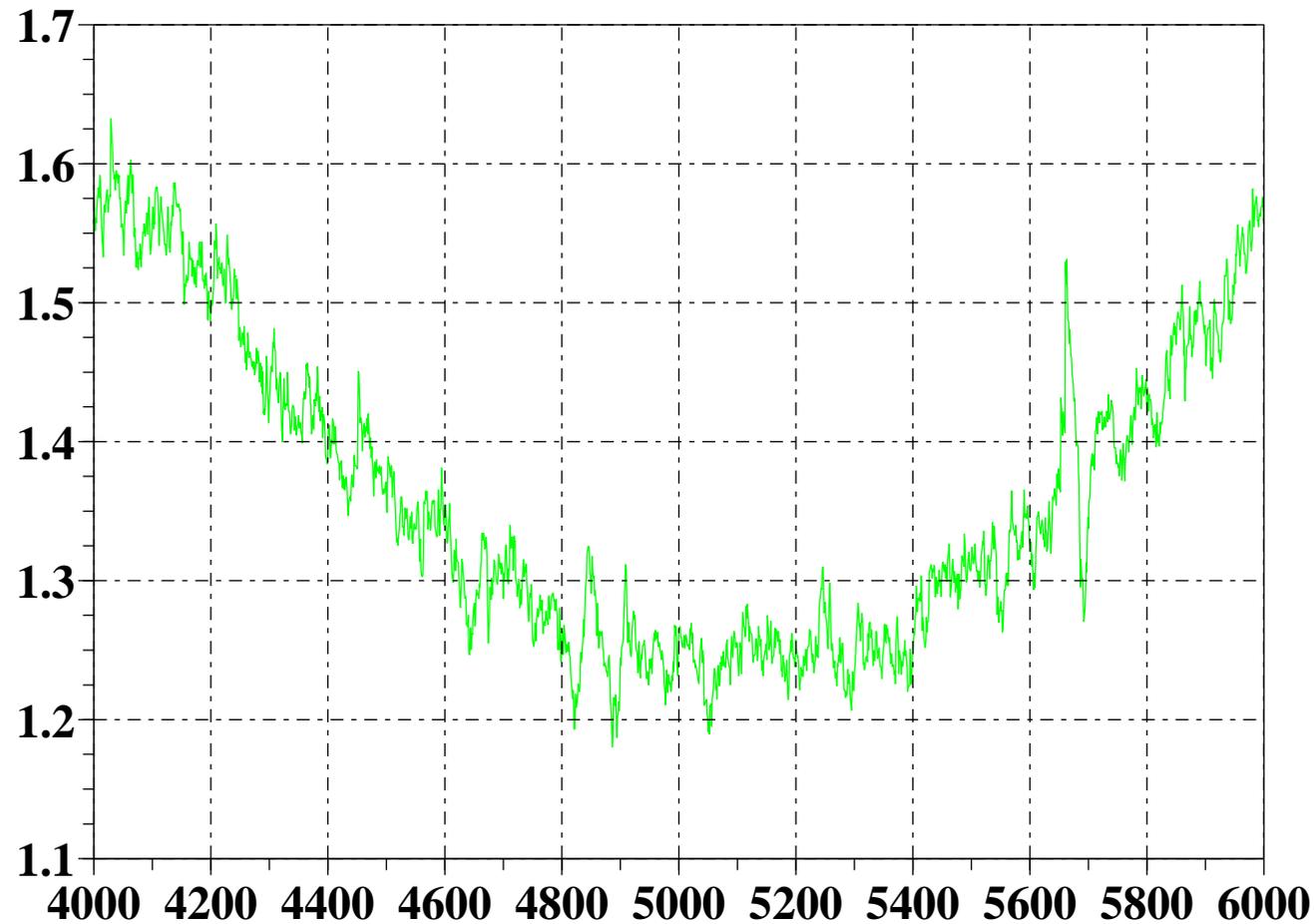
**Filtrage par Algorithme Génétique Vent 1D Simulé**



# Applications sur vent simulé 1D

En zoomant.

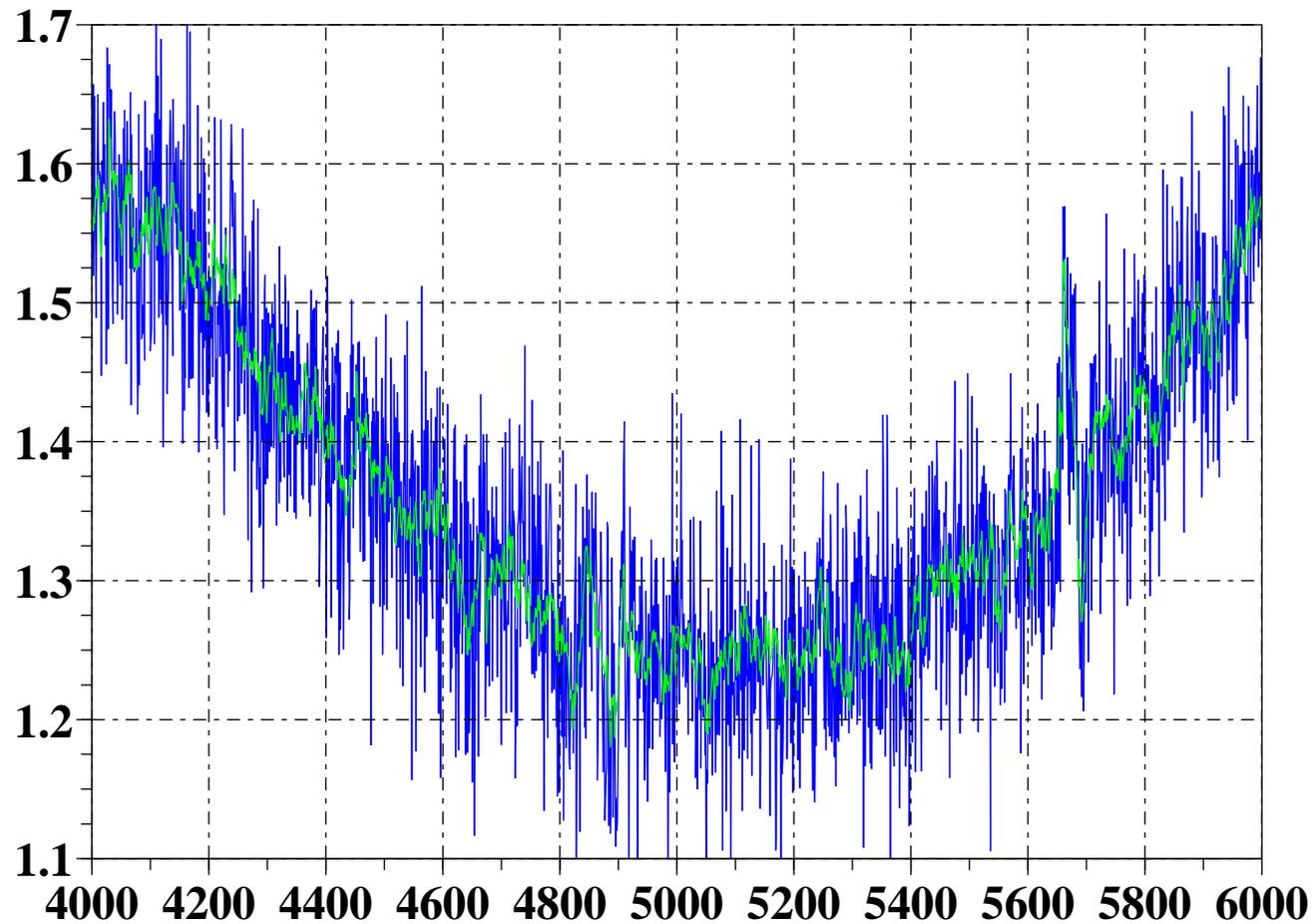
Filtrage par Algorithme Génétique Vent 1D Simulé



# Applications sur vent simulé 1D

En zoomant.

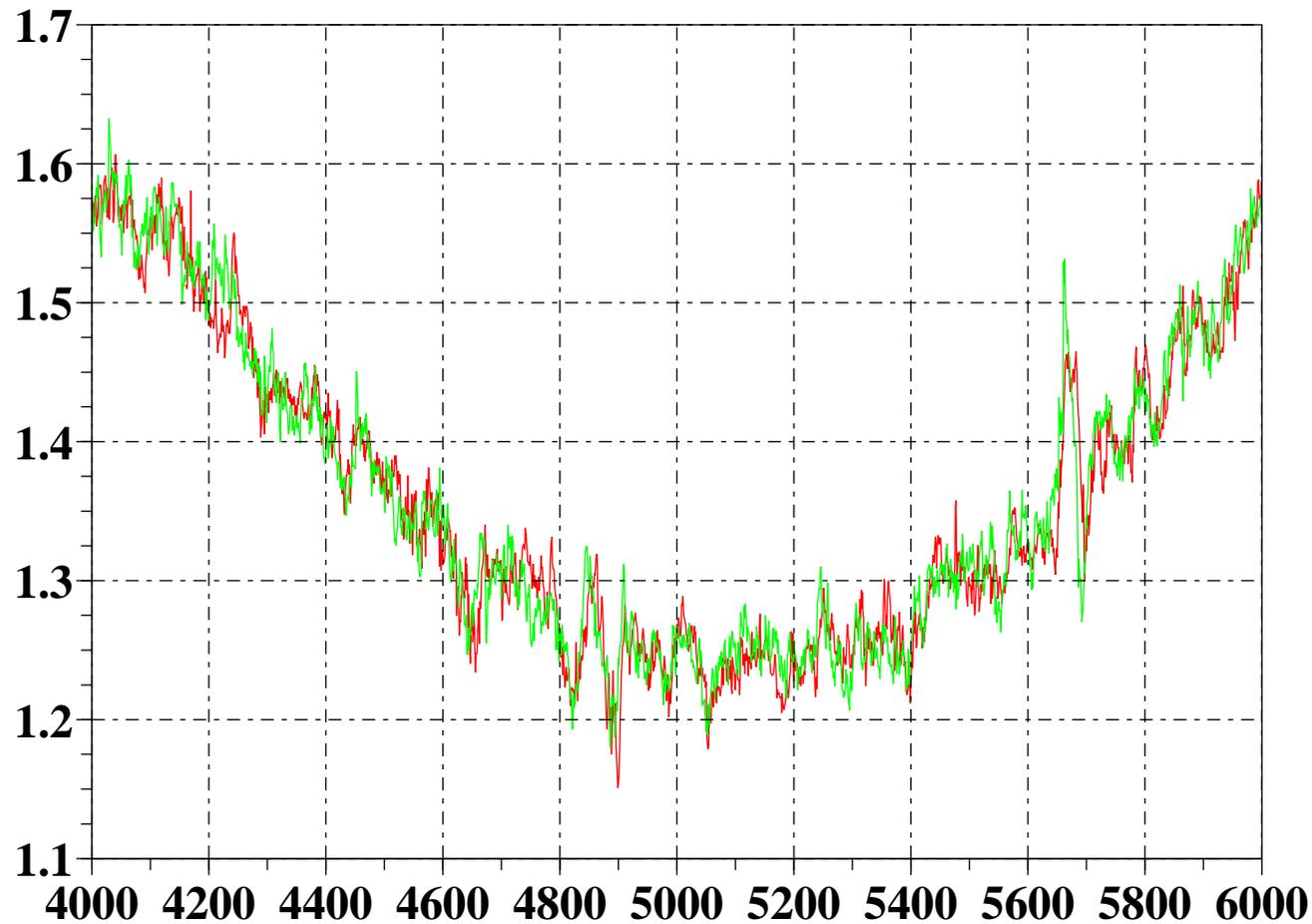
Filtrage par Algorithme Génétique Vent 1D Simulé



# Applications sur vent simulé 1D

En zoomant.

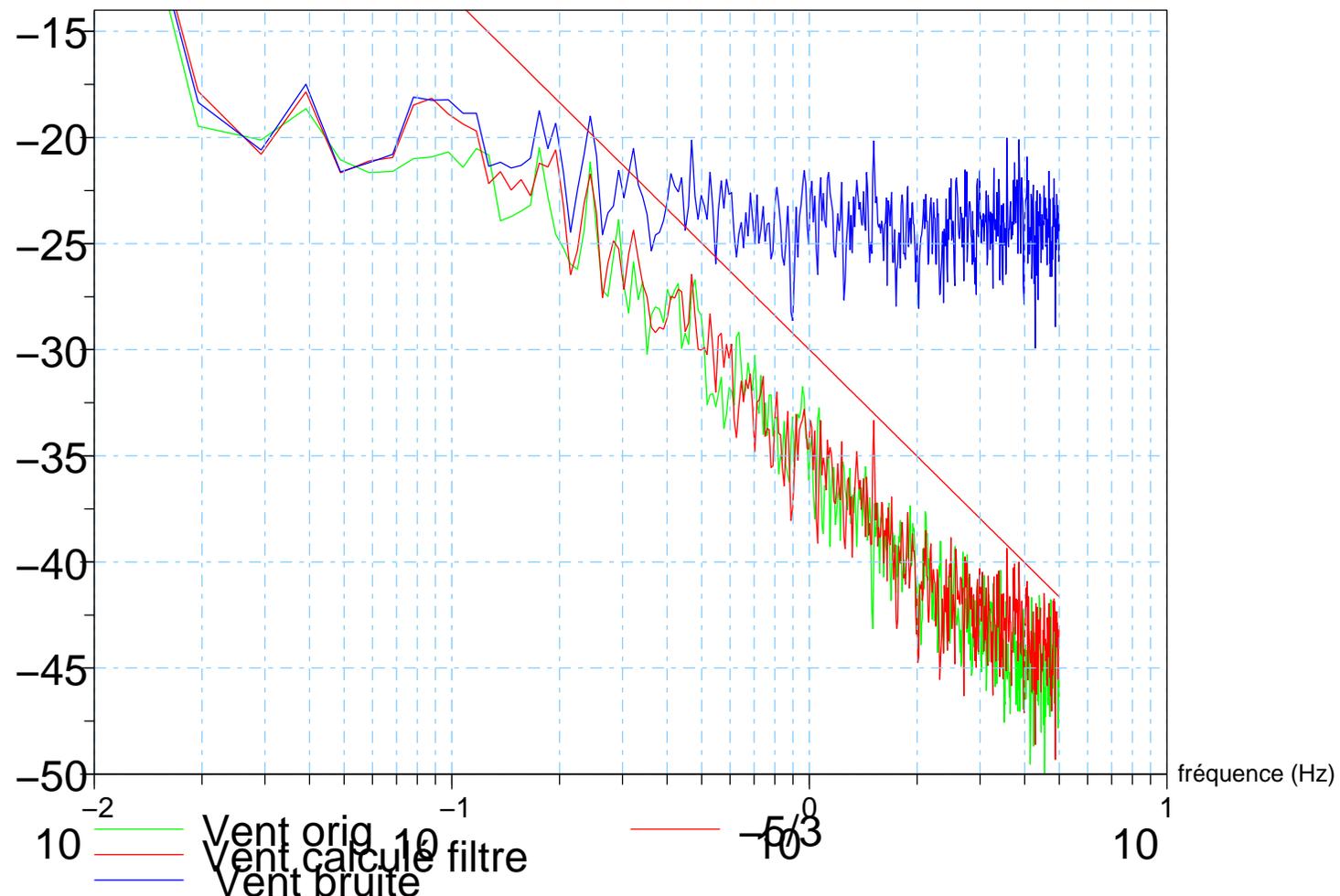
Filtrage par Algorithme Génétique Vent 1D Simulé



# Applications sur vent simulé 1D

Les spectres de puissances associés.

