

Université Paul Sabatier

Master Professionnel M3I (SMIS)

Courbes et Surfaces

---

Support de cours

---

Luca AMODEI

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espace des fonctions splines</b>	<b>3</b>
1.1	Espace des polynômes par morceaux . . . . .	3
1.2	Base de $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Les fonctions B-splines</b>	<b>5</b>
2.1	Différence divisée d'une fonction . . . . .	5
2.2	Propriété de la différence divisée . . . . .	6
2.3	Définition des fonctions B-splines . . . . .	7
2.4	Propriétés des fonctions B-splines . . . . .	8
2.5	Base de $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$ . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Courbes B-splines</b>	<b>14</b>
3.1	Définition des courbes B-splines . . . . .	14
3.2	Autres propriétés des courbes B-splines . . . . .	15
3.3	Algorithme d'évaluation de De Boor . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Polynômes de Bézier</b>	<b>19</b>
4.1	Propriétés élémentaires des polynômes $B_i^n(t)$ . . . . .	19
4.2	Courbes de Bézier . . . . .	20
4.3	Fonctions et courbes paramétriques . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Surfaces B-splines</b>	<b>23</b>
5.1	Propriétés de la surface $P(u, v)$ . . . . .	23
5.2	Surfaces particulières . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Courbes et surfaces B-splines rationnelles (NURBS)</b>	<b>28</b>
6.1	Surfaces de révolution . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Interpolation par fonctions splines</b>	<b>37</b>
<b>8</b>	<b>Algorithmes de subdivision</b>	<b>41</b>
8.1	Insertion d'un noeud . . . . .	41
8.2	Diminution de variation des courbes B-splines . . . . .	43
8.3	Insertion de noeuds confondus . . . . .	43
8.4	Subdivision pour une courbe de Bézier . . . . .	44
<b>9</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

Ce document sert de support au cours **Courbes et Surfaces** donné actuellement en deuxième année de Master SMIS (Master Professionnel M3I). Il présente une introduction à la théorie des fonctions **splines** et leur utilisation pour la représentation de courbes et surfaces en **modélisation géométrique et en CAO**. Afin de réduire le volume du document les résultats sont généralement présentés sans démonstrations.

## 1 Espace des fonctions splines

Pour représenter des courbes et des surfaces une première idée naturelle consiste à utiliser les fonctions polynomiales qui ont l'avantage d'être simples à calculer et permettent de représenter (ou approcher) un ensemble de formes relativement important. Cependant, on sait que les variations des fonctions polynomiales peuvent être très importantes dès que leur degré augmente. Ce comportement limite leur utilisation en CAO et en modélisation géométrique où il est important de pouvoir contrôler la régularité des formes. Une alternative intéressante est donnée par **l'espace des polynômes par morceaux** qui d'une part enrichit l'espace des polynômes en offrant plus de degré de liberté et d'autre part, comme on la verra dans ce cours, permet de mieux contrôler la régularité des fonctions et d'obtenir en particulier des formes lisses.

### 1.1 Espace des polynômes par morceaux

Soit  $[a, b]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$  et  $\Delta_k = \{x_1, \dots, x_k\}$  un ensemble de  $k$  points distincts de  $]a, b[$ , avec  $a < x_1 < \dots < x_k < b$ . Notons  $a = x_0$ ,  $b = x_{k+1}$ , et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$ .

**Définition 1.1** *L'espace des fonctions splines d'ordre  $m$  noté  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$  est l'espace des fonctions définies sur  $[a, b]$  telles que leur restriction à chaque intervalle  $I_i = [x_i, x_{i+1}[$ ,  $i = 0, \dots, k$ , est un polynôme de degré  $(m - 1)$  et qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $(m - 2)$  en chaque point  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .*

Globalement les fonctions splines de  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$  sont donc des fonctions continûment différentiables jusqu'à l'ordre  $(m - 2)$  (fonctions de classe  $\mathcal{C}^{m-2}$ ) si  $m \geq 2$ . Pour  $m = 1$ , il s'agit par convention de l'espace des fonctions constantes par morceaux et éventuellement discontinues aux points  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

On montre que

$$\dim(\mathcal{S}^m(\Delta_k)) = m + k. \quad (1.1)$$

### Généralisation

On note  $\mathcal{M} = (m_1, \dots, m_k)$  le  $k$ -uplet de  $\mathbb{N}^k$  avec  $1 \leq m_i \leq m$ , pour  $i = 1, \dots, k$ .

**Définition 1.2** *L'espace  $\mathcal{S}^m(\Delta_k, \mathcal{M})$  est l'espace des fonctions définies sur  $[a, b]$  telles que leur restriction à chaque intervalle  $I_i = [x_i, x_{i+1}[$ ,  $i = 0, \dots, k$ , est un polynôme de degré  $(m - 1)$  et qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre  $(m - 1 - m_i)$  en chaque point  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .*

On remarque que si  $m_i = 1$  pour tout  $i$ , on retrouve l'espace  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$  défini plus haut. Si  $m_i = m$ , les fonctions peuvent être discontinues au point  $x_i$ .

