Introduction aux filtres de Kalman et interprétation en terme de processus à champ moyen

christophe.baehr@math.ups-tlse.fr

Météo-France / IMT-LSP Univ. Paul Sabatier

3èmes Rencontres Météo/MathAppli - Toulouse

Vendredi 19 Septembre 2008

Les points que nous aborderons

1. Le filtre de Kalman-Bucy
2. Les filtres particulaires en quelques mots
3. Les filtres de Kalman en interaction
4. Le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF)
5. Interprétation de l'EnKF en terme de processus à champ moyen

Le filtre de Kalman-Bucy

Filtre de Kalman

- Filtrage par moindres carrés: minimisation de l'énergie de l'erreur (une fonction coût).

- Origine du filtre.

- Filtrage de Wiener: méthode des moindres carrés stochastiques. (équation de Wiener-Hopf $h = R^{-1}r$ avec $R = \mathbb{E}(x_n.x_n^T)$ et $r = \mathbb{E}(y_n.x_n)$)

- Poursuite de cible (d'un modèle d'état).

- Le filtre de Kalman est un estimateur récursif.

Notations

- On note $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ la mesure Gaussienne sur $\mathbb{R}^d$ de moyenne $\mu \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de covariance $\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et

$$\mathcal{N}(\mu,\sigma)(dx) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{det(\sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu).\sigma^{-1}.(x-\mu)^T\right] dx$$

- Par un abus de notation, on écrit 1 la matrice unité de $\mathbb{R}^{d\times d}$

$$I_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Système dynamique

On note $W = (W_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes gaussiennes telles que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(W_0,\ldots,W_n)}(d(w_0,\ldots,w_n)) &= \prod_{p=0}^{n} \mathbb{P}^{W_p}(dw_p) \\
&= \prod_{p=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{w_p^2}{2}\} \, dw_p \right)
\end{aligned}$$

On y associe le système dynamique

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_n &=& a_n \, X_{n-1} + \sigma_n \, W_n \\ X_0 &=& \sigma_0 \, W_0 \end{array} \right.$$

$(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelles, et $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres strictement positifs.

$$\mathbb{P}^{X_n|X_{n-1}}(dx_n|x_{n-1}) = M_n(x_{n-1}, dx_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \, (x_n - a_n \, x_{n-1})^2\}$$

pour tout $n \geq 1$, et $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Processus défini par sa loi

Les systèmes linéaires et gaussiens (X_n) sont aussi définis par la donnée d'une suite de v.a. $n \geq 0$ à valeurs réelles de lois

$$\mathbb{P}^{(X_0,\ldots,X_n)}(d(x_0,\ldots,x_n)) = \left[\prod_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-\frac{(x_p - a_p x_{p-1})^2}{2\sigma_p^2}} \, dx_p\right] \frac{e^{-\frac{x_0^2}{2\sigma_0^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \, dx_0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{X_n|X_{n-1}}(dx_n|x_{n-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2} (x_n - a_n \, x_{n-1})^2\right\} dx_n \\ &= M_n(x_{n-1}, dx_n) \end{aligned}$$

Filtre de Kalman discret

Le système d'état du Kalman

- Soit le couple signal/observation (X_n, Y_n) supposé être une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^{p+q}$, et définie pour $n \geq 0$:

$$\begin{cases} X_n &= A_n.X_{n-1} + B_n\ W_n \\ Y_n &= C_n.X_n + D_n\ V_n \\ Y_0 &= y_0 \end{cases}$$

- (A_n, B_n, C_n, D_n) sont des matrices déterministes, les bruits W_n, et V_n sont des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes.

- Ils sont indépendants de la variable initiale X_0, avec des matrices de covariance respectivement R_n^w et R_n^v.

Filtre de Kalman discret

- On peut montrer que le filtre de Kalman pour une dynamique linéaire Gaussienne à bruit d'observations Gaussiens est le prédicteur optimal.