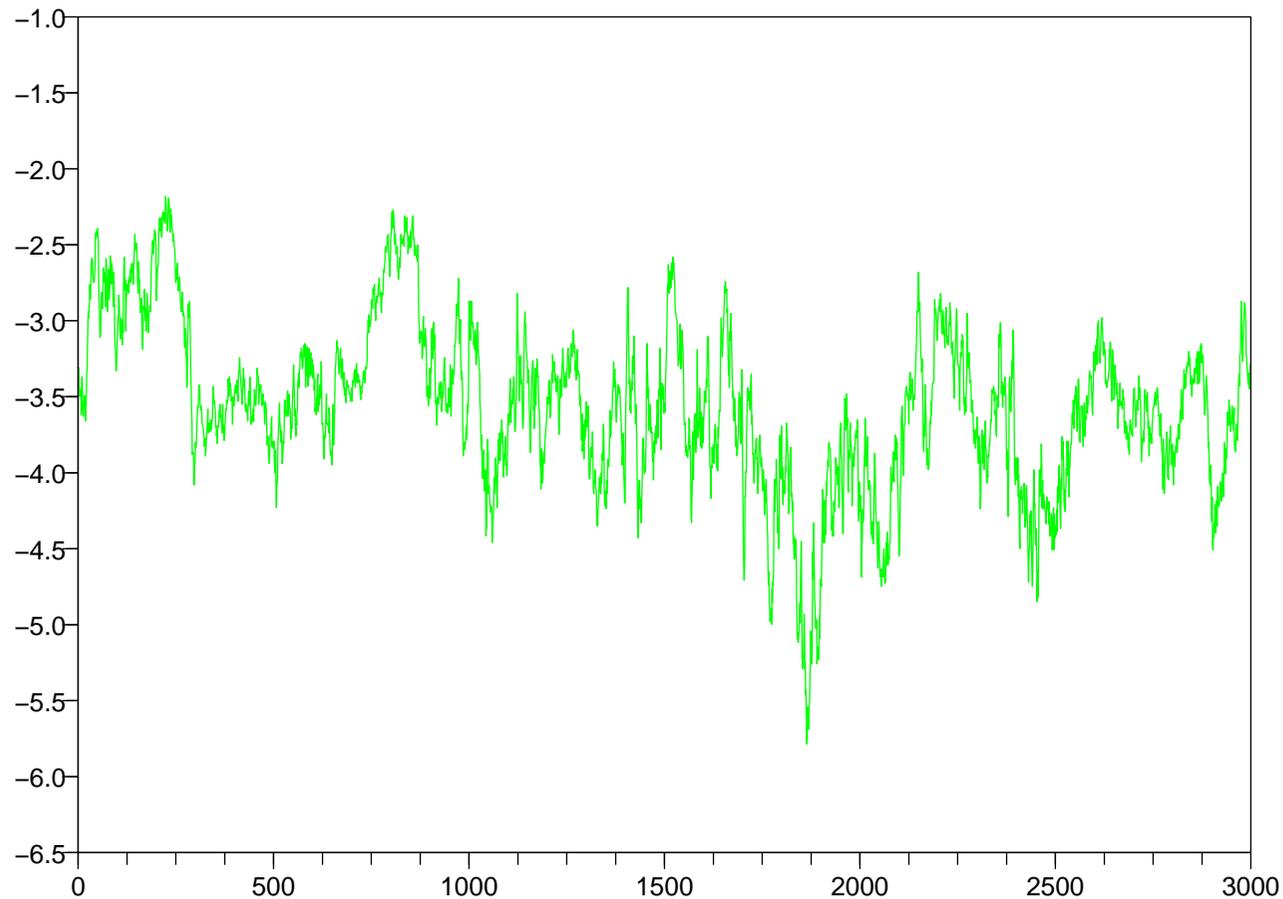
Densité Spectrale de Puissance Vent composante, 1024 points



# **Applications à des mesures réelles bruitées artificiellement**

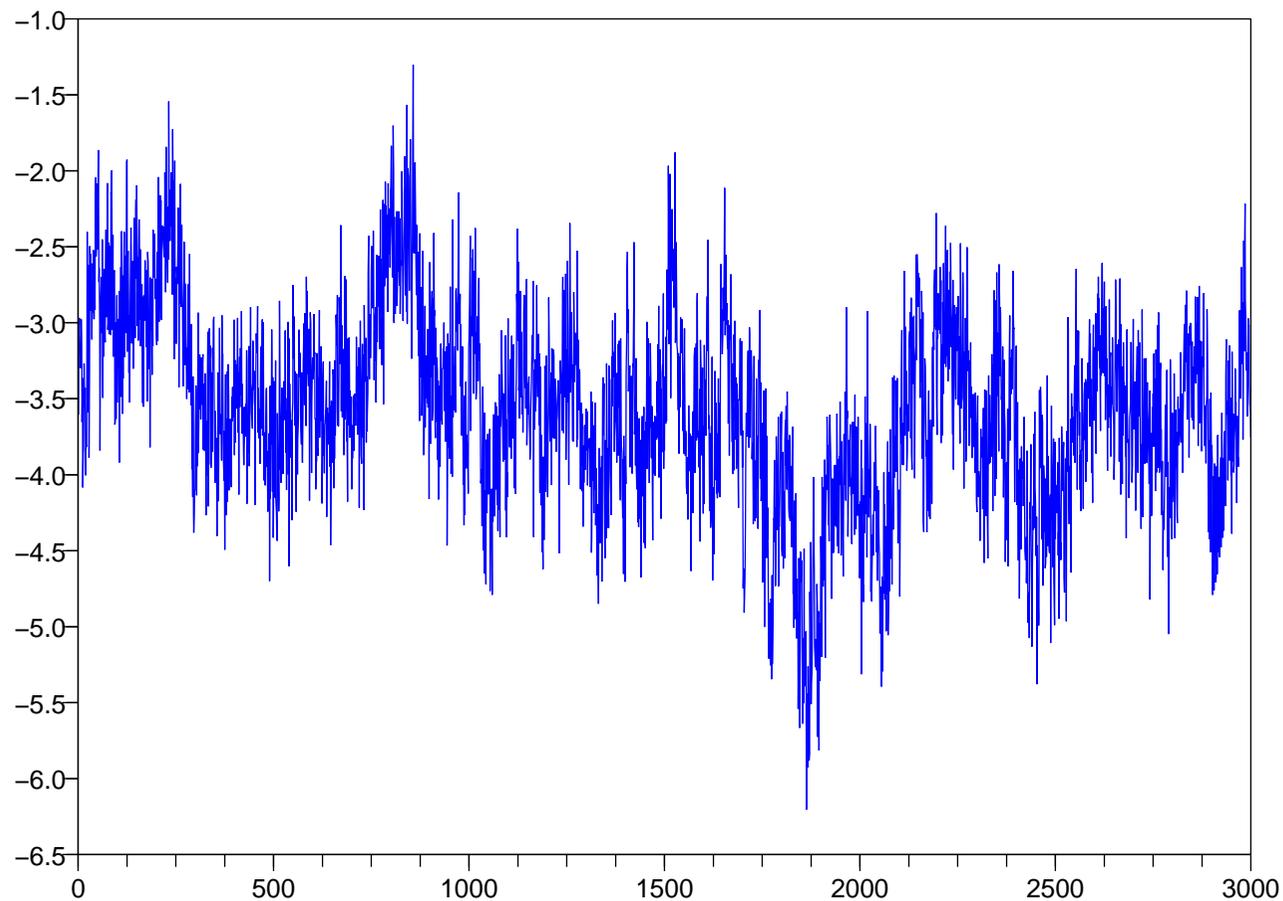
# Applications sur vent réel

Exemple 1- Vent réel échantillonné à 25 Hz avec bruits blancs artificiels.



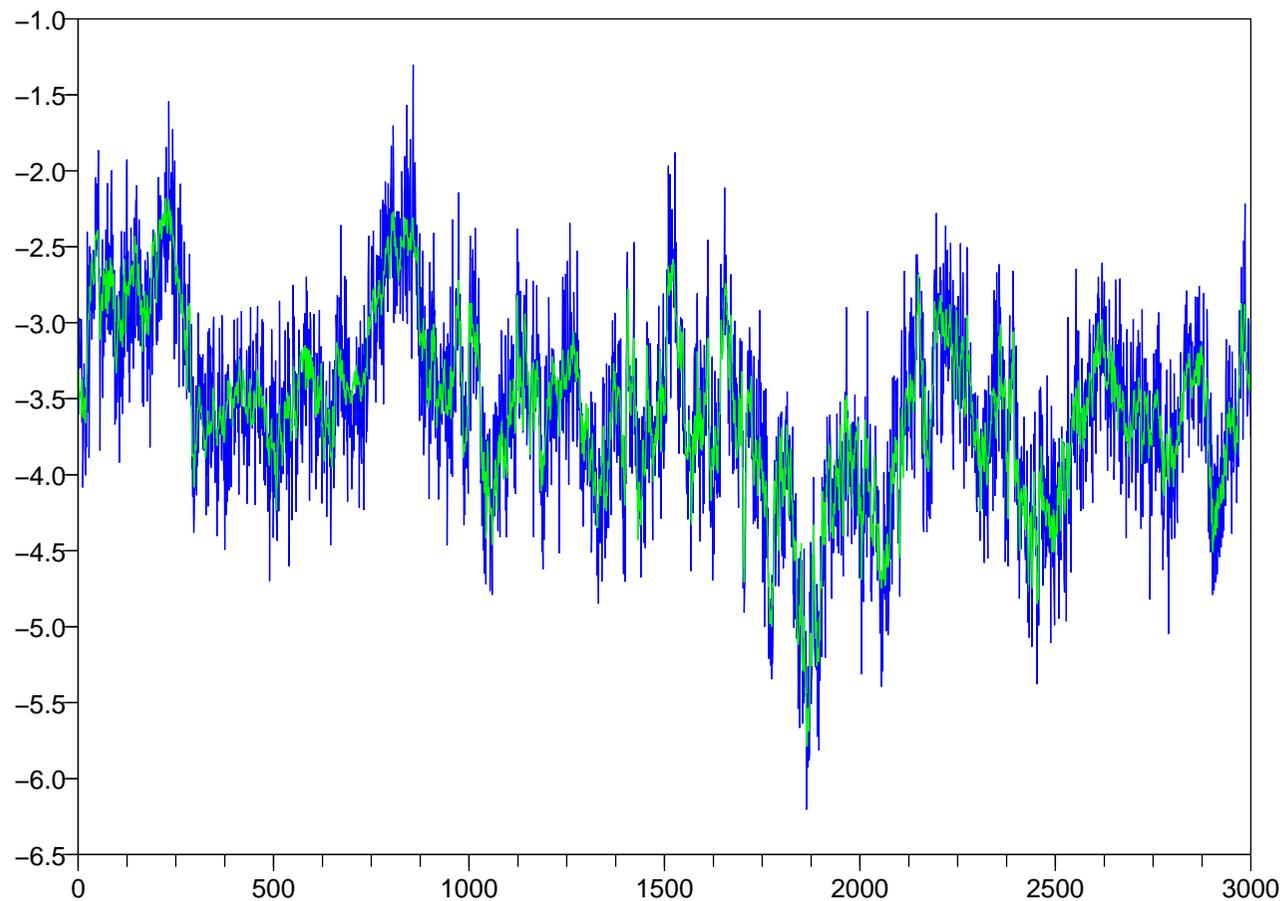
# Applications sur vent réel

Exemple 1- Vent réel échantillonné à 25 Hz avec bruits blancs artificiels.



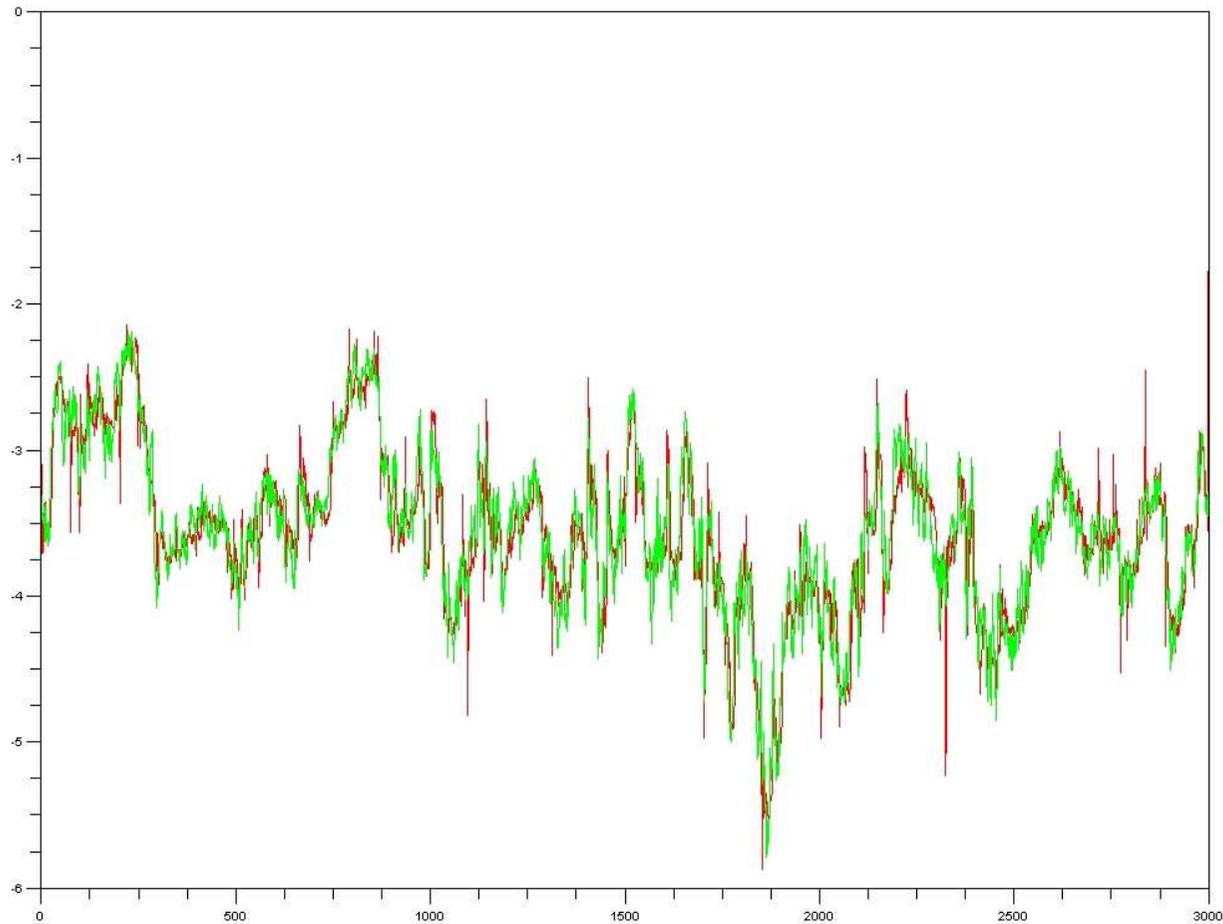
# Applications sur vent réel

Exemple 1- Vent réel échantillonné à 25 Hz avec bruits blancs artificiels.



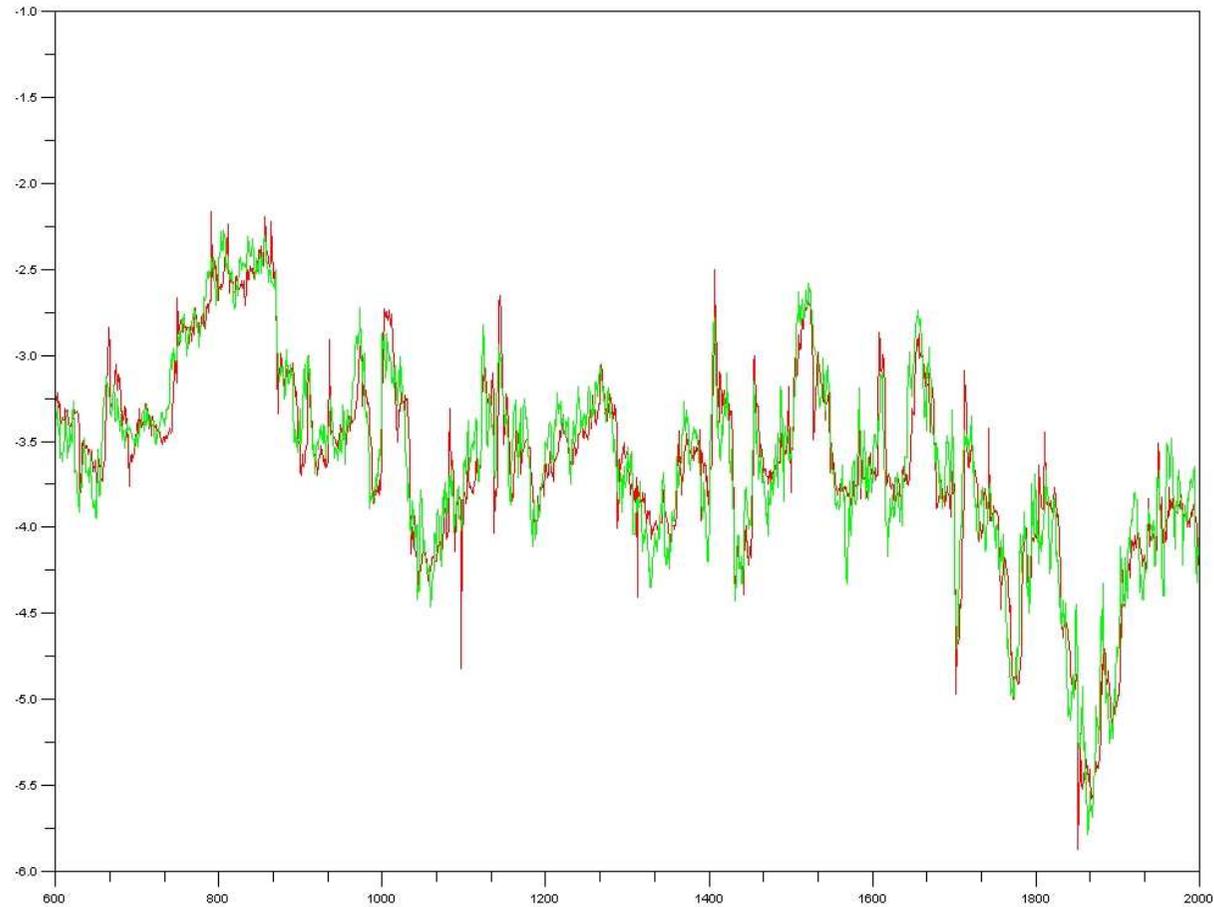
# Applications sur vent réel

Filtrage particulaire avec sélection génétique, 700 particules.