On montre que

$$\dim(\mathcal{S}^m(\Delta_k, \mathcal{M})) = m + \sum_{i=1}^k m_i. \quad (1.2)$$

## 1.2 Base de $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$

Il est clair que l'espace  $\mathcal{P}_{m-1}$  des polynômes de degré  $(m-1)$  est inclus dans  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction puissance tronquée

$$x_+^k = \begin{cases} x^k & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour  $k \geq 1$ , sa dérivée est donnée par

$$(x_+^k)' = \begin{cases} kx^{k-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Pour  $k \geq 2$ , la fonction  $x \mapsto x_+^k$  est donc continûment dérivable au point  $x = 0$ . La dérivée d'ordre  $(k-1)$  de la fonction  $x \mapsto x_+^k$  est continue et est donnée par  $(x_+^k)^{(k-1)} = k!x_+$ .

On définit de la même façon la fonction puissance tronquée translatée : soit  $y$  fixé

$$(x-y)_+^k = \begin{cases} (x-y)^k & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y. \end{cases} \quad (1.5)$$

Considérons alors les fonctions  $x \mapsto (x-x_i)_+^{m-1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Ces fonctions sont continûment dérivables jusqu'à l'ordre  $(m-2)$  et appartiennent donc à l'espace  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$ .

On a le résultat suivant :

**Proposition 1.1** *Une base de  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$  est donnée par*

$$\{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\} \cup \{(x-x_1)_+^{m-1}, (x-x_2)_+^{m-1}, \dots, (x-x_k)_+^{m-1}\}. \quad (1.6)$$

Pour l'espace  $\mathcal{S}^m(\Delta_k, \mathcal{M})$ , on a le résultat suivant :

**Proposition 1.2** *Une base de  $\mathcal{S}^m(\Delta_k, \mathcal{M})$  est donnée par*

$$\begin{aligned} \{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\} \cup \{ & (x-x_1)_+^{m-1}, \dots, (x-x_1)_+^{m-m_1}, \\ & (x-x_2)_+^{m-1}, \dots, (x-x_2)_+^{m-m_2}, \\ & \dots \\ & (x-x_k)_+^{m-1}, \dots, (x-x_k)_+^{m-m_k}\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

## 2 Les fonctions B-splines

Dans la pratique on utilise d'autres bases des espaces  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$  et  $\mathcal{S}^m(\Delta_k, \mathcal{M})$ . Il s'agit des bases obtenues par les fonctions B-splines qui ont l'avantage d'avoir un support compact et de meilleures propriétés numériques.

Nous allons définir les fonctions B-splines à partir de la différence divisée de la fonction puissance tronquée. Pour cela, il convient de rappeler la définition de la différence divisée d'une fonction.

### 2.1 Différence divisée d'une fonction

Considérons d'abord  $k + 1$  valeurs distinctes de  $\mathbb{R}$ ,  $u_0, u_1, \dots, u_k$ , et  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}$ . Notons  $p_k(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j$ , le polynôme de  $\mathcal{P}_k$  qui interpole  $f$  aux points  $u_i$ , c.-à-d. tel que  $p_k(u_i) = f(u_i)$ , pour  $i = 0, \dots, k$ . On sait que ce polynôme est unique.

**Définition 2.1** On appelle *différence divisée d'ordre  $k$  de  $f$  au points  $u_i, i = 0, \dots, k$* , que l'on note  $[u_0, \dots, u_k]f$ , le coefficient  $\alpha_k$  de  $x^k$  du polynôme d'interpolation  $p_k \in \mathcal{P}_k$  de  $f$  aux points  $u_i, i = 0, \dots, k$ .

Les formules de Cramer donnent directement l'expression de  $[u_0, \dots, u_k]f$ .

On a

$$[u_0, \dots, u_k]f = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_0 & \cdots & u_0^{k-1} & f(u_0) \\ 1 & u_1 & \cdots & u_1^{k-1} & f(u_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & u_k & \cdots & u_k^{k-1} & f(u_k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u_0 & \cdots & u_0^{k-1} & u_0^k \\ 1 & u_1 & \cdots & u_1^{k-1} & u_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & u_k & \cdots & u_k^{k-1} & u_k^k \end{vmatrix}} \quad (2.1)$$

La formule (2.1) se généralise au cas où les points  $u_i$  sont confondus. Considérons d'abord le cas  $u_0 = u_1$  et supposons que la fonction  $f$  soit dérivable en  $u_0$ . Par passage à la limite lorsque  $u_1 \rightarrow u_0$ , la formule (2.1) conduit à poser

$$[u_0, u_0, u_2, \dots, u_k]f = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_0 & \cdots & u_0^{k-1} & f(u_0) \\ 0 & 1 & \cdots & (k-1)u_0^{k-2} & f'(u_0) \\ 1 & u_2 & \cdots & u_2^{k-1} & f(u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & u_k & \cdots & u_k^{k-1} & f(u_k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u_0 & \cdots & u_0^{k-1} & u_0^k \\ 0 & 1 & \cdots & (k-1)u_0^{k-2} & k u_0^{k-1} \\ 1 & u_2 & \cdots & u_2^{k-1} & u_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & u_k & \cdots & u_k^{k-1} & u_k^k \end{vmatrix}} \quad (2.2)$$

On obtient cette expression en dérivant les secondes lignes des déterminants au numérateur et au dénominateur par rapport à la variable  $u_1$ . Pour des valeurs  $u_0, u_2, \dots, u_k$  distinctes, on montre que le déterminant au dénominateur (déterminant de Vandermonde généralisé) est distinct de 0.