- On cherche les lois conditionnelles:

$$
\begin{array}{ll}
Loi(X_n \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1}) & \text{le prédicteur} \\
Loi(X_n \mid Y_0, \ldots, Y_n) & \text{le filtre optimal}
\end{array}
$$

- C'est l'archétype du filtre adaptatif qui apprend les paramètres au fur et à mesure de l'arrivée des observations.

Filtre de Kalman discret

Les objets recherchés

- X_0 est de moyenne $\overline{X}_0 = \mathbb{E}(X_0)$ et de matrice de covariance $\overline{P}_0 = \mathbb{E}((X_0 - \mathbb{E}(X_0)) \, . \, (X_0 - \mathbb{E}(X_0))^T)$.

- Le prédicteur est la mesure Gaussienne $Loi(X_n \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = \mathcal{N}(\overline{X}_n, \overline{P}_n)$.

- Le filtre optimal est la mesure toujours Gaussienne $Loi(X_n \mid Y_0, \ldots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n)$.

- $(\overline{X}_n, \hat{X}_n)$ sont les espérances conditionnelles $\overline{X}_n = \mathbb{E}(X_n \mid Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ et $\hat{X}_n = \mathbb{E}(X_n \mid Y_0, \ldots, Y_n)$

Filtre de Kalman discret

- Les matrices $(\overline{P}_n, \hat{P}_n)$ sont les matrices de covariance d'erreurs entre les estimateurs conditionnels $(\overline{X}_n, \hat{X}_n)$ et le signal X_n observé

$$\overline{P}_n = \mathbb{E}([X_n - \overline{X}_n].[X_n - \overline{X}_n]^T) \quad \text{et} \quad \hat{P}_n = \mathbb{E}([X_n - \hat{X}_n].[X_n - \hat{X}_n]^T)$$

- On calcule récursivement, au fur et à mesure de l'arrivée des observations, l'évolution des lois conditionnelles par deux étapes d'apprentissage

$$\mathcal{N}(\overline{X}_n, \overline{P}_n) \xrightarrow{\text{Mise à jour}} \mathcal{N}(\hat{X}_n, \hat{P}_n) \xrightarrow{\text{Prédiction}} \mathcal{N}(\overline{X}_{n+1}, \overline{P}_{n+1})$$

Filtre de Kalman discret

Mise en forme du filtre

L'établissement des équations du filtre utilise le caractère linéaire et des propriétés des lois Gaussiennes:

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_n &= \mathbb{E}(A_n X_{n-1} + B_n W_n \mid (Y_0, \ldots, Y_{n-1})) \\
&= A_n \hat{X}_{n-1} \\
\overline{P}_n &= \mathbb{E}[(A_n(X_{n-1} - \hat{X}_{n-1}) + B_n W_n).(A_n(X_{n-1} - \hat{X}_{n-1}) + B_n W_n)^T] \\
&= A_n.\hat{P}_{n-1}.A_n^T + B_n \; R_n^w \; B_n^T
\end{aligned}
$$

On a pour $\overline{Y}_n$:

$$\overline{Y}_n = \mathbb{E}(Y_n | (Y_0, \ldots, Y_{n-1})) = C_n \overline{X}_n$$

On exprime la différence $(\hat{X}_n - \overline{X}_n)$ comme $\hat{X}_n - \overline{X}_n = G_n \; (Y_n - \overline{Y}_n)$

Filtre de Kalman discret

- G_n est appelée la matrice de gain de Kalman.
- Pour la calculer, on utilise

$$\mathbb{E}((X_n - \hat{X}_n).(Y_n - \overline{Y}_n)^T) = 0$$

et

$$Y_n - \overline{Y}_n = C_n(X_n - \overline{X}_n) + D_n V_n$$

Prenant les espérances, on obtient

$$\mathbb{E}((X_n - \overline{X}_n).(Y_n - \overline{Y}_n)^T) = G_n \, \mathbb{E}((Y_n - \overline{Y}_n).(Y_n - \overline{Y}_n)^T)$$