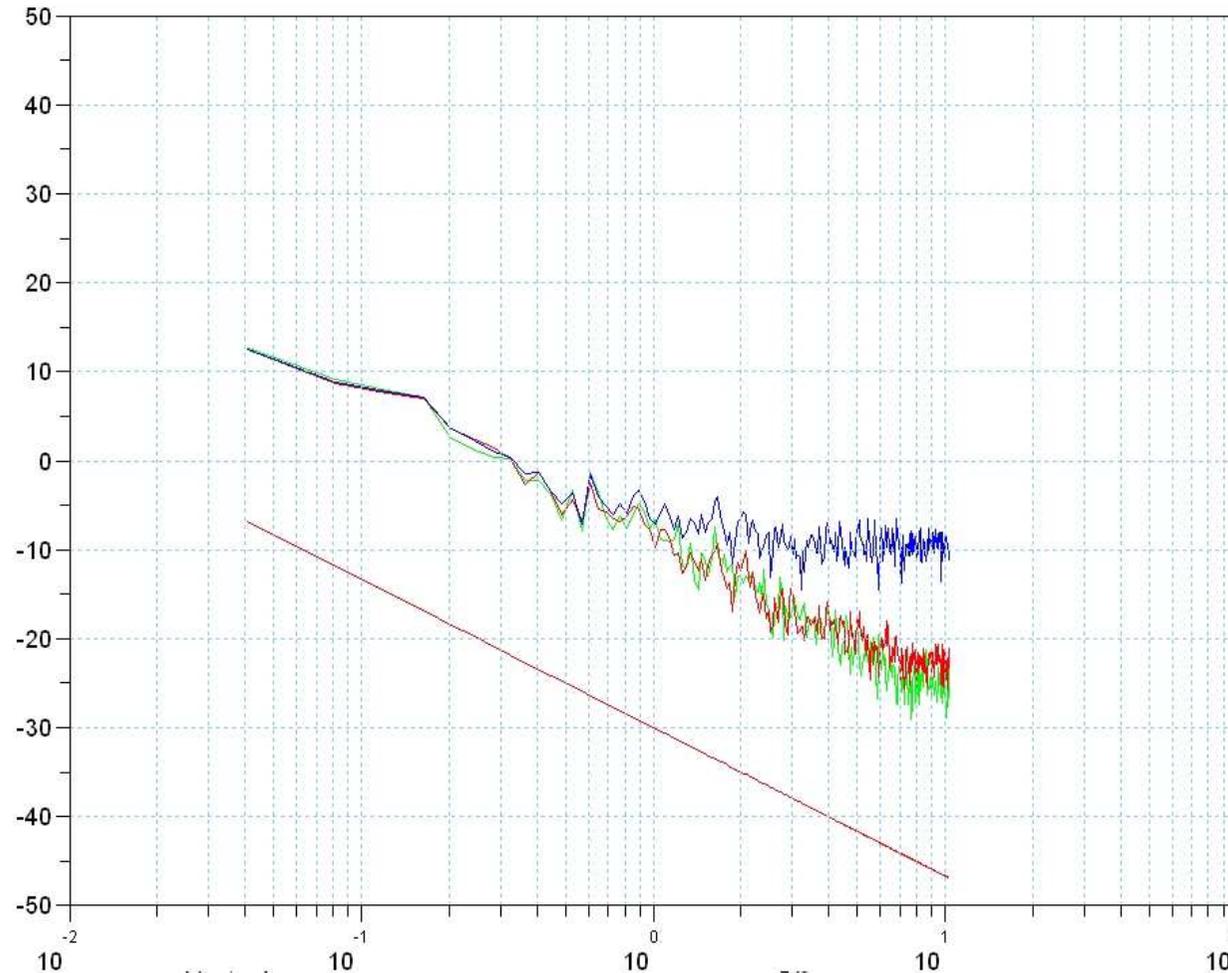
# Applications sur vent réel

Zoom sur le graphique précédent.



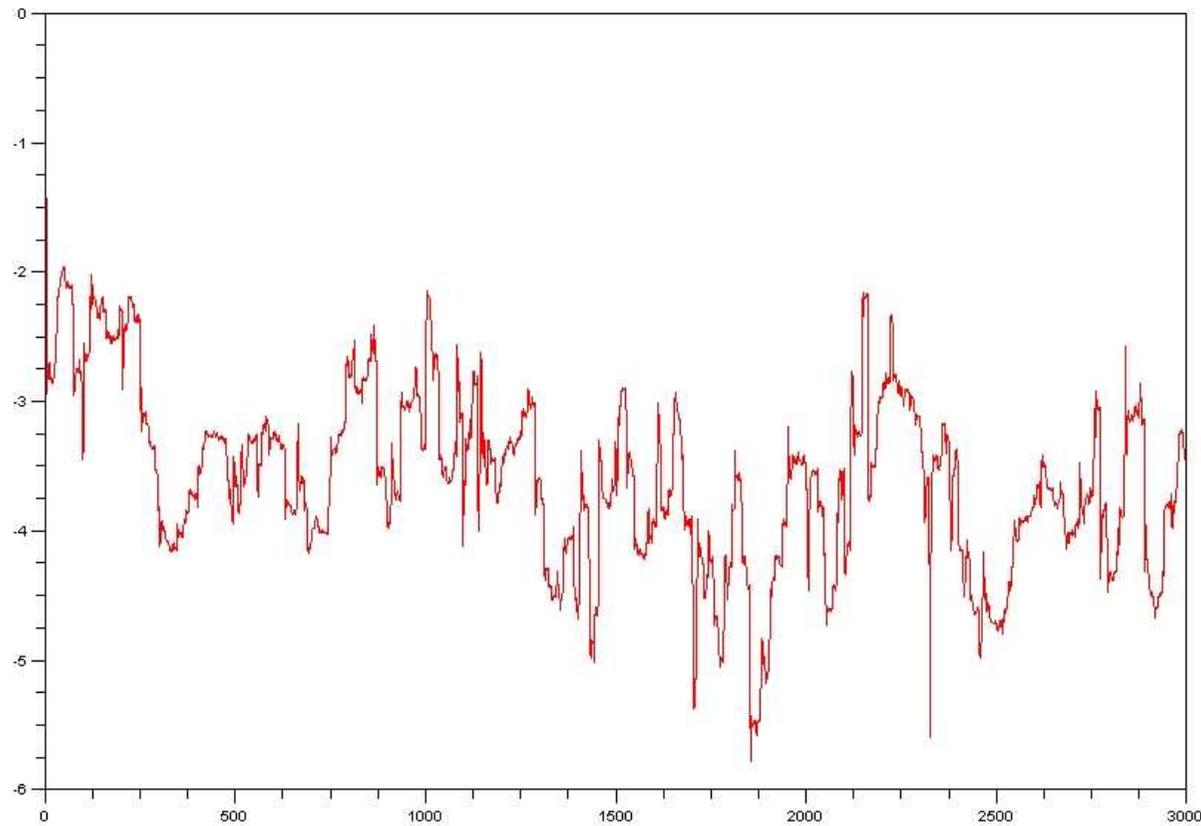
# Applications sur vent réel

Spectres des puissances vent réel, bruité et filtré.



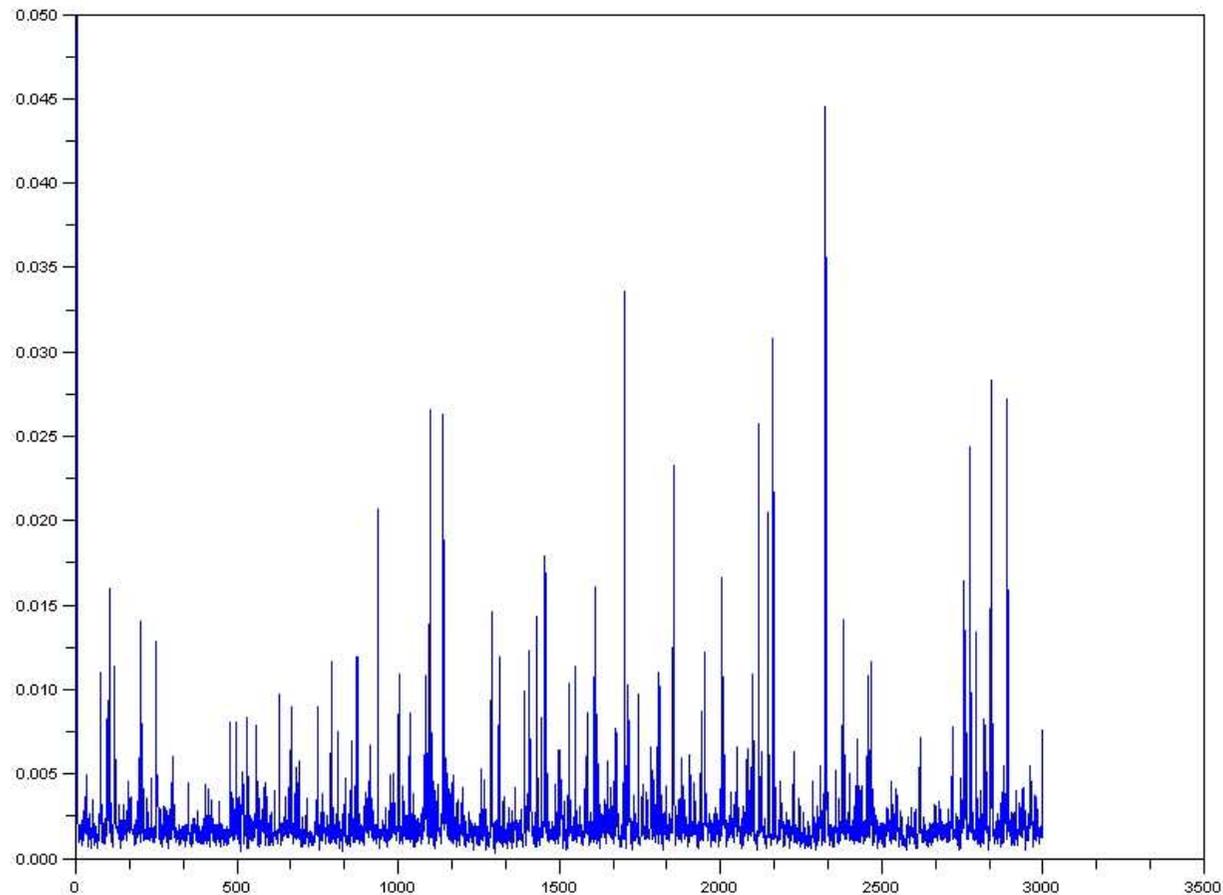
# Applications sur vent réel

Restitution des paramètres déduits du modèle.  
Le gradient de pression moyen local.



# Applications sur vent réel

Restitution des paramètres déduits du modèle.  
Le taux de dissipation turbulente.



# Applications sur vent réel

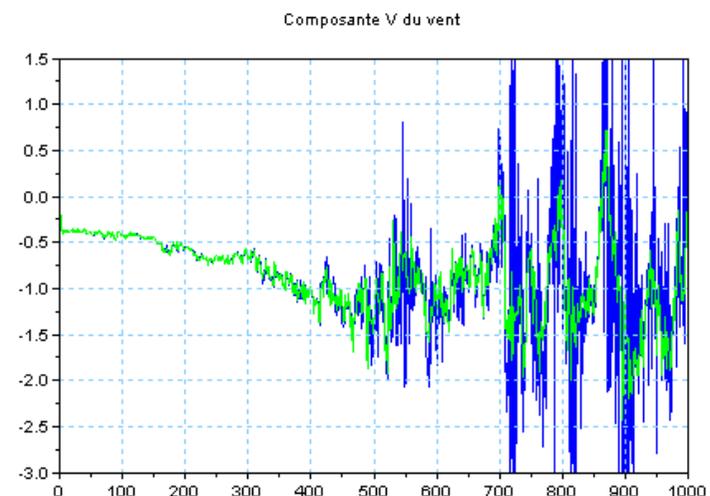
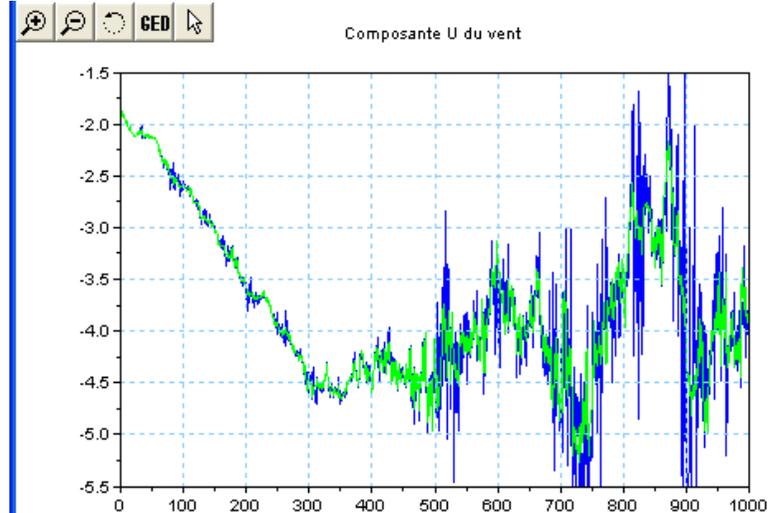
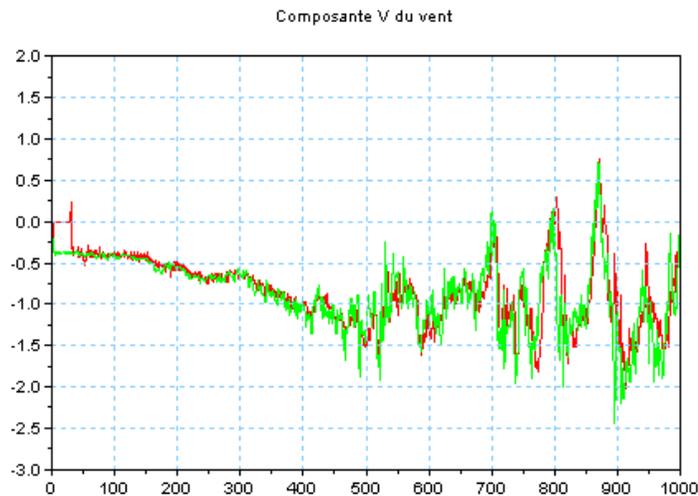
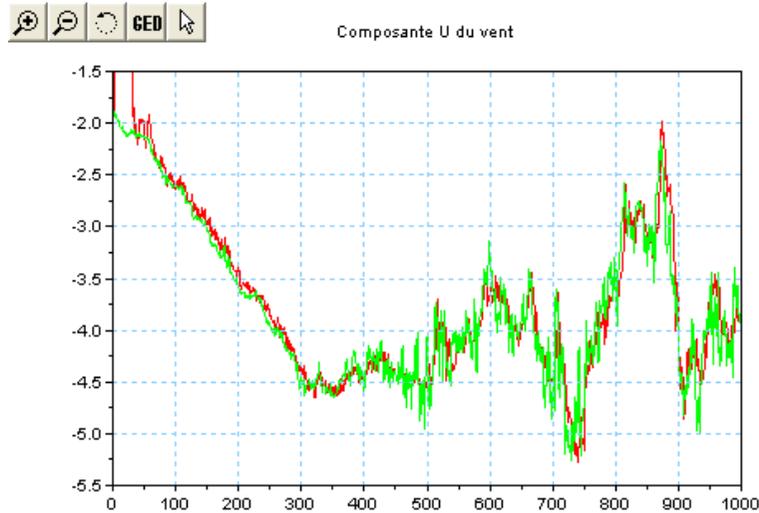
Exemple 2- Vent 2D réel avec bruit gaussien fonction de la variance du signal.