**Exemple pour  $k = 1$**

$$[u_0, u_0]f = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(u_0) \\ 0 & f'(u_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = f'(u_0).$$

Pour trois points confondus  $u_0 = u_1 = u_2$ , et en supposant la fonction  $f$  deux fois différentiable en  $u_0$ , la formule (2.2) devient

$$[u_0, u_0, u_0, u_3, \dots, u_k]f = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_0 & \cdots & \cdots & u_0^{k-1} & f(u_0) \\ 0 & 1 & 2u_0 & \cdots & (k-1)u_0^{k-2} & f'(u_0) \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & (k-1)(k-2)u_0^{k-3} & f''(u_0) \\ 1 & u_3 & \cdots & \cdots & u_3^{k-1} & f(u_3) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & u_k & \cdots & \cdots & u_k^{k-1} & f(u_k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u_0 & \cdots & \cdots & u_0^{k-1} & u_0^k \\ 0 & 1 & 2u_0 & \cdots & (k-1)u_0^{k-2} & ku_0^{k-1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & (k-1)(k-2)u_0^{k-3} & k(k-1)u_0^{k-2} \\ 1 & u_3 & \cdots & \cdots & u_3^{k-1} & u_3^k \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & u_k & \cdots & \cdots & u_k^{k-1} & u_k^k \end{vmatrix}} \quad (2.3)$$

La définition se généralise aisément à un nombre quelconque de points confondus. On voit que dans ce cas-là, la différence divisée est donnée par le coefficient  $\alpha_k$  de  $x^k$  du polynôme d'interpolation  $p_k \in \mathcal{P}_k$  défini par des conditions d'interpolation sur les dérivées successives de la fonction  $f$  aux points  $u_i$  (conditions d'Hermite).

## 2.2 Propriété de la différence divisée

### Formule de récurrence

Si  $u_i \neq u_j$ , on a une formule de récurrence qui donne la différence divisée d'ordre  $k$  à partir de la différence de deux différences divisées d'ordre  $k-1$ . Cette récurrence peut d'ailleurs servir à définir la différence divisée dans le cas de points distincts.

$$[u_0, u_1, \dots, u_k]f = \frac{[u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k]f - [u_0, u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_k]f}{u_j - u_i}. \quad (2.4)$$

### Invariance par permutation des indices

Pour toute permutation  $\sigma$  sur l'ensemble des indices  $\{0, \dots, k\}$ , on a

$$[u_0, u_1, \dots, u_k]f = [u_{\sigma(0)}, u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k)}]f. \quad (2.5)$$

### Autre expression de la différence divisée pour des points distincts

Si les points  $u_i, i = 0, \dots, k$ , sont distincts, on peut exprimer le polynôme d'interpolation  $p_k$  à l'aide de la base de Lagrange. En identifiant les coefficients de  $x^k$ , on obtient alors la formule suivante :

$$[u_0, u_1, \dots, u_k]f = \sum_{i=0}^k \frac{f(u_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (u_i - u_j)}. \quad (2.6)$$

### Relation avec la dérivée $k$ -ième de $f$

Si la fonction  $f$  est dérivable à l'ordre  $k$ , il existe  $\xi \in ]\min_i(u_i), \max_i(u_i)[$  tel que

$$[u_0, u_1, \dots, u_k]f = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}. \quad (2.7)$$

En particulier si  $u_0 = \dots = u_k$ , alors  $[u_0, u_0, \dots, u_0]f = \frac{f^{(k)}(u_0)}{k!}$ .

### Différence divisée d'ordre $k$ d'un polynôme de degré $(k - 1)$

Si  $p \in \mathcal{P}_{k-1}$ , la formule (2.7) implique

$$[u_0, u_1, \dots, u_k]p = 0. \quad (2.8)$$

## 2.3 Définition des fonctions B-splines

Pour  $m \geq 1$ , considérons  $m + 1$  points ordonnés  $u_i \leq u_{i+1} \leq \dots \leq u_{i+m}$ , certains points pouvant être confondus.

Si  $u_i < u_{i+m}$ , on pose

$$Q_i^m(x) = (-1)^m [u_i, \dots, u_{i+m}](x - u)_+^{m-1}. \quad (2.9)$$

La différence divisée d'ordre  $m$  est appliquée à la fonction  $u \mapsto (x - u)_+^{m-1}$ , la variable  $x$  restant fixée. L'expression ainsi définie est une fonction qui dépend de  $x$ .

Si tous les points  $u_j, j = i, \dots, i + m$  sont confondus, on pose  $Q_i^m(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Par définition, la fonction  $x \mapsto Q_i^m(x)$  est la fonction B-spline d'ordre  $m$  basée sur les points  $u_i, \dots, u_{i+m}$  (qu'on appelle aussi noeuds). Il est clair que la fonction  $Q_i^m$  dépend des valeurs des noeuds  $u_i, \dots, u_{i+m}$ .