Ensuite de

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}((X_n - \overline{X}_n).(Y_n - \overline{Y}_n)^T) \\ = \quad & \mathbb{E}((X_n - \overline{X}_n).(C_n[X_n - \overline{X}_n] + V_n)T) \\ = \quad & \overline{P}_n C_n^T \end{aligned}$$

on déduit $G_n = \overline{P}_n C_n^T (C_n \overline{P}_n C_n^T + D_n R_n^v D_n^T)^{-1}$.

In fine on obtient

$$\hat{P}_n = \overline{P}_n - G_n C_n \overline{P}_n$$

Filtre de Kalman discret

Algorithme de Kalman

- Pour l'étape de prédiction 2 termes à calculer:

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &= A_n \, \hat{X}_{n-1} \\ \overline{P}_n &= A_n \, \hat{P}_{n-1} \, A_n^T + B_n \, R_n^w \, B_n^T \end{aligned}$$

- Pour l'étape de correction 3 termes :

$$G_n = \overline{P}_n C_n^T (C_n \overline{P}_n C_n^T + D_n R_n^v D_n^T)^{-1}$$

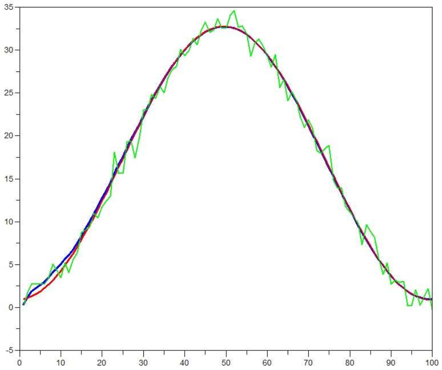
$$\begin{aligned} \hat{X}_n &= \overline{X}_n + G_n \, (Y_n - C_n \overline{X}_n) \\ \hat{P}_n &= \overline{P}_n - G_n C_n \overline{P}_n \end{aligned}$$

Algorithme de Kalman

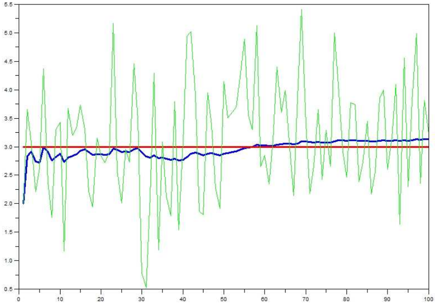
- Quand l'hypothèse de linéarité n'est pas vérifiée, mais que l'équation de dynamique est différentiable, il est possible de se ramener au cas précédent par une linéarisation, on obtient le Kalman étendu.

- L'estimateur de Kalman peut s'écrire de manière identique en temps continu, et devient le filtre de Kalman-Bucy.

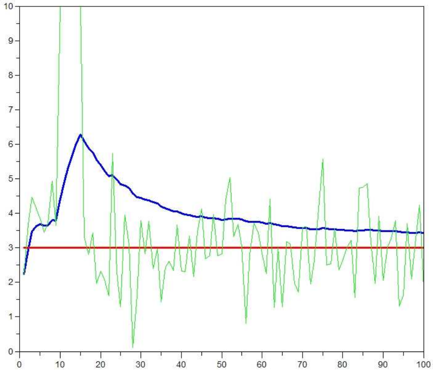
Kalman in action



Kalman in action



Kalman in action



Les filtres particulaires

Le système d'états non-linéaires

- On se donne un système non-linéaire qui fixe le problème de filtrage.

$$\begin{cases} dX_t & = & A(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t \\ dY_t & = & H_t(X_t)dt + \sigma dV_t \end{cases}$$

où les V_t et W_t sont des processus de Wiener ou non. A, B et H sont des fonctions quelconques de l'état caché X_t.