Le bruit est fonction de la turbulence.

Données du 26 Juillet 2006, à 19h20 échantillonnées à 5Hz.

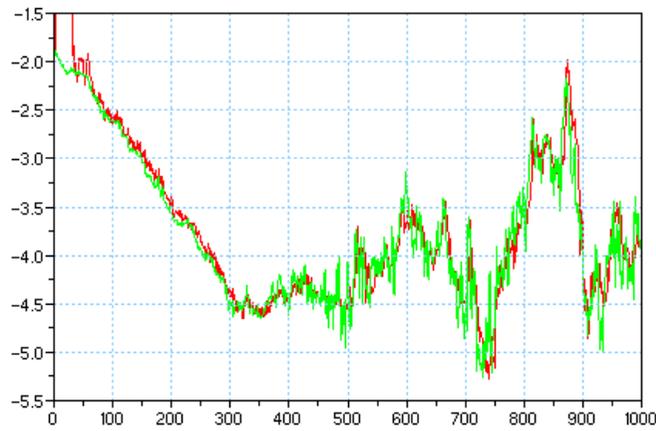
Algorithme particulière utilisant 300 particules.

# Applications sur vent réel

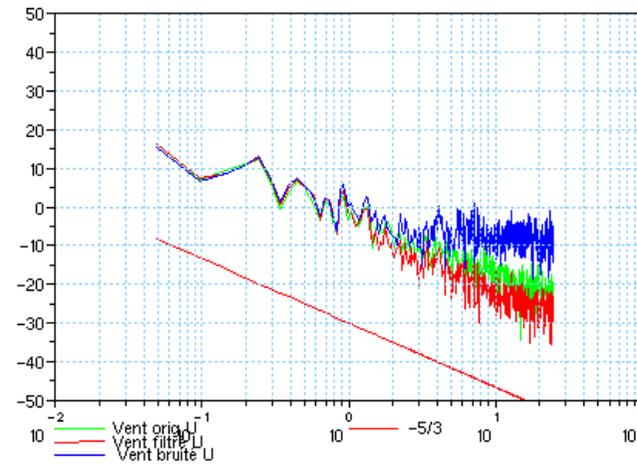


# Applications sur vent réel

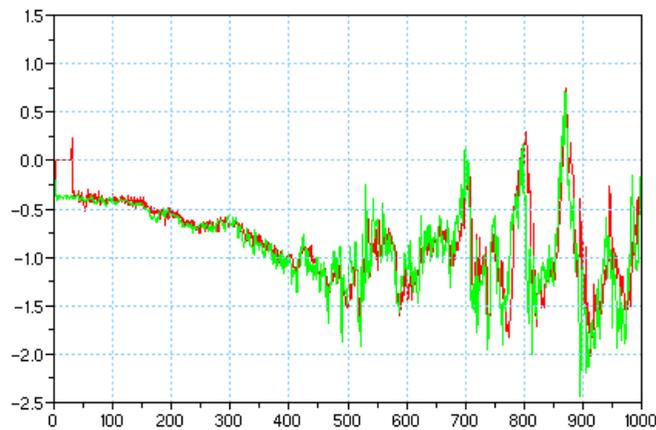
Composante U du vent



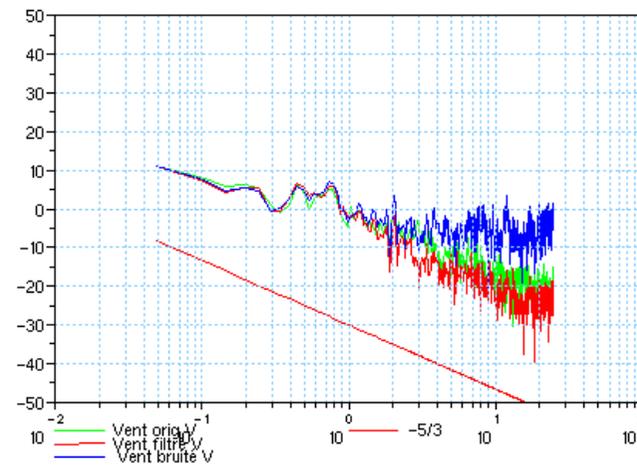
DSP U du vent



Composante V du vent



DSP V du vent



# Applications à des mesures 3D réelles bruitées artificiellement

# Modèle 3D atmosphérique

- Pour passer en 3D avec des données atmosphériques, il faut modifier le modèle pour qu'il soit plus géophysique.
- On utilisera le modèle proposé par Das & Durbin:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 dV_{h,t} = -\nabla_h \langle p \rangle .dt - \frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} (V_{h,t} - \langle V \rangle_{h,t}) .dt \\
 \quad + (C_{2\theta} - 1) .(W_t - \langle W \rangle_t) . \frac{d\langle V \rangle_{h,t}}{dz} .dt \\
 \quad + (C_0 . \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^{V_h} \\
 dW_t = d\langle W \rangle_t - \frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} (W_t - \langle W \rangle_t) .dt \\
 \quad + (1 - C_{5\theta}) . \beta . g . (\theta_t - \langle \theta \rangle_t) .dt + (C_0 . \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^W \\
 d\theta_t = d\langle \theta \rangle_t - \left( C_{1\theta} - \frac{C_1}{2} \right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (\theta_t - \langle \theta \rangle_t) .dt \\
 \quad - (W_t - \langle W \rangle_t) . \frac{d\langle \theta \rangle_t}{dz} .dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^\theta
 \end{array} \right.$$

# Applications sur vent réel 3D + Tempé

Vent 3D + Température réel avec bruit gaussien fonction de la variance du signal.

Le bruit est fonction de la turbulence.

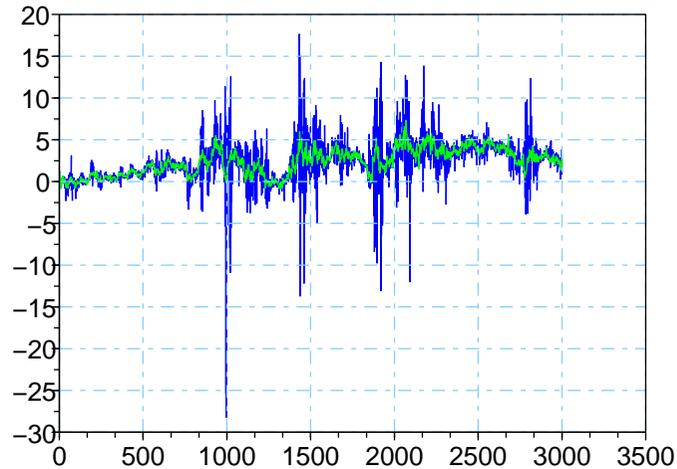
Données du 30 Août 2006, à 17h00 échantillonnées à 5Hz.

Algorithme particulière utilisant 800 particules.

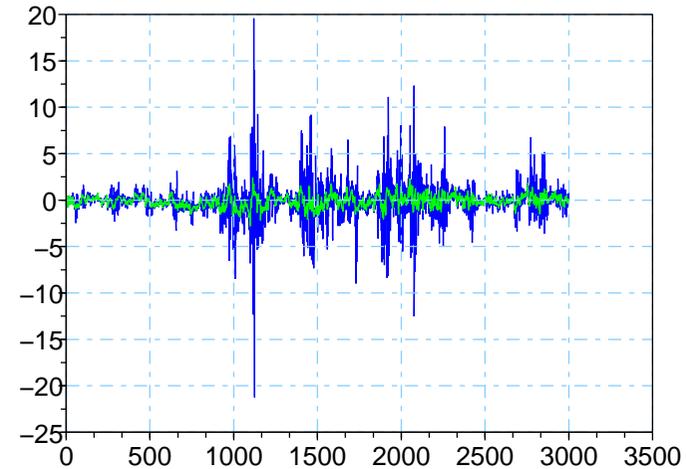
# Applications sur vent réel 3D + Tempé

## Séries des données brutes et bruitées

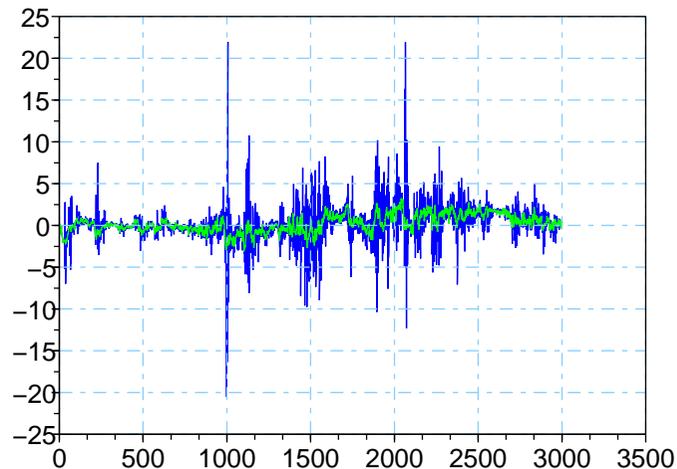
Composante U du vent



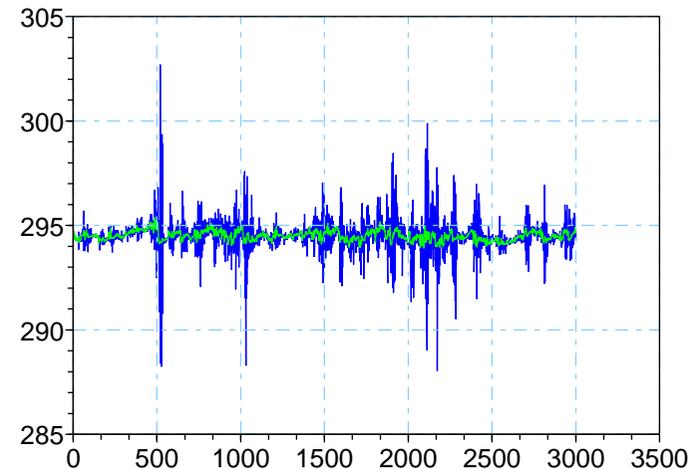
Composante W du vent



Composante V du vent

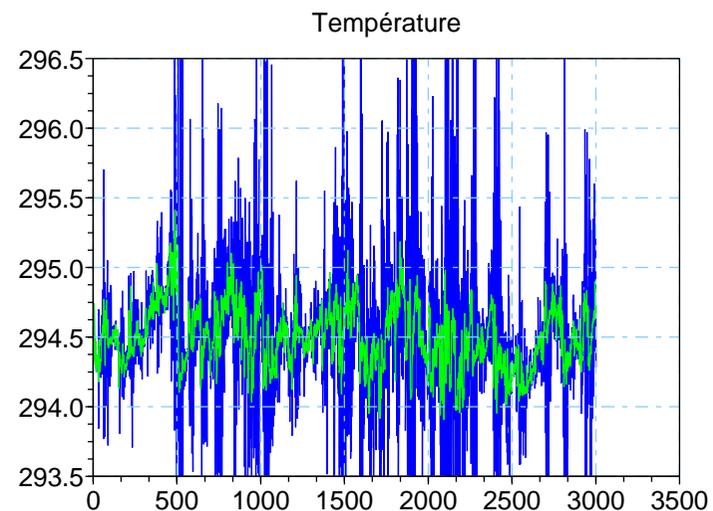
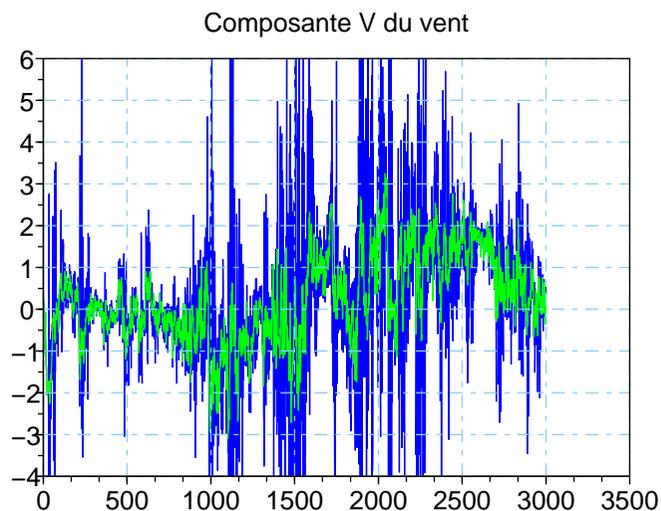
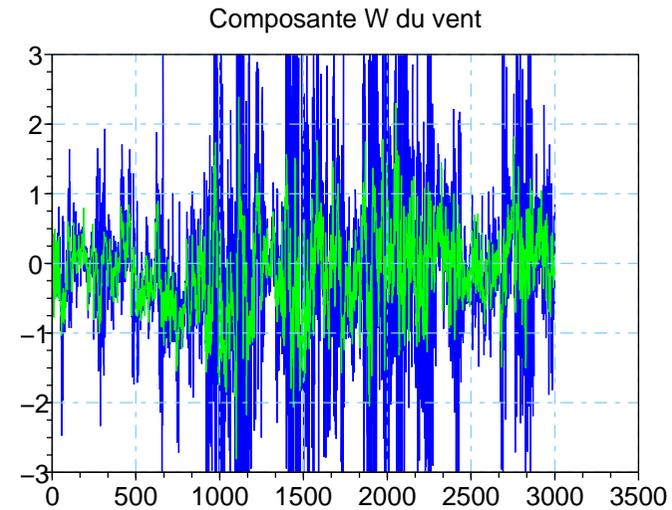
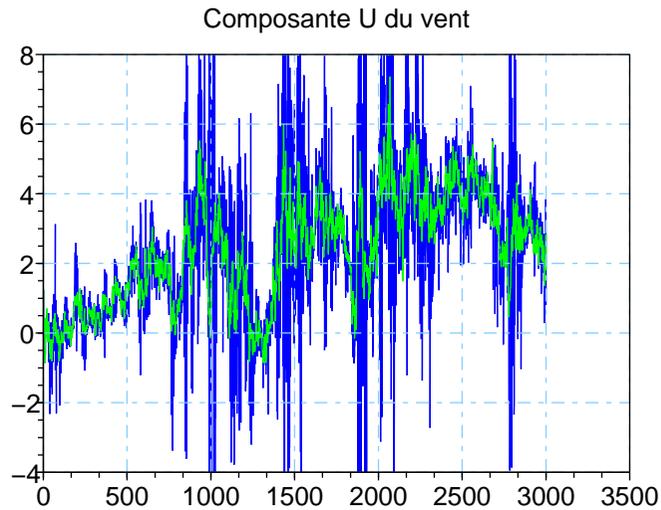


Température



# Applications sur vent réel 3D + Tempé

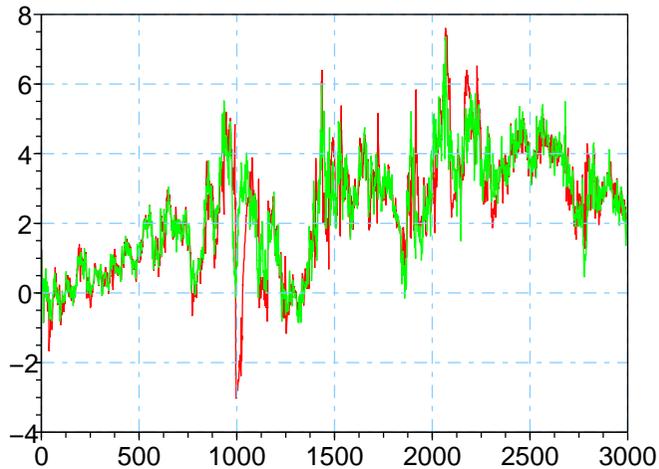
Séries des données brutes et bruitées vues rapprochées