## 2.4 Propriétés des fonctions B-splines

Si l'on regroupe les  $m + 1$  valeurs nodales  $u_i \leq u_{i+1} \leq \dots \leq u_{i+m}$  qui définissent la fonction B-spline  $Q_i^m$  par paquets de valeurs identiques, on obtient  $d$  valeurs distinctes  $\tau_1 < \dots < \tau_d$ . Chaque valeur  $\tau_j$  est répétée  $m_j$  fois dans la liste  $u_i \leq u_{i+1} \leq \dots \leq u_{i+m}$ , avec  $1 \leq m_j \leq m$  et  $\sum_{j=1}^d m_j = m + 1$ .

Le développement par rapport à la dernière colonne du déterminant au numérateur de l'expression (2.1) de la différence divisée montre que  $Q_i^m$  est de la forme

$$Q_i^m(x) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{jk} (x - \tau_j)_+^{m-k}. \quad (2.10)$$

### Régularité et support

L'expression (2.10) montre que la fonction  $Q_i^m$  est un polynôme de degré  $(m - 1)$  sur chaque intervalle  $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, d - 1$ .

Pour  $x < \tau_1$ , les fonctions puissances tronquées sont toutes nulles et donc  $Q_i^m(x) = 0$ . Pour  $x > \tau_d$ , la définition de  $Q_i^m(x)$  montre que la différence divisée d'ordre  $m$  est appliquée à un polynôme de degré  $(m - 1)$  et donc  $Q_i^m(x) = 0$ . Le support de  $Q_i^m$  est donc contenu dans l'intervalle  $[u_i, u_{i+m}]$ .

La formule de récurrence donnée plus loin (équation (2.13)) montre que  $Q_i^m(x) > 0$  pour  $x \in ]u_i, u_{i+m}[$ . On a donc  $\text{supp}(Q_i^m) = [u_i, u_{i+m}]$ .

Les dérivées de  $Q_i^m$  en chaque point  $\tau_j$  sont continues jusqu'à l'ordre  $(m - 1 - m_j)$ . On montre de plus que les coefficients  $\alpha_{jm_j}$ ,  $j = 1, \dots, d$  dans la formule (2.10) sont distincts de zéro.

### Multiplicité maximale des noeuds

Il s'agit du cas  $d = 2$  : on a uniquement deux valeurs distinctes de noeuds. Il y a deux possibilités.

Soit  $m_1 = m$  et  $m_2 = 1$ , ce qui correspond à  $u_i = \dots = u_{i+m-1} < u_{i+m}$ . On obtient dans ce cas

$$Q_i^m(x) = \begin{cases} \frac{(u_{i+m}-x)^{m-1}}{(u_{i+m}-u_i)^m} & \text{si } u_i \leq x < u_{i+m} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Soit  $m_1 = 1$  et  $m_2 = m$ , ce qui correspond à  $u_i < u_{i+1} = \dots = u_{i+m}$ , et on obtient

$$Q_i^m(x) = \begin{cases} \frac{(x-u_i)^{m-1}}{(u_{i+m}-u_i)^m} & \text{si } u_i \leq x < u_{i+m} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.12)$$



## Remarque

Dans le cas de multiplicité maximale des noeuds, par exemple  $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+m-1}$ , la formule qui définit  $Q_i^m$  fait intervenir la dérivée d'ordre  $(m-1)$  de la fonction  $u \mapsto (x-u)_+^{m-1}$ . Pour  $x = u_i$ , la dérivée d'ordre  $(m-1)$  n'est pas définie et on a une dérivée à gauche distincte de la dérivée à droite. Pour ce point on prend par définition la dérivée à droite donnée par  $(-1)^{m-1}(m-1)!$

## Formule de récurrence

On a la formule de récurrence

$$Q_i^m(x) = \frac{(x-u_i)Q_i^{m-1}(x) + (u_{i+m}-x)Q_{i+1}^{m-1}(x)}{(u_{i+m}-u_i)}. \quad (2.13)$$

Dans cette formule, il faut considérer que  $Q_i^{m-1}$  est la fonction B-spline d'ordre  $(m-1)$  basée sur les noeuds  $u_i, \dots, u_{i+m-1}$ , et  $Q_{i+1}^{m-1}$  est la fonction B-spline d'ordre  $(m-1)$  basée sur les noeuds  $u_{i+1}, \dots, u_{i+m}$  (voir la définition générale (2.9)). Cette formule peut d'ailleurs servir à définir les fonctions B-splines par récurrence sur l'ordre  $m$ .

## Dérivée de $Q_i^m$

Pour  $m > 1$ , on a

$$\frac{d}{dx}Q_i^m(x) = (m-1) \frac{Q_i^{m-1}(x) - Q_{i+1}^{m-1}(x)}{(u_{i+m}-u_i)}. \quad (2.14)$$

## B-spline normalisée

On normalise la fonction  $Q_i^m$  de la façon suivante

$$N_i^m(x) = (u_{i+m}-u_i)Q_i^m(x). \quad (2.15)$$

La formule de récurrence pour les B-splines normalisées devient

$$N_i^m(x) = \frac{(x-u_i)}{(u_{i+m-1}-u_i)}N_i^{m-1}(x) + \frac{(u_{i+m}-x)}{(u_{i+m}-u_{i+1})}N_{i+1}^{m-1}(x). \quad (2.16)$$

La formule de dérivation s'écrit

$$\frac{d}{dx}N_i^m(x) = (m-1) \left[ \frac{N_i^{m-1}(x)}{(u_{i+m-1}-u_i)} - \frac{N_{i+1}^{m-1}(x)}{(u_{i+m}-u_{i+1})} \right]. \quad (2.17)$$

## Partition de l'unité

Considérons la suite infinie ordonnée de noeuds  $\dots \leq u_{j-m+1} \leq u_{j-m+2} \leq \dots \leq u_j < u_{j+1} \leq \dots \leq u_{j+m}$ , avec  $u_j < u_{j+1}$ .