- Le problème de filtrage associé consiste à trouver la $Loi(X_{[0,t]}|\mathcal{Y}_{[0,t]})$

Equations du filtrage non-linéaire

- Le problème de filtrage revient à calculer pour toute f mesurable bornée,

$$\mathbb{E}(f_t((X_s)_{s\leq t})/\mathcal{Y}_t) = \frac{\mathbb{E}_0(f_t((X_s)_{s\leq t})Z_t(X,Y)/\mathcal{Y}_t)}{\mathbb{E}_0(Z_t(X,Y)/\mathcal{Y}_t)}$$

où le facteur de normalisation est

$$Z_t(X,Y) = exp(\int_0^t H_s(X_s)dY_s - \int_0^t H_s^*(X_s)H_s(X_s)ds)$$

- L'estimateur optimal $\hat{\eta}_t(f) = \mathbb{E}(f(X_{[0,t]})/\mathcal{Y}_t)$ et il est solution de l'équation non-linéaire

$$d\hat{\eta}_t(f) = \hat{\eta}_t(L_t(f))dt + \hat{\eta}_t((H - \hat{\eta}_t(H))^* f)(dY_t - \hat{\eta}_t(H)dt)$$

Mesures de Feynman-Kac

- Les 2 estimateurs, celui du filtrage et celui de la prédiction, sont définis par

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_n(f) &= \mathbb{E}[f(X_0,\ldots,X_n) \mid Y_0 = y_0,\ldots Y_n = y_n] \\ \eta_n(f) &= \mathbb{E}[f(X_0,\ldots,X_n) \mid Y_0 = y_0,\ldots Y_{n-1} = y_{n-1}]\end{aligned}$$

- On peut les écrire :

$$\begin{aligned}\eta_n(f_n) &= \frac{\gamma_n(f_n)}{\gamma_n(1)} \\ \hat{\eta}_n(f_n) &= \frac{\hat{\gamma}_n(f_n)}{\hat{\gamma}_n(1)}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_n(f_n) &= \mathbb{E}_{\eta_0}(f_n(X_0,\ldots,X_n)\prod_{p=0}^{n} G_p(X_0,\ldots,X_p)) \\ \gamma_n(f_n) &= \mathbb{E}_{\eta_0}(f_n(X_0,\ldots,X_n)\prod_{p=0}^{n-1} G_p(X_0,\ldots,X_p))\end{aligned}$$

Algorithme du filtrage non-linéaire

- L'algorithme de filtrage qui se déduit de cet ensemble d'équations utilise le noyau de Markov M_n associé à l'équation de dynamique

$$X_{n+1} = X_n + A_n(X_n)\Delta t + B_n(X_n)W_n$$

et le noyau de sélection génétique des états (qui est un choix non unique)

$$S_{n,\eta_{\mathbf{n}}}(x_n, dx) = G_n(x_n)\delta_{x_{\mathbf{n}}}(dx) + [1 - G_n(x_n)]\frac{G_n(x)}{\eta_n(G_n)}\eta_n(dx)$$

où $G_n(x_n) \stackrel{def}{=} g_n(x_n, y_n)$ avec
$\mathbb{P}(H(x_n) + \sigma V_n \in dy_n \mid X_n = x_n) \; = \; g_n(x_n, y_n)\lambda_n(dy_n)$

- Ce qui donne l'algorithme du filtrage non-linéaire

$$\eta_n \xrightarrow{S_{\mathbf{n},\eta_{\mathbf{n}}}} \hat{\eta}_n = \eta_n \; S_{n,\eta_{\mathbf{n}}} \xrightarrow{M_{\mathbf{n+1}}} \eta_{n+1} = \hat{\eta}_n \; M_{n+1}$$

Solutions particulaires des filtres non-linéaires

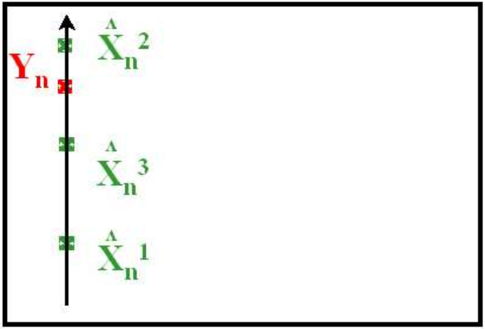
- Ces équations intégrales non-linéaires ne sont pas calculables analytiquement.