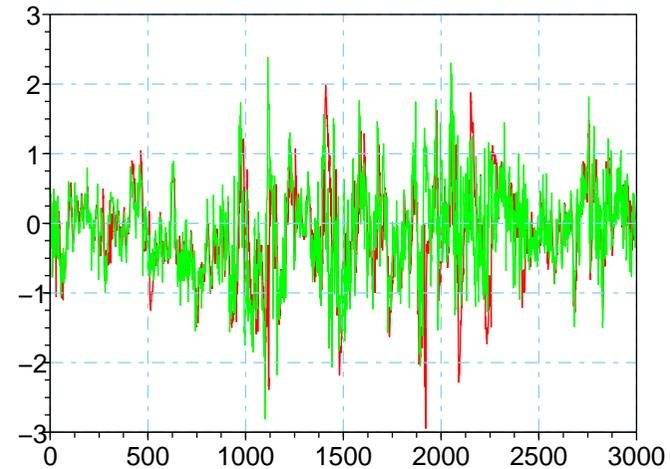
# Applications sur vent réel 3D + Tempé

## Séries des données bruitées et filtrées

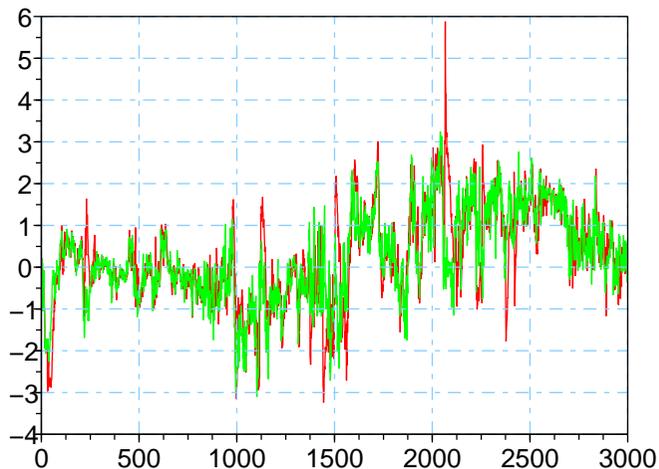
Composante U du vent



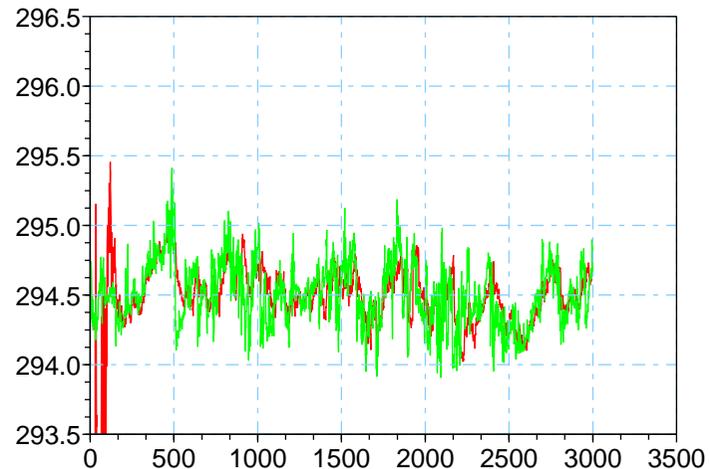
Composante W du vent



Composante V du vent

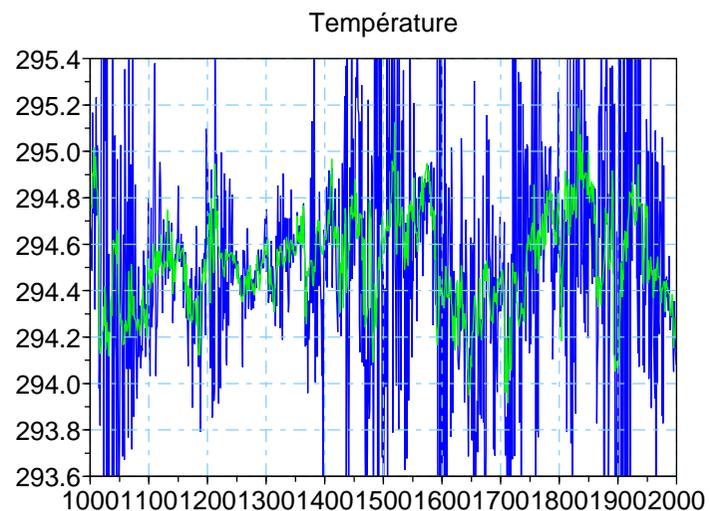
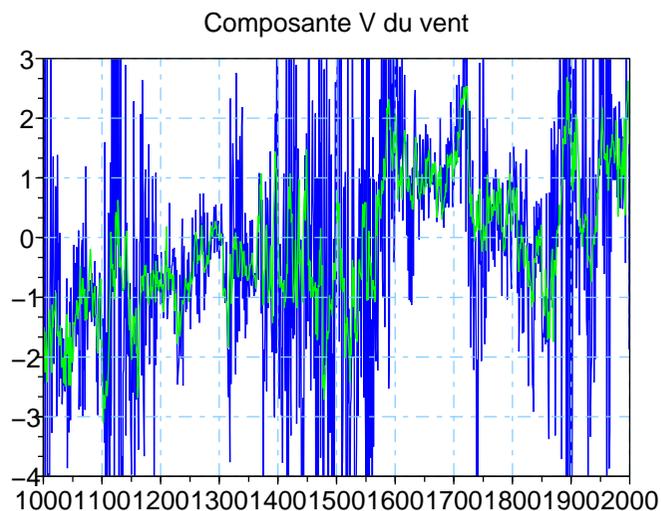
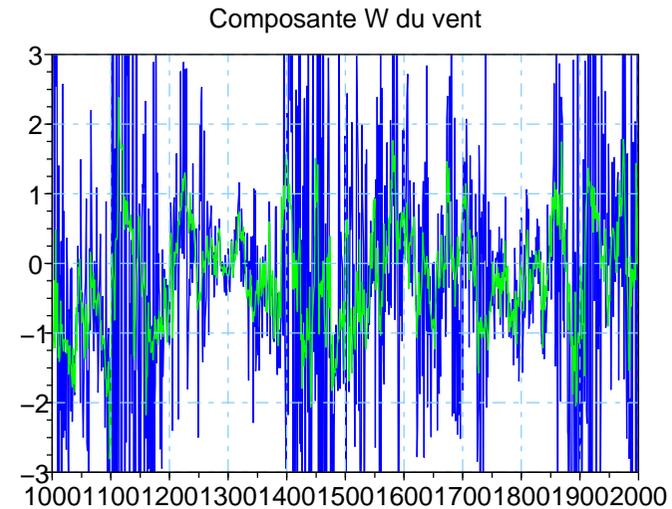
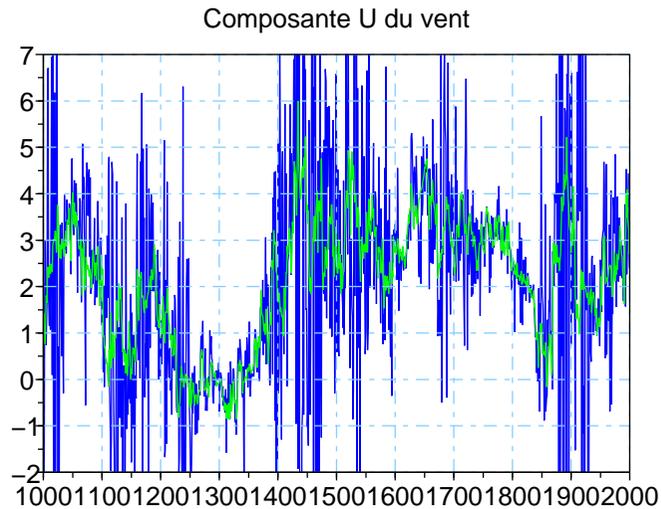


Température



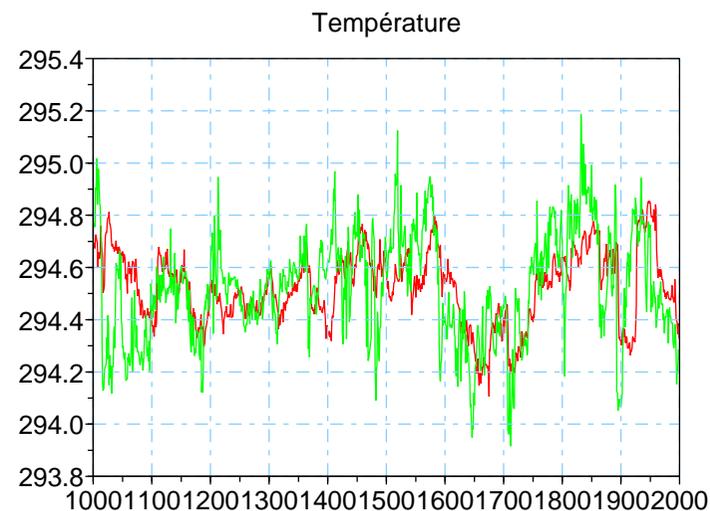
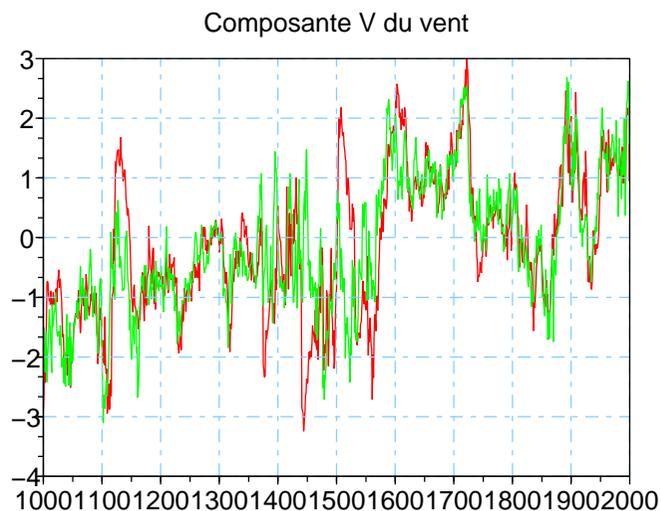
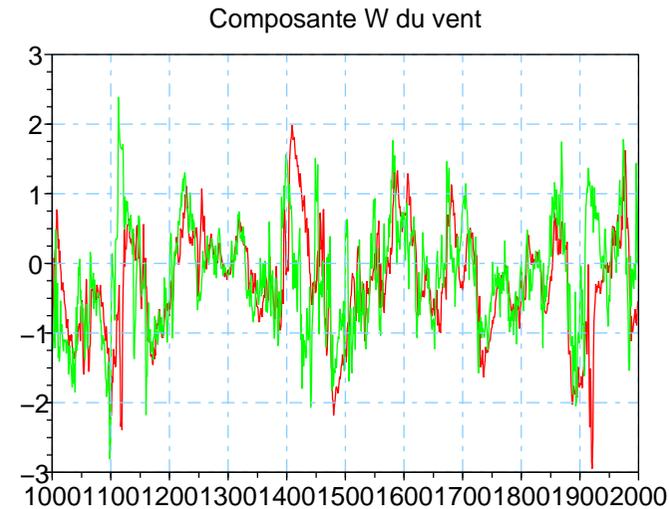
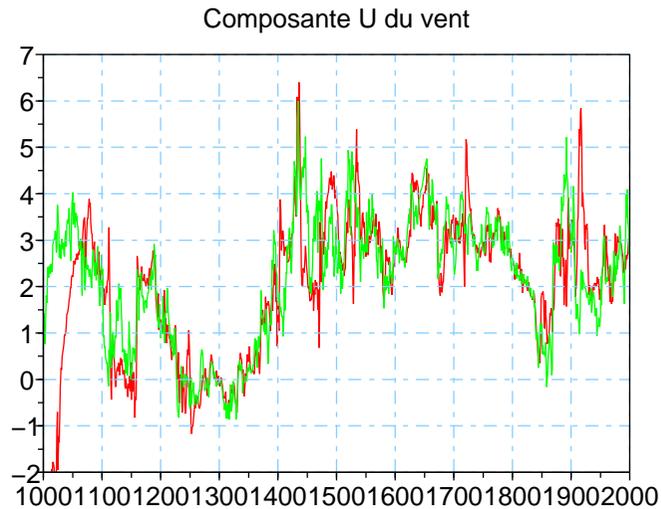
# Applications sur vent réel 3D + Tempé

Séries des données brutes et bruitées sur une période



# Applications sur vent réel 3D + Tempé

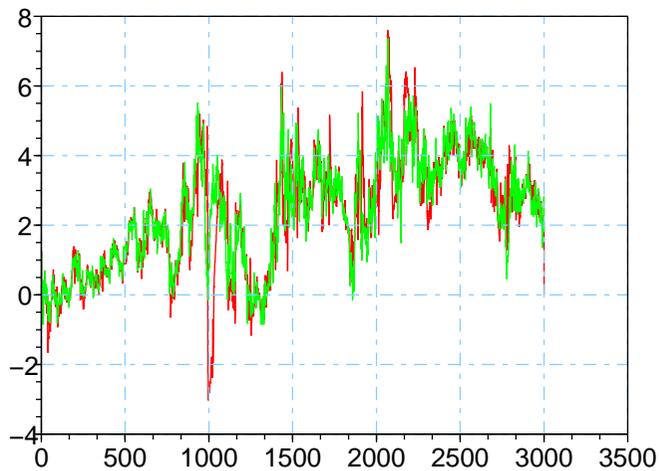
Séries des données bruitées et filtrées sur une période



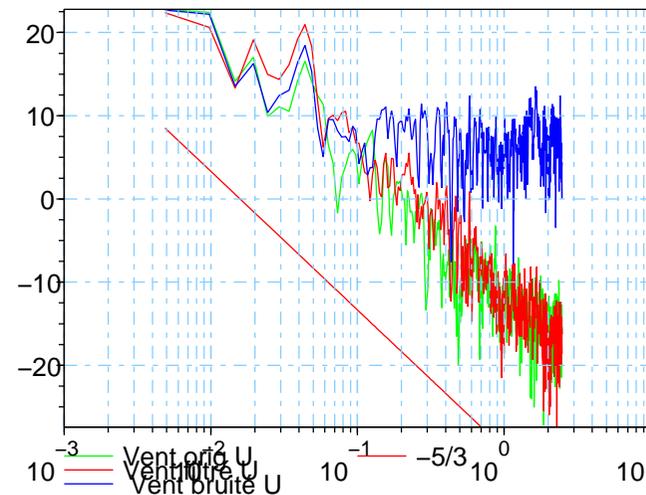
# Applications sur vent réel 3D + Tempé

Séries et spectre de puissance pour les composantes U et V du vent bruités et filtrés