Pour tout  $x \in [u_j, u_{j+1}]$ , on a la formule dite de partition de l'unité

$$\sum_i N_i^m(x) = 1. \quad (2.18)$$

Dans cette formule, l'indice de sommation  $i$  est pris sur l'ensemble fini des valeurs pour lesquelles la fonction correspondante  $N_i^m$  est non nulle sur l'intervalle  $[u_j, u_{j+1}]$ . Dans l'intervalle  $[u_j, u_{j+1}]$ , on a  $m$  fonctions  $N_i^m$  non nulles. Il s'agit des fonctions  $N_{j-m+1}^m, \dots, N_j^m$ . Pour tout  $x \in [u_j, u_{j+1}]$ , la formule de partition de l'unité s'écrit donc

$$\sum_i N_i^m(x) = \sum_{i=j-m+1}^j N_i^m(x) = 1. \quad (2.19)$$

Plus généralement, pour tout  $x \in [u_j, u_{j+1}]$ , on a la formule suivante

$$\sum_{i=j-m+1}^j \prod_{k=1}^{m-1} (u_{i+k} - y) N_i^m(x) = (x - y)^{m-1}. \quad (2.20)$$

En égalant les coefficients des puissances successives de  $y$ , on obtient l'expression des monômes  $x^k$ ,  $k = 0, \dots, (m-1)$ , sous forme de combinaisons linéaires des fonctions B-splines d'ordre  $m$ . On dit que l'on a reproduction des polynômes de degré  $(m-1)$  par les fonctions B-splines d'ordre  $m$ . En particulier, on obtient les égalités

$$\sum_{i=j-m+1}^j \frac{\sum_{k=1}^{m-1} u_{i+k}}{m-1} N_i^m(x) = x, \quad (2.21)$$

et

$$\sum_{i=j-m+1}^j \left( \prod_{k=1}^{m-1} u_{i+k} \right) N_i^m(x) = x^{m-1}. \quad (2.22)$$

## Noeuds équidistants

Considérons des noeuds entiers  $u_i = i$ , avec  $i \in \mathbb{N}$ .

À partir de la définition (2.9), on obtient

$$Q_0^m(x) = (-1)^m [0, 1, \dots, m] (x - u)_+^{m-1}. \quad (2.23)$$

Cette fonction est appelée B-spline de référence d'ordre  $m$ . On la note simplement  $Q^m(x)$ . De même, la B-spline normalisée de référence d'ordre  $m$  est définie par  $N_0^m(x) = mQ^m(x)$  et est notée  $N^m(x)$ .

Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on montre que la B-spline  $N_i^m(x)$  s'exprime à partir de  $N^m(x)$ . On a

$$N_i^m(x) = N^m(x - i). \quad (2.24)$$

Pour les formules de récurrence et de dérivation, on obtient

$$N^m(x) = \frac{xN^{m-1}(x) + (m-x)N^{m-1}(x-1)}{m-1}, \quad (2.25)$$

et

$$\frac{d}{dx}N^m(x) = N^{m-1}(x) - N^{m-1}(x-1). \quad (2.26)$$

La B-spline de référence est symétrique par rapport au point  $\frac{m}{2}$  milieu de  $[0, m]$ .

### Quelques valeurs de fonctions B-splines à connaître

La fonction  $N^1$  est donnée par

$$N^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.27)$$

La récurrence (2.25) montre que la fonction  $N^2$  est la fonction chapeau définie sur l'intervalle  $[0, 2]$  par :

$$N^2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.28)$$

À l'aide de la symétrie des fonctions, des formules de partition de l'unité et de récurrence, on obtient facilement les valeurs particulières :

$$N^3(1) = N^3(2) = \frac{1}{2}, \quad N^4(1) = N^4(3) = \frac{1}{6}, \quad N^4(2) = \frac{2}{3}.$$

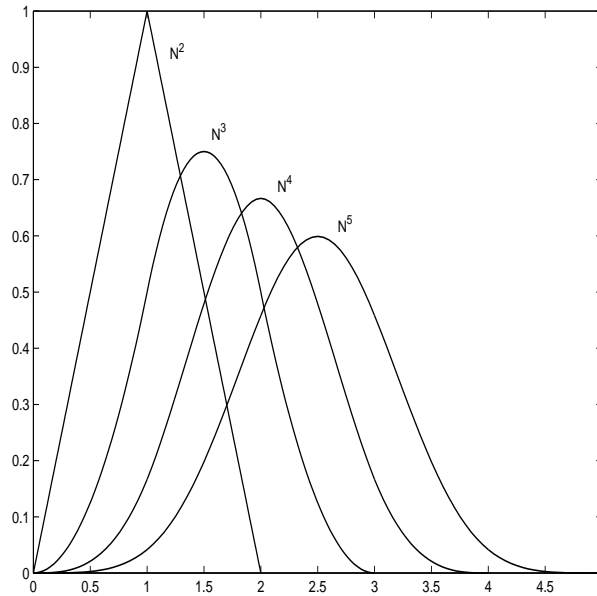


FIG. 1 – B-splines de référence d'ordre  $m = 2, 3, 4, 5$

Si les noeuds  $u_i$  sont équidistants, c.-à-d.  $u_{i+1} - u_i = h, \forall i$ , avec un pas  $h > 0$  constant, alors la B-spline de référence donne

$$N_i^m(x) = N^m\left(\frac{x - u_i}{h}\right) \quad (2.29)$$

## 2.5 Base de $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$

Pour montrer l'indépendance des fonctions  $Q_i^m$  (et donc des fonctions  $N_i^m$ ) on utilise le lemme suivant.