- On utilise une approximation particulaire. C'est à dire que l'on échantillonne les lois du filtrage en utilisant des états-test de l'espace des phases que l'on nomme particules.

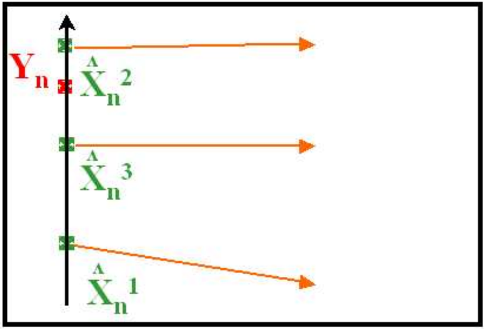
- Méthode de Monte-Carlo.

Le filtre particulaire en images

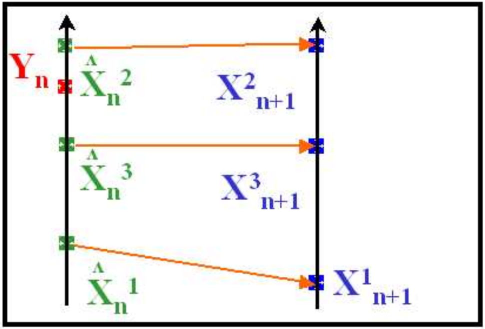
Le filtre particulaire en images



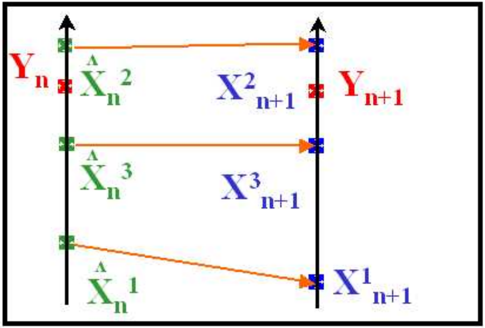
Le filtre particulaire en images



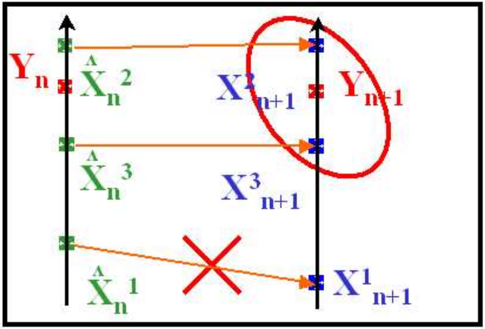
Le filtre particulaire en images



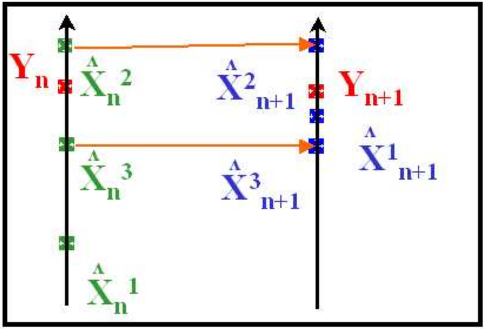
Le filtre particulaire en images



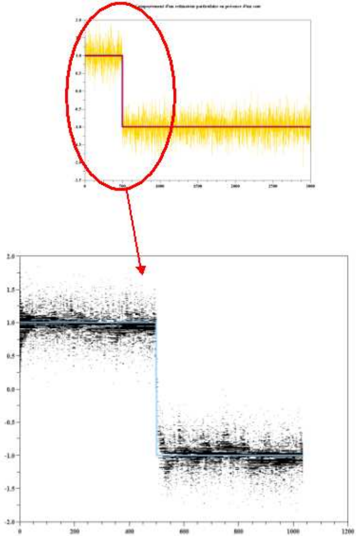
Le filtre particulaire en images



Le filtre particulaire en images



Le filtre particulaire en images



Filtrage de processus à champ moyen

- Définition d'un processus à champ moyen.