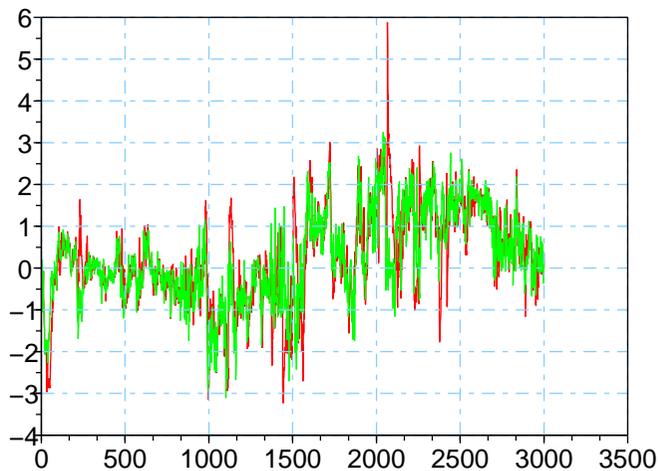
Composante U du vent



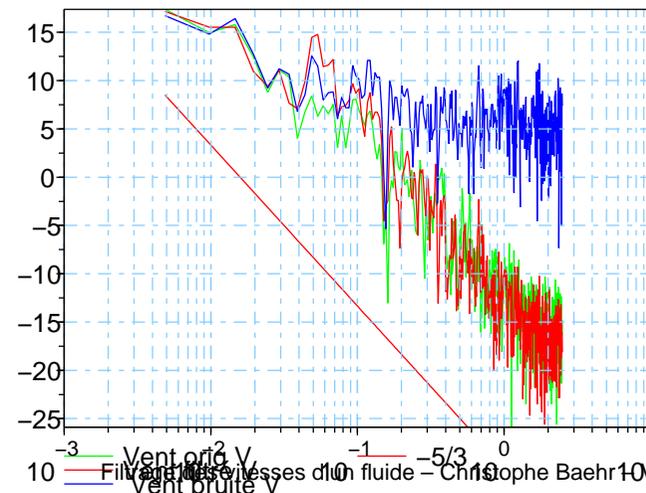
DSP U du vent



Composante V du vent



DSP V du vent

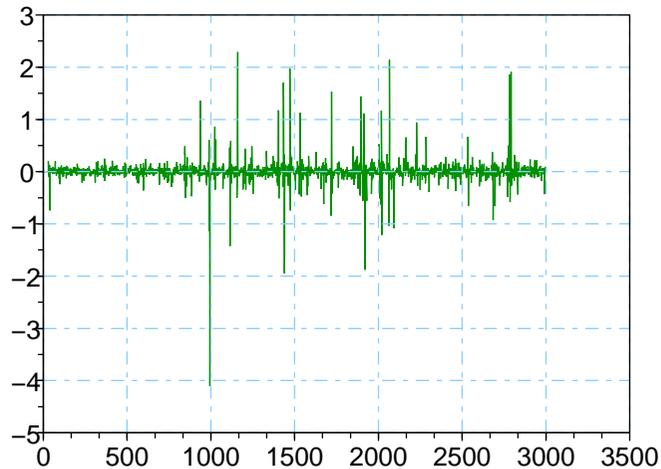




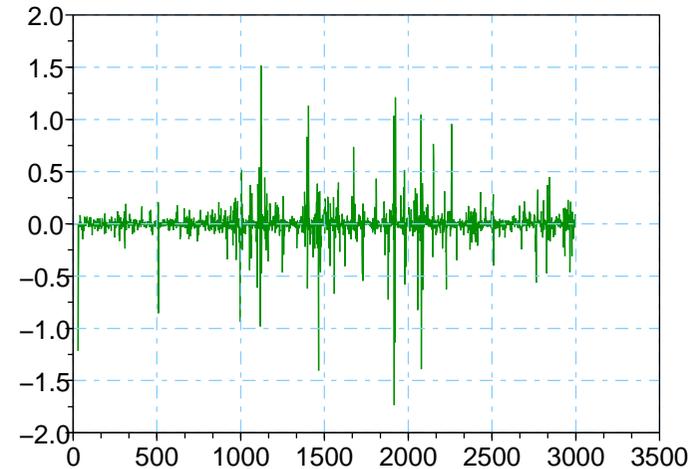
# Applications sur vent réel 3D + Tempé

Séries des variables  $Z_n$  fournies par l'estimateur particulaire

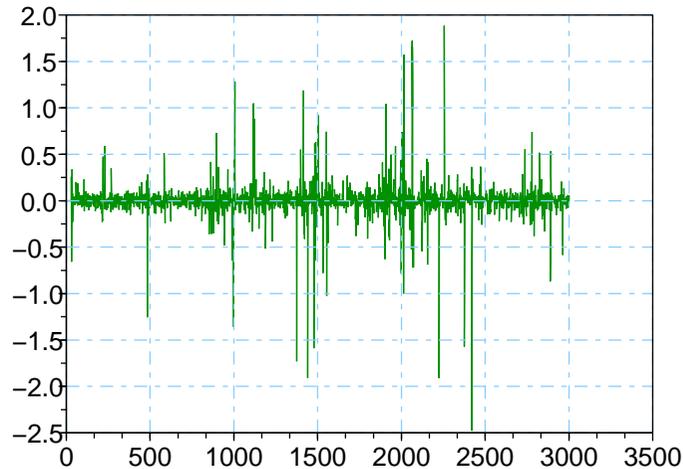
Gradient Pression selon U



Gradient Pression selon V

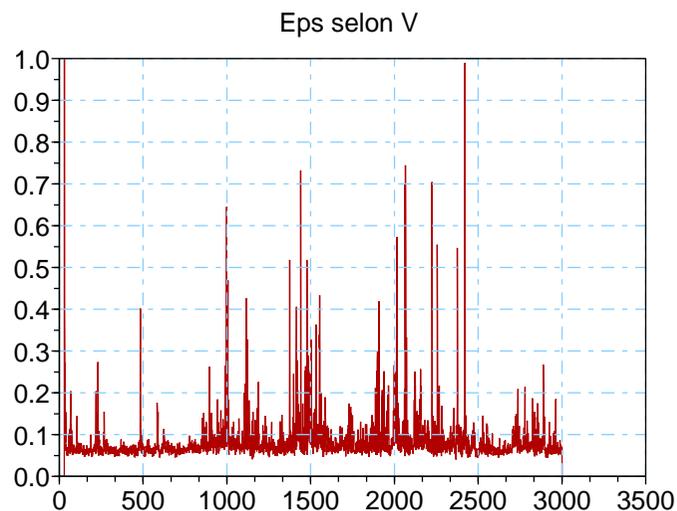
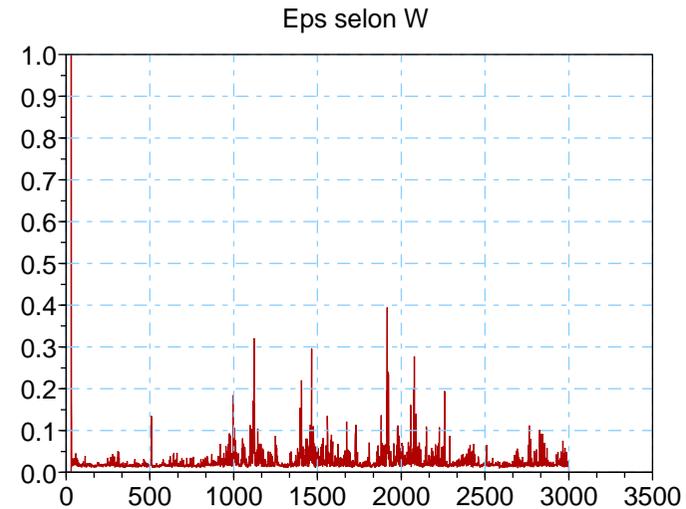
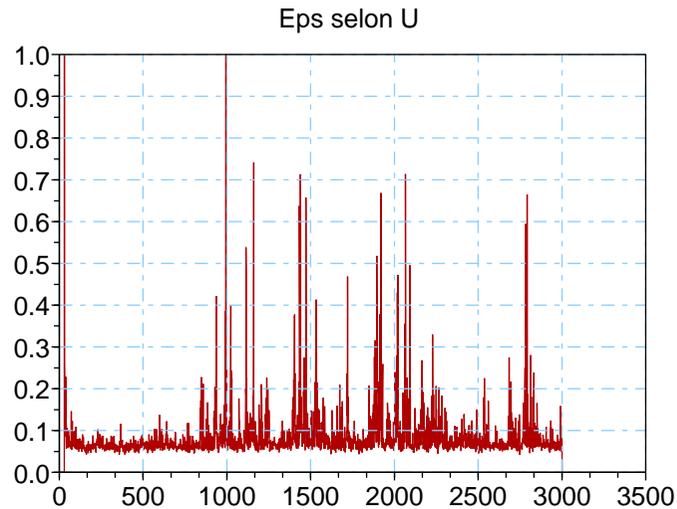


Gradient Pression selon V



# Applications sur vent réel 3D + Tempé

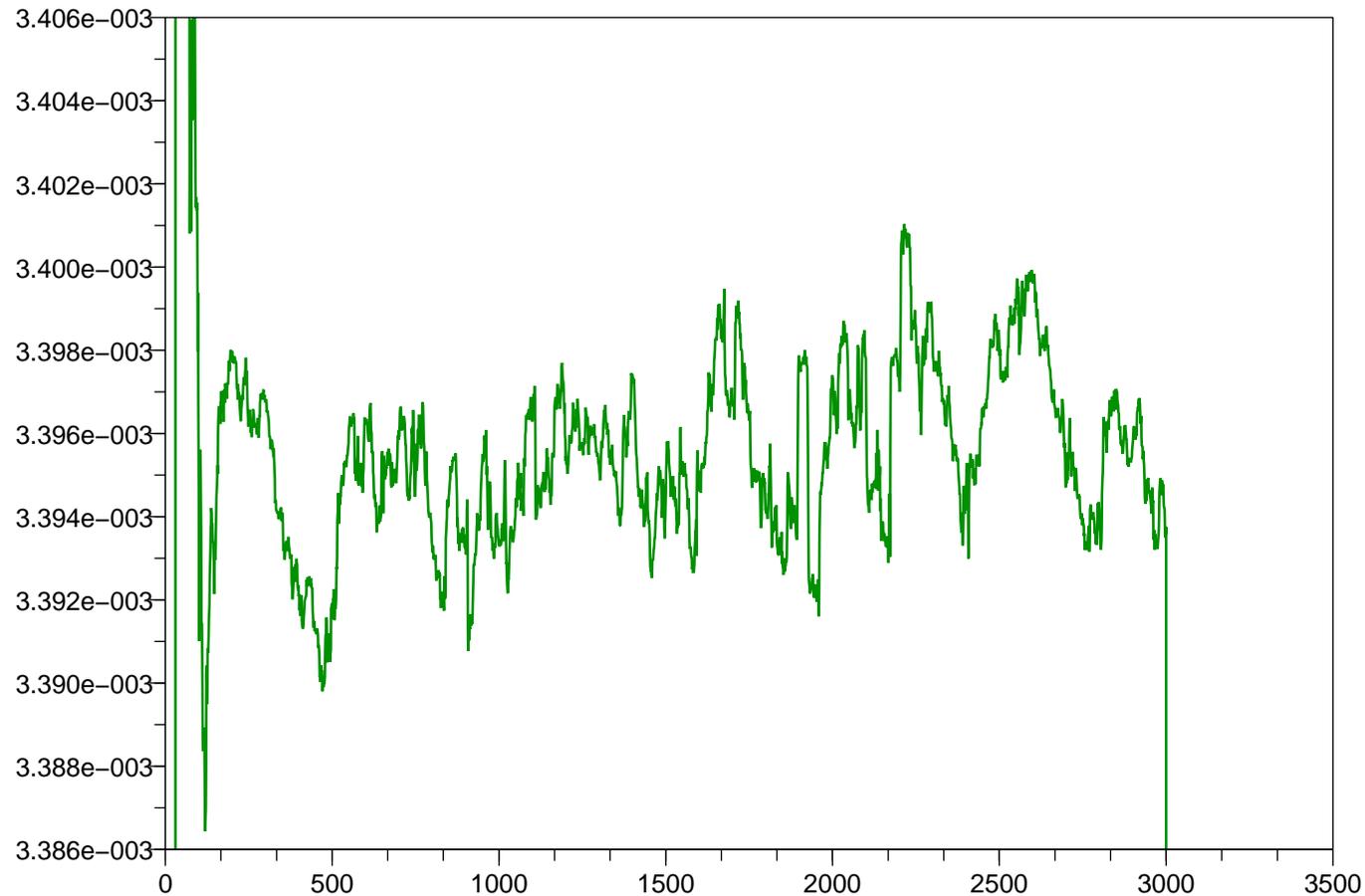
Séries des variables  $\varepsilon_n$  fournies par l'estimateur particulaire



# Applications sur vent réel 3D + Tempé

Série du coefficient de flottabilité fourni par l'estimateur particulaire

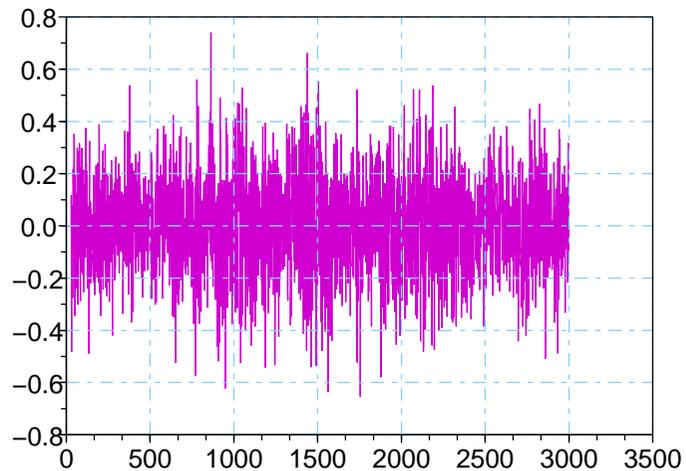
**Flotability coefficient Beta**



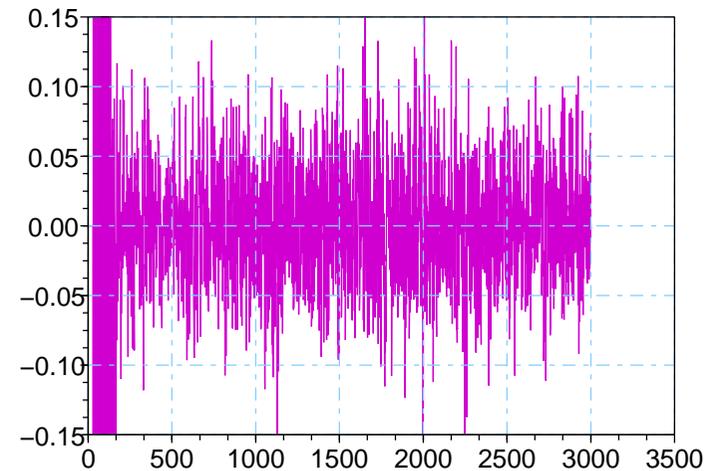
# Applications sur vent réel 3D + Tempé

Séries des gradients verticaux de U, V et T fournis par l'estimateur particulaire