**Lemme 2.1** Soient  $d$  valeurs distincts  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d$ , et  $d$  valeurs entières  $m_i$ ,  $1 \leq m_i \leq m$ . Alors si  $\sum_{i=1}^d m_i \leq m$ , les polynômes  $(x - \tau_i)^{m-j_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ ,  $j_i = 1, \dots, m_i$ , sont linéairement indépendants.

**Proposition 2.1** Les fonctions B-splines  $N_{i-m+1}^m, \dots, N_i^m$  relatives à la suite de points nodaux  $\dots \leq u_{i-m+1} \leq \dots \leq u_i < u_{i+1} \leq \dots$ , sont indépendantes sur l'intervalle  $[u_i, u_{i+1}]$ .

On peut donc définir une base de  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$  constituée de fonctions B-splines.

**Proposition 2.2** Les  $(m+k)$  B-splines normalisées  $N_i^m$ ,  $i = 0, \dots, (m+k-1)$ , construites à partir du vecteur nodal

$$u_0 \leq \dots \leq u_{m-1} \leq a < u_m = x_1 < u_{m+1} = x_2 < \dots < u_{m+k-1} = x_k < b \leq u_{m+k} \leq \dots \leq u_{2m+k-1},$$

forment une base de l'espace  $\mathcal{S}^m(\Delta_k)$  quelque soit le choix des noeuds  $u_0 \leq \dots \leq u_{m-1} \leq a$  et  $b \leq u_{m+k} \leq \dots \leq u_{2m+k-1}$ .

Dans la pratique, on utilise les deux vecteurs nodaux suivants :

- **Vecteur nodal de type I** (points nodaux distincts aux extrémités) : on prend  $u_0 < \dots < u_{m-1} = a$  et  $b = u_{m+k} < \dots < u_{2m+k-1}$ .
- **Vecteur nodal de type II** (points nodaux confondus aux extrémités) : on prend  $u_0 = \dots = u_{m-1} = a$  et  $b = u_{m+k} = \dots = u_{2m+k-1}$ .

Pour  $m = 4$ ,  $\Delta_4 = \{1, 2, 3, 4\}$  et l'intervalle  $[a, b] = [0, 5]$ , la figure 2 montre les 8 fonctions de base B-splines de  $\mathcal{S}^4(\Delta_4)$  obtenues avec le vecteur nodal de type II :  $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0, u_4 = 1, u_5 = 2, u_6 = 3, u_7 = 4, u_8 = u_9 = u_{10} = u_{11} = 5$ .

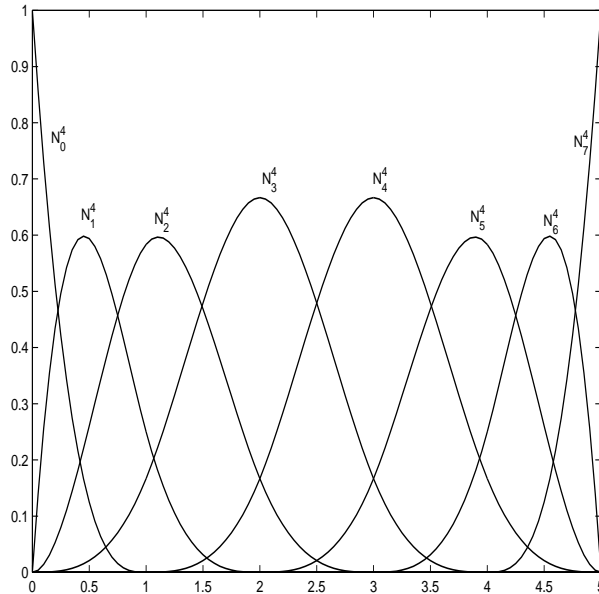


FIG. 2 – Base de  $\mathcal{S}^4(\Delta_4)$ , avec  $\Delta_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

La proposition précédente se généralise pour l'espace  $\mathcal{S}^m(\Delta_k, \mathcal{M})$ . On utilise les notations des paragraphes (1.1), (1.2), et on pose  $K = \sum_{i=1}^k m_i$ .