- On suppose que pour tout instant $n \geq 0$, le couple dynamique/observation (X_n, Y_n) suit le système:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & X_n + d(X_n, \pi_n)\Delta t + \sigma_n^X .\ W_n \\ Y_n & = & h(X_n) + \sigma_n^Y .V_n \end{array} \right.$$

où π_n est la loi de X_n, pour la fonction d on donne la forme

$$d(X_n, \pi_n) = A(X_n) + \int D(X_n, x)\pi_n(dx)$$

où D est linéaire en sa seconde variable et K-Lipschitzienne bornée et A_n est mesurable bornée.

- Les processus à champ moyen peuvent être filtrés par des algorithmes particulaires spécifiques.

Les filtres de Kalman en interaction

Filtres de Kalman en interaction

Equations d'état du Kalman en interaction

- Heuristique.
- On utilise une dynamique linéaire, comme pour le Kalman.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_n & = & A_n.X_{n-1} + \sqrt{Q_n}\ W_n \\ Y_n & = & C_n.X_n + \sqrt{R_n}\ V_n \\ Y_0 & = & y_0 \end{array} \right.$$

- Le filtre de Kalman en interaction est une méthode particulaire où chaque particule est un filtre de Kalman

Algorithme du Kalman en interaction

- Pour chaque particule, $1 \leq i \leq N$, on note $\xi_n^i = (\zeta_n^i, \nu_n^i)$ où ζ_n^i est l'état dans l'espace des phases et ν_n^i est la loi Gaussienne associée.

- A l'étape initiale, on distribue les N états ζ_0^i selon la loi η_0 et les Gaussiennes sont données par $\nu_0^i = \mathcal{N}(m_0^i, P_0^i)$ avec $m_0^i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \zeta_0^i$ et $P_0^i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N [\zeta_0^i - m_0^i]^2$.

- La n-ième étape de sélection se fait sur les particules ζ_n^i avec le noyau de sélection $\tilde{G}(\zeta_n^i)$ qui est donné par :

$$\tilde{G}_n(\zeta_n^i) = \frac{d\mathcal{N}(C_n\ m_n^i\ ,\ C_n\ P_n^i\ C^T + R_n^v)}{d\mathcal{N}(0, R_n^v)}(y_n)$$

Filtres de Kalman en interaction

- Cette sélection génétique du type $S_{n,\eta_n}(z_n,\cdot) = \tilde{G}_n(z_n)\delta_{z_n} + [1 - \tilde{G}_n(z_n)]\Psi_n(\eta_n)$ choisit N particules que l'on note $\hat{\xi}_n^i = (\hat{\zeta}_n^i, \hat{\nu}_n^i)$.

- Pour l'étape de mutation, l'équation de dynamique de ce filtre particulaire est celle du filtre de Kalman et chaque particule $\hat{\xi}_n^i$ évolue selon le filtre de Kalman qui lui est propre avec ses équations.

- On trouvera dans le livre de P. Del Moral sur les formules de Feynman-Kac, une estimée d'erreur L^p de ces filtres de Kalman en interaction en $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Le filtre de Kalman d'ensemble

Equations d'état du Kalman d'ensemble

- On considère le système d'observation de l'état $X_n \in \mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$:

$$\begin{cases} X_n = A_n(X_{n-1}) + \sqrt{Q_n}.W_n & W_n \sim \mathcal{N}(0,1) \\ Y_n = C_n.X_n + \sqrt{R_n}.V_n & V_n \sim \mathcal{N}(0,1) \end{cases}$$

où A est cette fois une fonction non forcément linéaire de X_n.