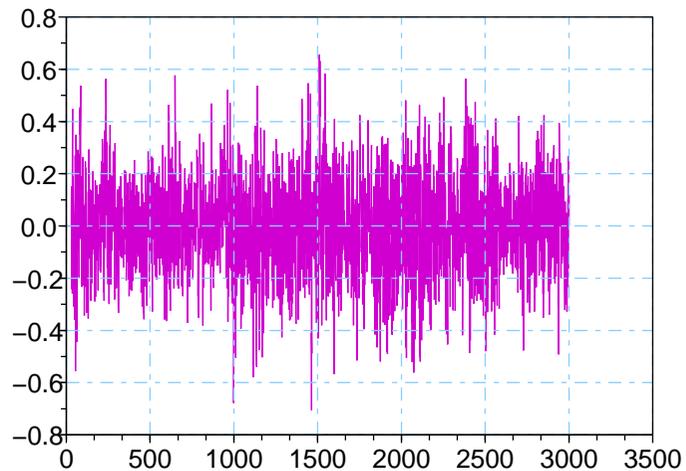
Gradient vertical eulerien pour U



Gradient vertical eulerien pour T

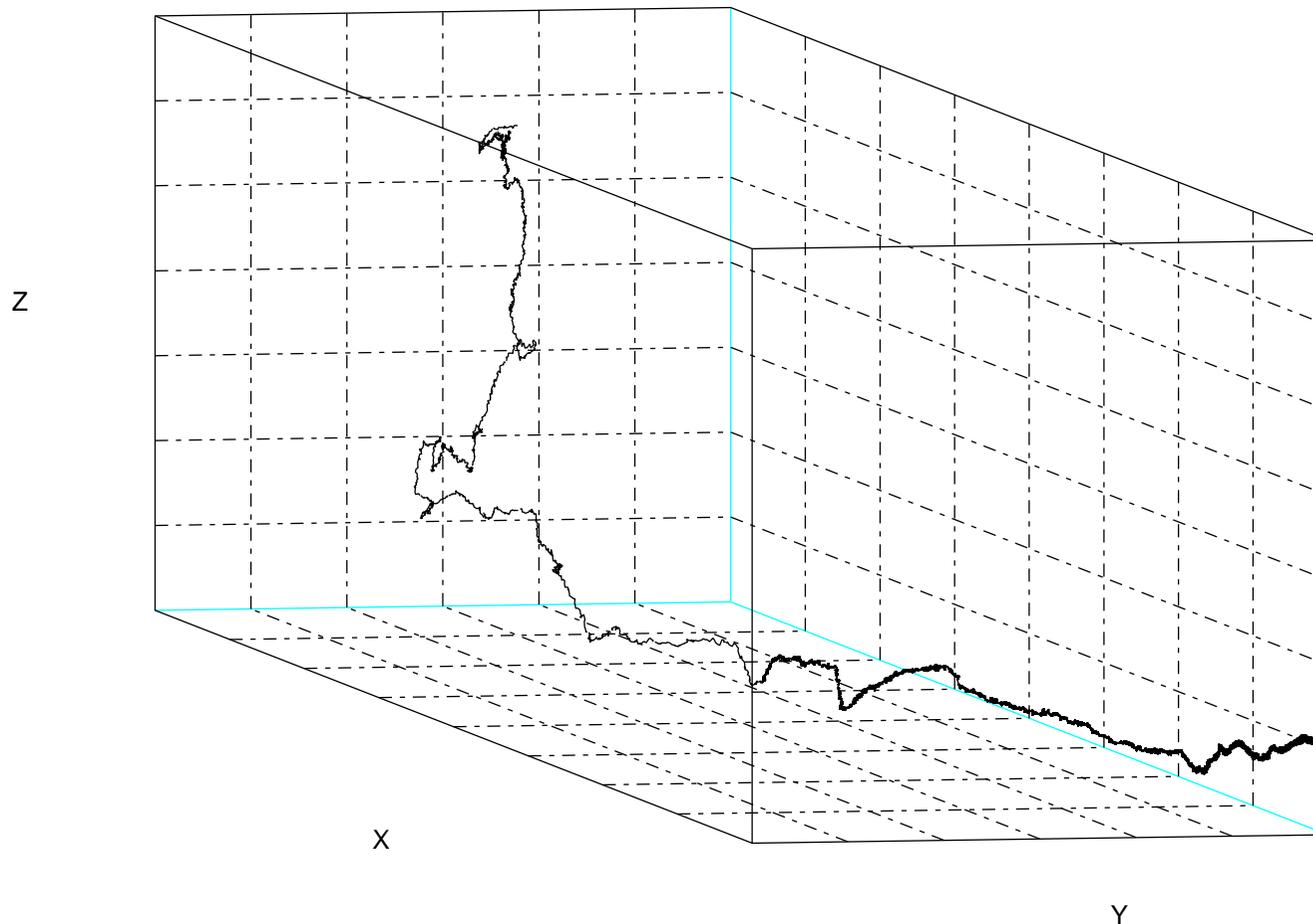


Gradient vertical eulerien pour V



# Applications sur vent réel 3D + Tempé

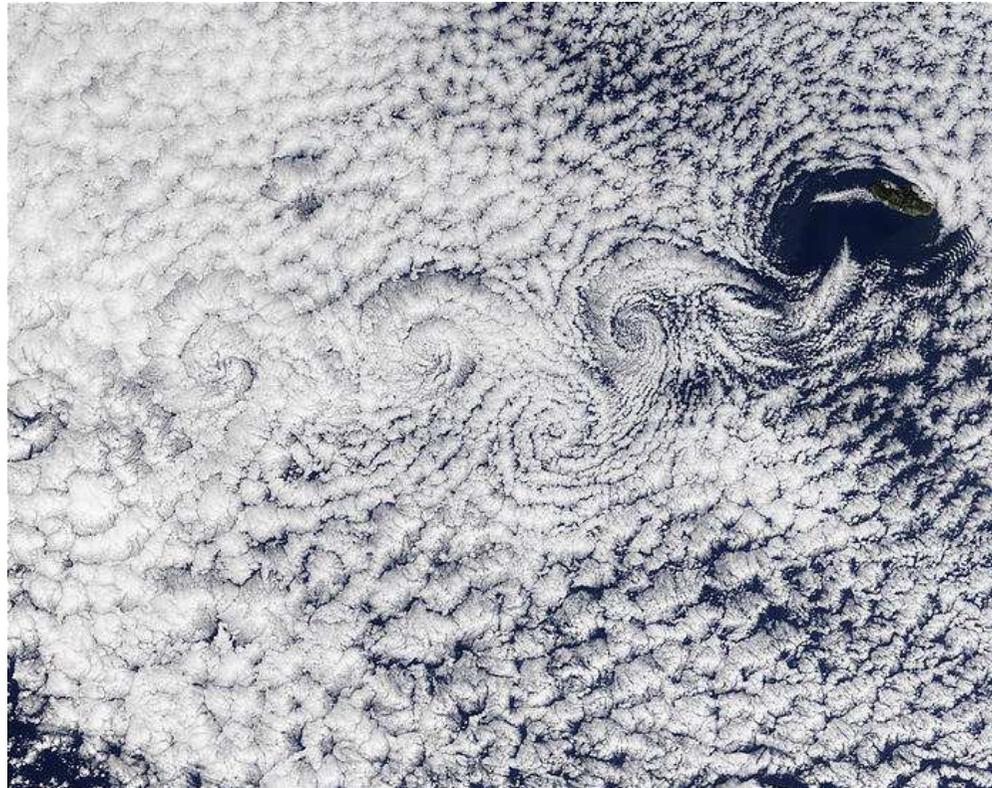
## Trajectoires des particules



# Et maintenant ... coté météorologique

- On a validé les estimations rapides 3D que l'on a fait avec les estimations traditionnelles calculées sur de longues périodes.
- On va passer à des mesures naturellement bruitées. Par exemple en traitant les mesures issues d'un Lidar.
- Ensuite il faudra passer à l'estimation de mesures mobiles.
- Une campagne expérimentale est programmée au printemps 2007 pour des capteurs mobiles.
- Alors, on a la méthodologie pour les mesures indirectes aéroportées.

Je vous remercie pour votre attention.



# Modèle stochastique discrétisé.

- La moyenne Eulérienne  $\langle \varphi(U_{n,x}) \rangle = \int \varphi(u) p^{U_{n,x}}(u) du$  n'est pas bien posée relativement au Markov  $(X_n, V_n)$ .
- On définit une espérance régularisée

$$\mathbb{F}_n^\delta(\varphi)(x) = \iint \varphi(v) G^\delta(x - z) p^{X_n, V_n}(z, v) dz dv$$

- On approche la moyenne Eulérienne par

$$\Pi_n^\delta(\varphi)(x) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}_\delta(\varphi(V_n) | X_n = x) = \frac{\mathbb{F}_n^\delta(\varphi)(x)}{\mathbb{F}_n^\delta(1)(x)}$$

- Si  $(X_n^i, V_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  sont les particules à l'instant  $n$ , alors

$$\Pi_n^\delta(\varphi)(X_n^i) \approx \Pi_n^{\delta, N}(\varphi)(X_n^i) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(V_n^j) G^\delta(X_n^i - X_n^j)}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 \cdot G^\delta(X_n^i - X_n^k)}$$

# Modèle stochastique discrétisé.

- Le modèle de Pope est une équation du type [MacKean-Vlasov](#) pour lequel on dispose des travaux de S. Méléard ou de A.S. Sznitman.
- On a alors existence et unicité d'une solution trajectorielle et en loi.
- On peut vérifier que le système de particules induit  $\mathcal{X}_n^{i,N} = (X_n^{i,N}, V_n^{i,N})$  est  $\mathbb{P}$ -chaotique.
- On peut formuler des estimées  $L^p$  pour le système de particules: pour tous  $n \geq 0$  et  $p \geq 1$  il existe des constantes finies  $C_p(n) < \infty$  t.q. pour tout  $N \geq 1$

$$\mathbb{E} \left( \sup_{m \leq n} |\mathcal{X}_m^{i,N} - \bar{\mathcal{X}}_m^i|^p \right)^{1/p} \leq \frac{C_p(n)}{\sqrt{N}}$$

# Localisation.

- Filtrage de fluide localisé dans des régions  $B_n$ .

Filtre :

$$\hat{\eta}_n^B = \text{Loi}(\mathcal{X}_n | \mathcal{X}_0 \in B_0, \dots, \mathcal{X}_n \in B_n, \mathcal{Y}_0^n)$$

Prédicteur :

$$\eta_{n+1} = \text{Loi}(\mathcal{X}_{n+1} | \mathcal{X}_0 \in B_0, \dots, \mathcal{X}_n \in B_n, \mathcal{Y}_0^n) = \hat{\eta}_n^B M_{n+1, \hat{\eta}_n^B}$$

- Modèle de signal fluide localisé.

$$\mathcal{X}_n^B \in B_n \xrightarrow{M_{n+1, \hat{\eta}_n^B}} \mathcal{X}_{n+1} \xrightarrow{S_{\eta_{n+1}}^{B_{n+1}}} \mathcal{X}_{n+1}^B \in B_{n+1}$$

en définissant

$$B_{n+1} = \{(x, v) : d(x, m_{n+1}) \leq R\} \text{ où } m_{n+1} = \int x \eta_{n+1}(dx)$$

et le noyau de sélection

$$S_{\eta}^B(x, dy) = \mathbb{1}_B(x) \delta_x(dy) + \mathbb{1}_{B^c}(x) \frac{\mathbb{1}_B(y) \eta(dy)}{\eta(B)}$$

- [Retour](#)

# Modèle a priori vs Modèle conditionné

- Pour trouver la solution, il faut passer par une résolution particulière.



$$\forall 1 \leq i \leq N \quad \mathcal{X}_{n-1}^i \longrightarrow \mathcal{X}_n^i \sim M_{n, \eta_{n-1}^N}(\mathcal{X}_{n-1}^i, \cdot)$$

$$\text{avec} \quad \eta_{n-1}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\mathcal{X}_{n-1}^i}$$

- La loi approchée évolue comme:

$$\eta_n^N = \eta_{n-1}^N M_{n, \eta_{n-1}^N} + V_n^N / \sqrt{N}$$

avec  $V_n^N$  martingale d'erreur centrée, de variance finie, et asymptotiquement gaussienne.

# Modèle a priori vs Modèle conditionné

- On utilise alors  $N$  systèmes de particules ( $1 \leq i \leq N$ ) pour modéliser les configurations possibles du fluide (solution de l'EDP avec des conditions initiales et conditions aux bords différentes).
- Chaque configuration a alors besoin de  $d$  particules ( $1 \leq \alpha \leq d$ ) pour mettre en jeu les interactions et calculer les moyennes locales.
- Les particules sont alors notées  $(X_n^{i,\alpha}, V_n^{i,\alpha})$
- La procédure est alors classique:

$$\begin{array}{l} (X_n^{i,\alpha}, V_n^{i,\alpha}) \xrightarrow{\text{Sélection des } i \text{ pertinents}} (\hat{X}_n^{i,\alpha}, \hat{V}_n^{i,\alpha}) \xrightarrow{\text{Prédiction}} \\ (X_{n+1}^{i,\alpha}, V_{n+1}^{i,\alpha}) \xrightarrow{\text{Branchement sur } N \text{ configurations}} (\hat{X}_{n+1}^{i,\alpha}, \hat{V}_{n+1}^{i,\alpha}) \end{array}$$

● [Retour](#)

# Interprétation particulière.

- L'étape de prédiction,  $\mathcal{X}_{n-1}^i \rightsquigarrow \mathcal{X}_n^i \sim M_{n, \hat{\eta}_{n-1}^N}(\mathcal{X}_{n-1}^i, \cdot)$   
avec  $\hat{\eta}_{n-1} \rightarrow \hat{\eta}_{n-1} \cdot M_{n, \hat{\eta}_{n-1}} = \eta_n$
- Dans (Crisan, Del Moral, Lyons *Discrete Filtering using BIPS* 1998), si  $\forall y \in \mathbb{R}^d, f \in \mathcal{C}_b(E)$  l'application  $\mu \rightarrow M_{y, \mu} f$  est continue alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\hat{\eta}_n^N(f) - \hat{\eta}(f))^2] = 0$$

De plus si  $M$  est Lipschitz, il existe une constante  $\hat{c}_n$  tel que  $\forall f \in \mathcal{C}_b(E)$

$$\mathbb{E}[(\hat{\eta}_n^N(f) - \hat{\eta}(f))^2] \leq \frac{\hat{c}_n \|f\|^2}{N}$$

● [Retour](#)

# Processus de Markov.

## ● Formule de Conditionnement

$$\mathbb{P}^{X_1, X_2}(d(x_1, x_2)) = \mathbb{P}^{X_2|X_1}(dx_2|x_1)\mathbb{P}^{X_1}(dx_1)$$

## ● Marche Aléatoire: $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{X_1 \dots X_n}(d(x_1, \dots, x_n)) &= \mathbb{P}^{X_n|X_1 \dots X_{n-1}}(dx_n|x_1 \dots x_{n-1}) \\ &\times \mathbb{P}^{X_1 \dots X_{n-1}}(d(x_1 \dots x_{n-1})) \\ &= \mathbb{P}^{X_0}(dx_0) \times \prod_{p=1}^n \mathbb{P}^{X_p|X_1 \dots X_{p-1}}(dx_p|x_1 \dots x_{p-1})\end{aligned}$$

# Processus de Markov.

- Un Processus de Markov est une marche aléatoire telle que pour tout  $p$ ,

$$\mathbb{P}^{X_p|X_1\dots X_{p-1}}(dx_p|x_1\dots x_{p-1}) = \mathbb{P}^{X_p|X_{p-1}}(dx_p|x_{p-1})$$

- Alors on note

$$\mathbb{P}^{X_p|X_{p-1}}(dx_p|x_{p-1}) = M_p(x_{p-1}, dx_p)$$

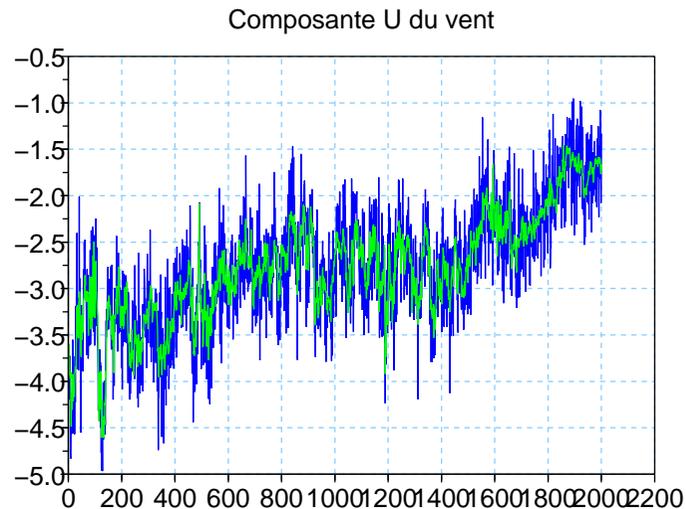
que l'on appelle loi de transition.

- Retour

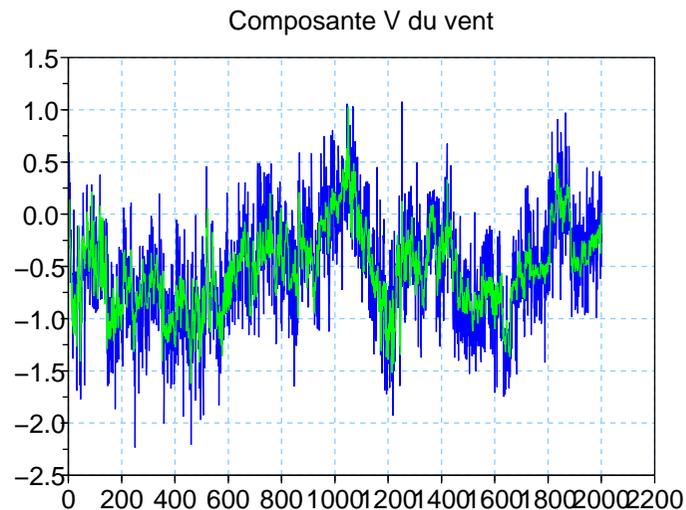
# **Comparaison Modèle conditionnel / Modèle a priori**

# Modèle conditionnel / Modèle a priori

Vent 2D réel échantillonné à 5 Hz avec bruits blancs.