**Proposition 2.3** *Les  $(m + K)$  B-splines normalisées  $N_i^m, i = 0, \dots, (m + K - 1)$ , construites à partir du vecteur nodal*

$$\begin{aligned} u_0 \leq \dots \leq u_{m-1} \leq a < x_1 = u_m = \dots = u_{m+m_1-1} < \dots < \\ < x_k = u_{m+K-m_k} = \dots = u_{m+K-1} < b \leq u_{m+K} \leq \dots \leq u_{2m+K-1} \end{aligned}$$

*forment une base de l'espace  $\mathcal{S}^m(\Delta_k, \mathcal{M})$  quelque soit le choix des noeuds  $u_0 \leq \dots \leq u_{m-1} \leq a$  et  $b \leq u_{m+K} \leq \dots \leq u_{2m+K-1}$ .*

## 3 Courbes B-splines

### 3.1 Définition des courbes B-splines

Une courbe B-spline d'ordre  $m$  est une courbe paramétrique  $P$  définie par :

$$P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) P_i, \quad (3.1)$$

où les fonctions  $N_i^m$  sont des fonctions B-splines normalisées et  $P_i$  sont des points de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  courbe dans le plan,  $d = 3$  courbe dans l'espace). Les points  $P_i$  sont appelés points de contrôle de la courbe B-spline. Ils déterminent le polygone de contrôle de la courbe  $P$ .

Pour définir une courbe B-spline il faut donc se donner des points de contrôle  $P_i$  et un vecteur nodal permettant de définir les fonctions B-splines  $N_i^m$ .

Les  $(n + 1)$  fonctions B-splines  $N_i^m$ , d'ordre  $m$ , sont déterminées par un vecteur nodal de dimension  $(n + 1 + m)$ ,  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+m}$ .

L'image  $P([u_k, u_{k+1}])$  définit un arc de courbe délimité par les points  $P(u_k), P(u_{k+1})$ . Sur chaque arc de courbe la fonction  $P(u)$  est polynomiale de degré  $(m - 1)$ . Les raccords entre les différents arcs sont de régularité maximale  $\mathcal{C}^{m-2}$  si les points nodaux sont distincts.

Pour assurer la coïncidence de la courbe avec les points extrêmes  $P_0$  et  $P_n$ , on considère un vecteur nodal de type II. On prend donc

$$u_0 = u_1 = \dots = u_{m-1} \leq u_m \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+m}. \quad (3.2)$$

En effet, pour  $u = u_0$ , on a  $N_0^m(u_0) = 1$  et  $N_i^m(u_0) = 0$  pour tout  $i > 0$ . Donc  $P(u_0) = P_0$ .

De même, pour  $u = u_{n+m}$ , on a  $N_n^m(u_{n+m}) = 1$  et  $N_i^m(u_{n+m}) = 0$  pour tout  $i < n$ . On a donc  $P(u_{n+m}) = P_n$ .

Pour un vecteur nodal de type II, la courbe  $P(u)$  possède en outre la propriété d'être tangente à son polygone de contrôle aux points extrêmes  $P_0$  et  $P_n$ . En effet, en utilisant la formule (2.17) de dérivation des fonctions  $N_i^m$ , on obtient la dérivée de  $P(u)$  :

$$P'(u) = (m - 1) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{N_{i+1}^{m-1}(u)}{(u_{i+m} - u_{i+1})} (P_{i+1} - P_i). \quad (3.3)$$

Ainsi

$$P'(u_0) = \frac{m - 1}{(u_m - u_1)} (P_1 - P_0) = \frac{m - 1}{(u_m - u_1)} \overrightarrow{P_0 P_1}, \quad (3.4)$$

et

$$P'(u_{n+m}) = \frac{m - 1}{(u_{n+m-1} - u_n)} (P_n - P_{n-1}) = \frac{m - 1}{(u_{n+m-1} - u_n)} \overrightarrow{P_{n-1} P_n}. \quad (3.5)$$

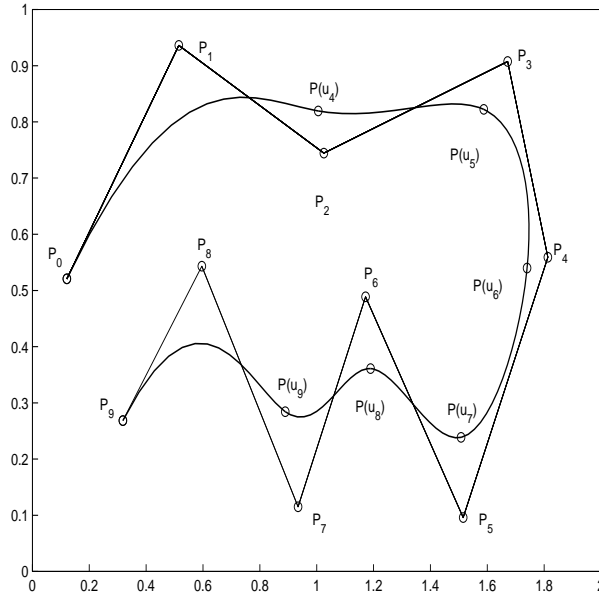


FIG. 3 – Courbe B-spline d'ordre  $m = 4$

### 3.2 Autres propriétés des courbes B-splines

#### Modification d'un point de contrôle

Si l'on modifie un point de contrôle  $P_i$  de la courbe  $P(u)$ ,  $m$  arcs de courbe de  $P(u)$  sont modifiés. En effet, l'expression de  $P(u)$  montre que c'est le coefficient de la fonction  $N_i^m$  qui est modifié et donc  $m$  arcs de courbe sont modifiés puisque la fonction  $N_i^m$  est définie sur les  $m$  intervalles  $[u_i, u_{i+1}], \dots, [u_{i+m-1}, u_{i+m}]$ .