- Le filtre de Kalman d'ensemble est une technique astucieuse pour utiliser un ensemble d'état (méthode Monte-Carlo) pour approcher la matrice de covariance d'erreur par une version empirique (qui dans la pratique n'est pas calculée).

- Cette approximation est motivée par des problèmes de grandes dimensions.

Algorithme de Kalman d'ensemble

- A l'étape initiale, on se donne $P_0 > 0$ et on produit un ensemble de réalisation $(\hat{X}_0^1, \ldots \hat{X}_0^N)$ i.i.d. avec $\mathcal{N}(0, P_0)$

- Pour tout $i = 1 \ldots N$, et $n \geq 1$ on a une première étape:

$$
\begin{aligned}
X_n^i &= A_n(\hat{X}_{n-1}^i) + \sqrt{Q_n}.W_n^i && W_n^i \sim \mathcal{N}(0,1) \\
m_n^N &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_n^i \\
P_n^N &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_n^i - m_n^N)(X_n^i - m_n^N)^T \\
R_n^N &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{R_n}.V_n^i.(\sqrt{R_n}.V_n^i)^T && V_n^i \sim \mathcal{N}(0,1) \\
G_n^N &= P_n^N.C_n^T.(C_n.P_n^N.C_n^T + R_n^N)^{-1}
\end{aligned}
$$

Algorithme de Kalman d'ensemble

- Puis une étape de correction semblable au filtre de Kalman classique, les éléments de l'ensemble $\hat{X}_n^i$ évoluent selon:

$$\hat{X}_n^i = X_n^i + G_n^N.\left[Y_n - C_n.X_n^i + \sqrt{R_n}.V_n^i\right]$$

- Ces 6 équations constituent les étapes du filtre de Kalman d'Evensen.

- Remarque : P_n^N n'est pas calculée, car pour un vecteur quelconque U on calcule

$$U_n^i = (X_n^i - m_n^N)^T \ U$$

et on obtient

$$\begin{aligned} P_n^N U &= \left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_n^i - m_n^N)(X_n^i - m_n^N)^T\right] U \\ &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_n^i - m_n^N)\ U_n^i \end{aligned}$$

Filtre de Kalman d'ensemble

- Convergence de la méthode ?
- Contrôle des erreurs d'estimation ?
- Nous poserons la question à François Le Gland.

Interprétation de l'EnKF en terme de processus à champ moyen

Interprétation en champ moyen

- Reprenant le jeux d'équations de l'EnKF si on s'intéresse au processus de correction il évolue pour chaque élément selon:

$$\hat{X}_n^i = A_n(\hat{X}_{n-1}^i) + \sqrt{Q_n}.W_n^i + G_n^N.\left[Y_n - C_n.A_n(\hat{X}_{n-1}^i) - C_n.\sqrt{Q_n}.W_n^i + \sqrt{R_n}.V_n^i\right]$$

- On note le processus de mise à jour $Z_n = \hat{X}_n$

- Le processus de Markov Z_n suit l'équation

$$Z_n = A_n(Z_{n-1}) + \sqrt{Q_n}.W_n + G_n^N.\left[Y_n - C_n.A_n(Z_{n-1}) - C_n.\sqrt{Q_n}.W_n + \sqrt{R_n}.V_n\right]$$

avec $G_n = P_n\ C_n^T [C_n\ P_n\ C_n^T\ +\ R_n]^{-1}$ et
$R_n = \mathbb{E}\big([A_n(Z_{n-1} + \sqrt{Q_n}\ W_n][A_n(Z_{n-1} + \sqrt{Q_n}\ W_n]^T\big)$ et
$R_n = \mathbb{E}\big([\sqrt{R_n}\ V_n]\sqrt{R_n}\ V_n^T\big)$

Interprétation en champ moyen

- Quand on utilise un système de N particules $(Z_n^i)_{1 \leq i \leq N}$ pour approcher la dynamique de Z_n, on regarde par exemple la moyenne empirique de Z_n^i : $\overline{Z}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Z_n^i$. Dans ce cas $\overline{Z}_n = \overline{A(Z_{n-1})} + G_n \, [Y_n - C_n \, \overline{A(Z_{n-1})}]$.