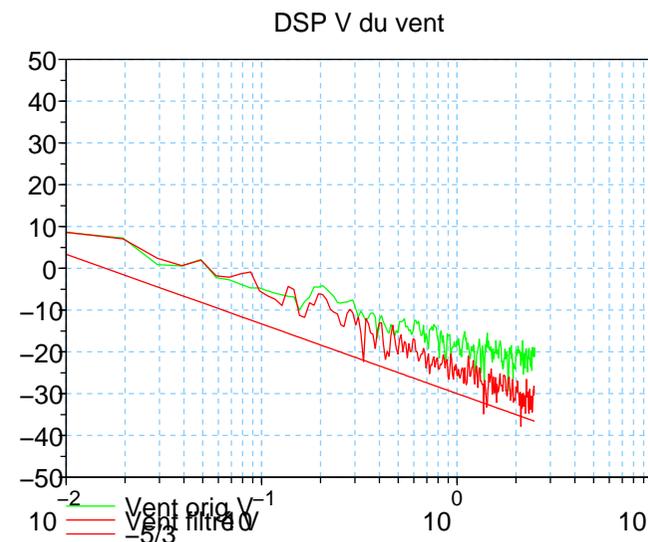
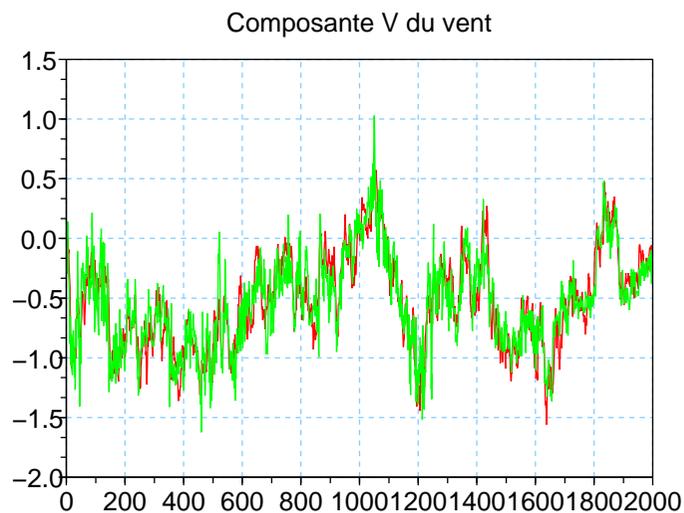
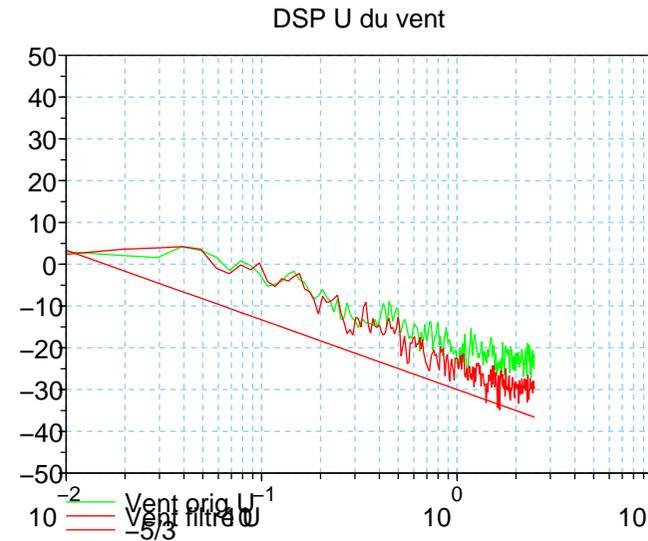
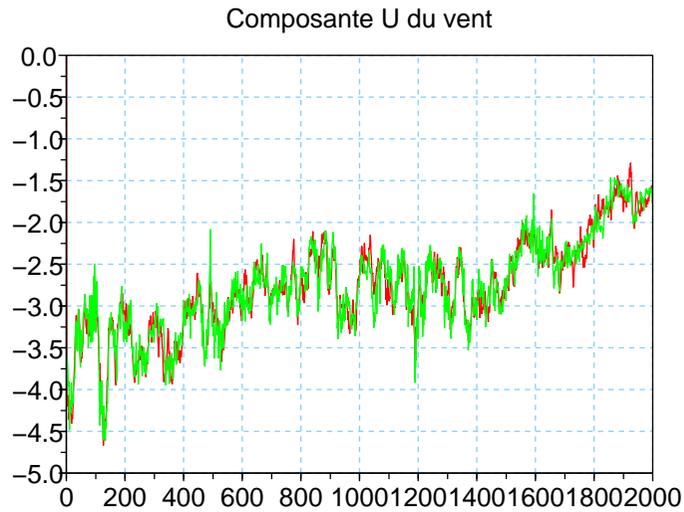


Séries Vent original et bruité artificiellement



# Modèle conditionnel / Modèle a priori

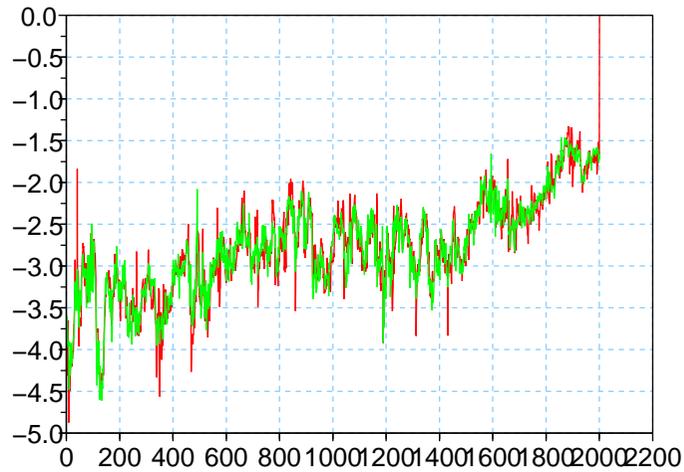
Filtrage, évolution a priori.



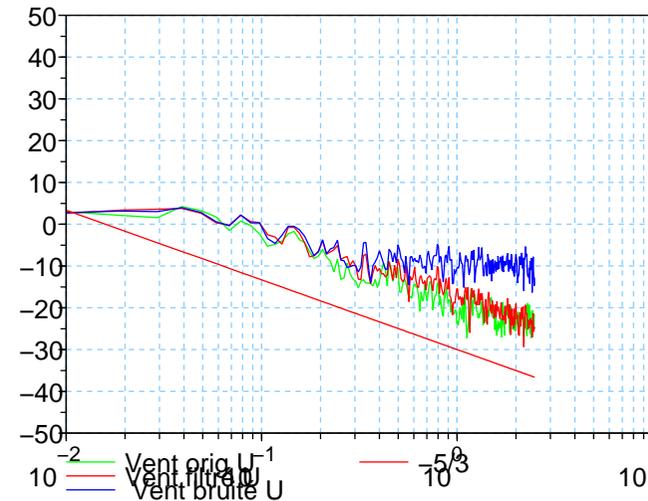
# Modèle conditionnel / Modèle a priori

## Filtrage, évolution conditionnelle.

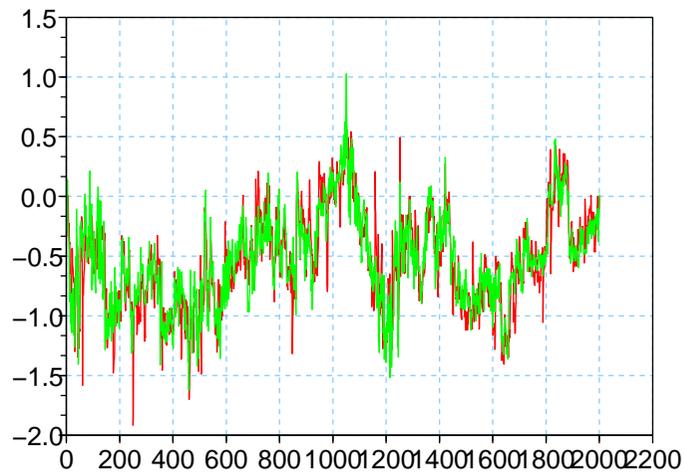
Composante U du vent



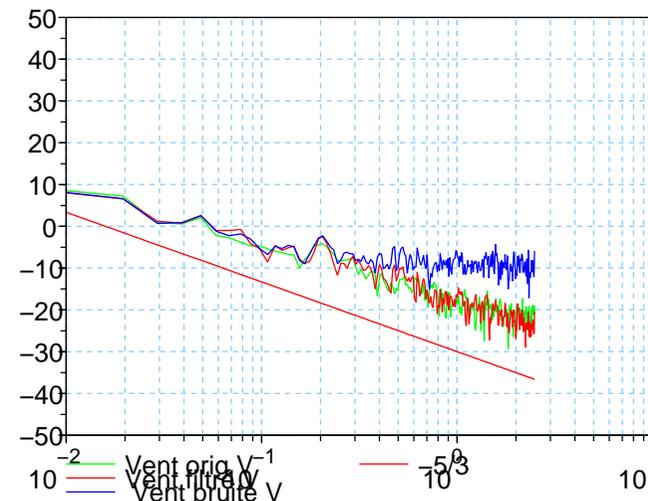
DSP U du vent



Composante V du vent

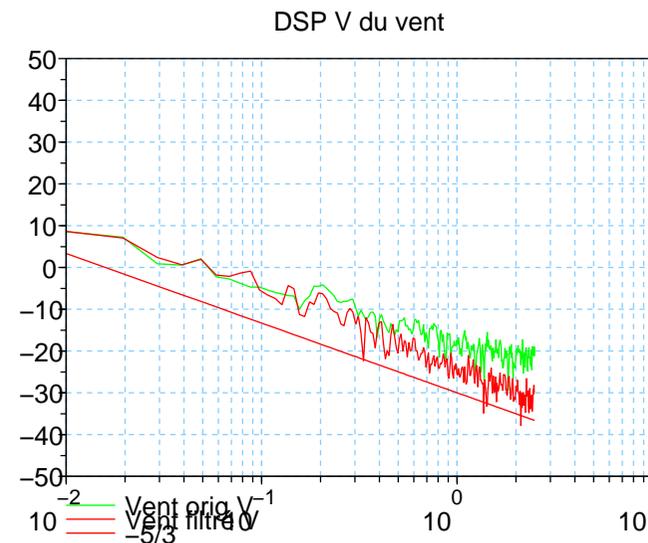
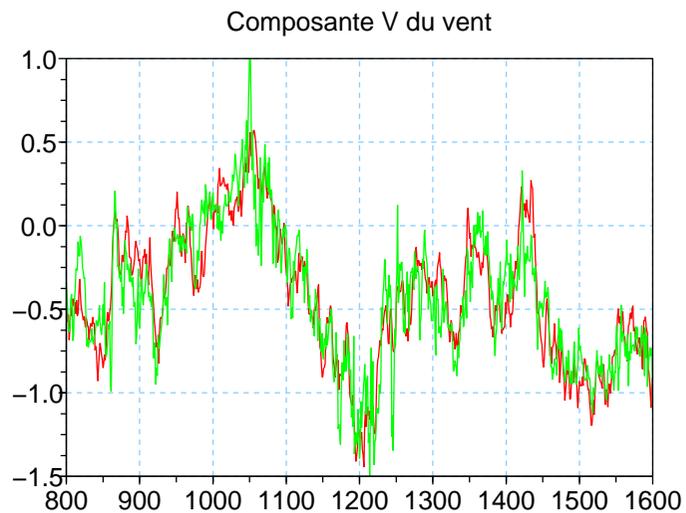
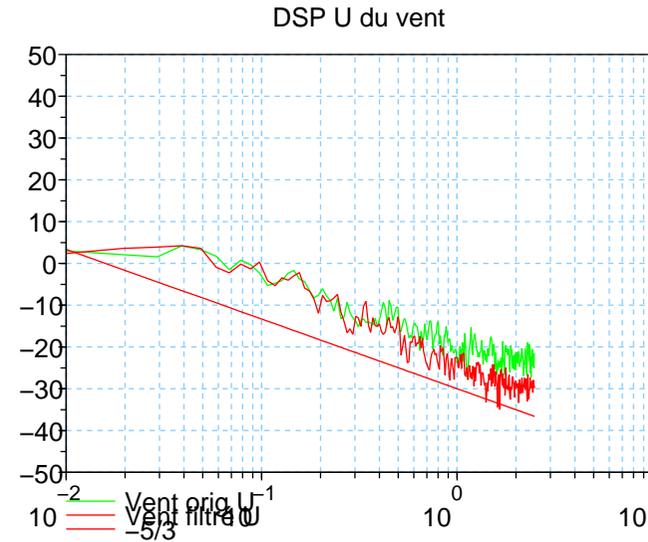
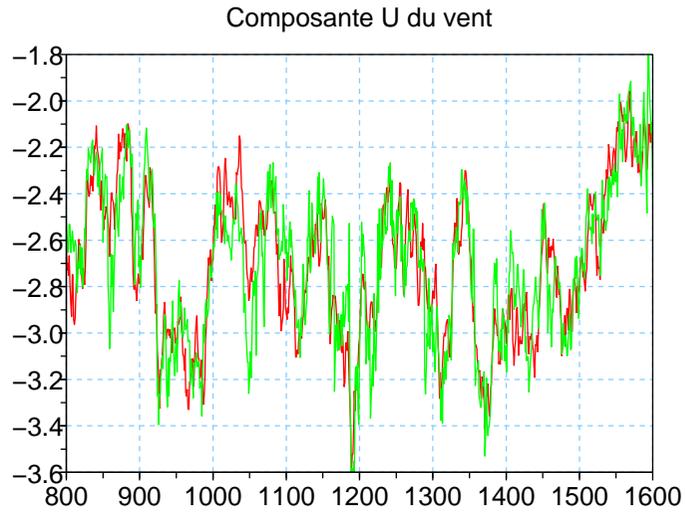


DSP V du vent



# Modèle conditionnel / Modèle a priori

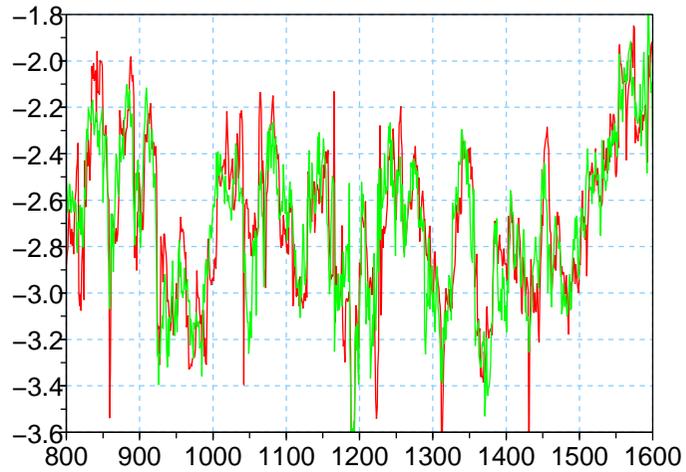
Evolution a priori vu de près.



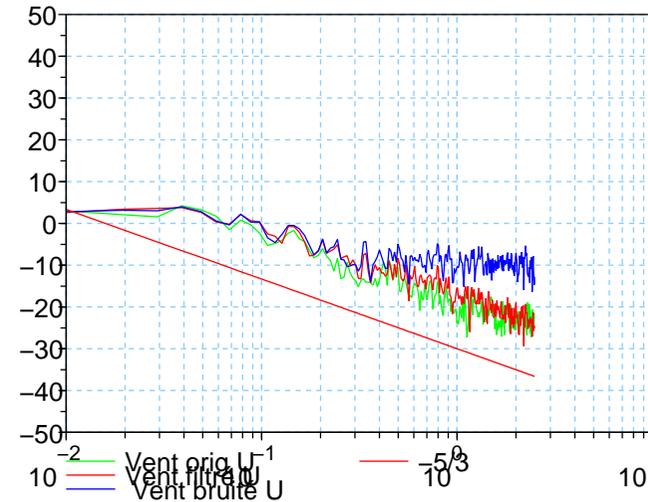
# Modèle conditionnel / Modèle a priori

## Evolution conditionnel vu de prés.

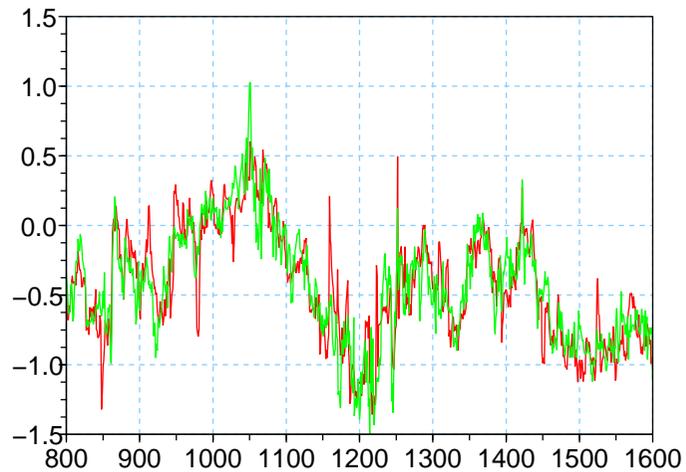
Composante U du vent



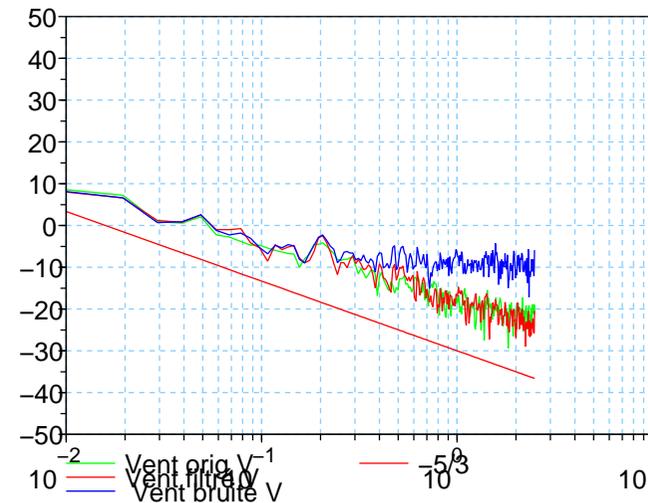
DSP U du vent



Composante V du vent



DSP V du vent



# Modèle conditionnel / Modèle a priori

Avec un bruit fonction de la variance des 30 derniers points.