- Si A est linéaire, on retrouve exactement l'estimateur de Kalman pour le processus de correction. En tous les cas, l'estimation est exacte si le système d'observation (X_n, Y_n) est linéaire Gaussien, et c'est le meilleur estimateur linéaire sinon.

Interprétation en champ moyen

- On peut remplacer dans le modèle de dynamique $A_n(Z_{n-1}) + \sqrt{Q_n}.W_n$ par une fonction plus générale $F_n(Z_{n-1}, W_n)$. On note η_n la loi de Z_n, et on considère le système observé

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Z_n & = & F_n(Z_{n-1}, W_n) \\ Y_n & = & \mathbb{E}(Z_n) + V_n \end{array} \right.$$

G_n est clairement un opérateur de champ moyen dépendant de η_n et le processus de filtrage s'écrit

$$Z_n = F(Z_{n-1}, W_n) + G_n[Y_n \ - \ C_n F(Z_{n-1}, W_n) \ - \ V_n]$$

Interprétation en champ moyen

- Le filtre de Kalman d'ensemble approche donc un processus de Markov non-linéaire.

- Si A est linéaire l'approximation est exacte et on a $\eta_n^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{Z_n^i} \sim \eta_n = Loi(Z_n)$.

- Ce processus de Markov possède une interprétation de McKean.

- $F(Z_{n-1}, W_n)$ correspond à l'étape de mutation du processus de filtrage avec un noyau noté M_n et $G_n[Y_n - C_n F(Z_{n-1}, W_n) - V_n]$ qui est un processus de correction induit un noyau de sélection $\mathcal{C}_{n,Y_n,\eta_{n-1}}$ et on a le système dynamique

$$\eta_n = \eta_{n-1}\ M_n\ \mathcal{C}_{n,Y_n,\eta_{n-1}}$$

issu de η_0.

- Dans le cas de bruit gaussien,

$$\mathcal{C}_{n,Y_n,\eta_{n-1}}(x, dz) = \exp\left(-\frac{[z - x - G_n(Y_n - C_n x)]^2}{2G_n^2 R_n}\right)$$

Interprétation en champ moyen

- L'EnKF pour un ensemble de particules grand est plus cher qu'un filtre particulaire basé sur le même modèle, mais pour un petit ensemble d'éléments le filtre particulaire classique est plus risqué que le filtre d'ensemble conduit par un processus de correction plutôt que de redistribution.

- Le filtre de Kalman d'ensemble est un filtre de Kalman en interaction par le champ moyen pour lequel on possède déjà des estimées d'erreurs.

Interprétation en champ moyen

- On a ainsi 2 schémas de filtrage possibles et généraux.

Pour toute fonction f mesurable bornée

$$\begin{aligned} \eta_n \; K_{n+1,\eta_{\boldsymbol{n}},\pi_{\boldsymbol{n}}}(f) &= \eta_n \; S_{n,\eta_{\boldsymbol{n}}} M_{n+1,\eta_{\boldsymbol{n}}}(f) \\ \eta_n \; K_{n+1,\eta_{\boldsymbol{n}},\pi_{\boldsymbol{n}}}(f) &= \eta_n \; \mathcal{C}_{n,\eta_{\boldsymbol{n}}} M_{n+1,\eta_{\boldsymbol{n}}}(f) \end{aligned}$$

- Ouverture sur des méthodes d'ensemble non gaussiennes