#### Enveloppe convexe des points de contrôles

Du fait que pour tout  $u \in [u_0, u_{n+m}]$ , on a  $\sum_{i=0}^n N_i^m(u) = 1$  et  $N_i^m(u) \geq 0$ , la définition de la courbe  $P$  montre que  $P(u)$  appartient à l'enveloppe convexe des points de contrôle  $P_i, i = 0, \dots, n$ . Plus précisément, pour  $u \in [u_k, u_{k+1}]$ , les seules fonctions  $N_i^m$  non nulles en  $u$  sont les fonctions  $N_{k-m+1}^m, \dots, N_k^m$ . On a donc

$$P(u) = \sum_{i=k-m+1}^k N_i^m(u) P_i, \text{ pour } u \in [u_k, u_{k+1}] \quad (3.6)$$

et le point  $P(u)$  appartient à l'enveloppe convexe des points  $P_{k-m+1}, \dots, P_k$ .

#### Quelques cas particuliers

Pour  $m = 2$ , la courbe  $P(u)$  coïncide avec son polygone de contrôle. De manière générale, plus  $m$  augmente, plus la courbe  $P(u)$  s'éloigne de son polygone de contrôle.

Considérons le cas particulier  $m = 3$ . L'égalité (3.6) appliquée à  $u = u_k$  montre que  $P(u_k) \in [P_{k-2}, P_{k-1}]$ .

De plus, si  $P_{k-2} = P_{k-1}$ , on a  $P(u_k) = P_{k-2} = P_{k-1}$  et donc, sachant que  $P(u_{k-1}) \in [P_{k-3}, P_{k-2}]$ , on obtient que  $[P(u_{k-1}), P(u_k)] \subset [P_{k-3}, P_{k-2}]$ .

### 3.3 Algorithme d'évaluation de De Boor

L'algorithme de De Boor permet de calculer  $P(\bar{u})$  correspondant à la valeur du paramètre  $\bar{u}$ . Bien entendu, la formule de définition (3.1) de  $P(u)$  montre qu'il suffit pour cela de calculer les valeurs  $N_i^m(\bar{u})$  et de les multiplier ensuite par les valeurs des points de contrôle  $P_i$ . L'algorithme de De Boor utilise la formule de récurrence (2.16) des fonctions  $N_i^m(\bar{u})$  et regroupe ensuite les coefficients associés à chaque fonction  $N_i^{m-1}$  d'ordre  $(m-1)$  qui apparaissent dans la récurrence de  $N_i^m$ . On obtient ainsi un algorithme de complexité optimale. Cette propriété est intéressante lorsqu'il s'agit par exemple de représenter graphiquement une courbe B-spline ou une surface B-spline. En effet, dans ce cas on doit utiliser l'algorithme d'évaluation pour calculer un grand nombre de points de la courbe et ensuite joindre par des segments de droite les points obtenus. On comprend alors que cet algorithme joue un rôle central dans l'utilisation des fonctions B-splines comme outils de CAO.

On décrit d'abord l'algorithme dans le cas particulier où  $m = 4$  et  $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1}]$ .

#### Étape I

1) On considère  $\bar{u}$  dans l'intervalle  $[u_k, u_{k+3}]$ . On a donc

$$\bar{u} = \alpha_0^1 u_k + (1 - \alpha_0^1) u_{k+3}, \quad (3.7)$$

avec  $\alpha_0^1 \in [0, 1]$  (plus exactement,  $\alpha_0^1 = \frac{u_{k+3} - \bar{u}}{u_{k+3} - u_k}$ ). On définit le point  $P_k^1$  sur le segment  $[P_{k-1}, P_k]$  suivant le "même rapport"  $\alpha_0^1$  :

$$P_k^1(\bar{u}) = P_k^1 = \alpha_0^1 P_{k-1} + (1 - \alpha_0^1) P_k. \quad (3.8)$$

2) On considère  $\bar{u}$  dans l'intervalle  $[u_{k-1}, u_{k+2}]$ . On a donc

$$\bar{u} = \alpha_1^1 u_{k-1} + (1 - \alpha_1^1) u_{k+2}, \quad (3.9)$$

avec  $\alpha_1^1 \in [0, 1]$ . On définit le point  $P_{k-1}^1$  sur le segment  $[P_{k-2}, P_{k-1}]$  :

$$P_{k-1}^1 = \alpha_1^1 P_{k-2} + (1 - \alpha_1^1) P_{k-1}. \quad (3.10)$$

3) On considère  $\bar{u}$  dans l'intervalle  $[u_{k-2}, u_{k+1}]$ . On a donc

$$\bar{u} = \alpha_2^1 u_{k-2} + (1 - \alpha_2^1) u_{k+1}, \quad (3.11)$$

avec  $\alpha_2^1 \in [0, 1]$ . On définit le point  $P_{k-2}^1$  sur le segment  $[P_{k-3}, P_{k-2}]$  :

$$P_{k-2}^1 = \alpha_2^1 P_{k-3} + (1 - \alpha_2^1) P_{k-2}. \quad (3.12)$$



À l'étape I, on a ainsi généré trois points  $P_k^1, P_{k-1}^1, P_{k-2}^1$ .

## Étape II

1) On considère  $\bar{u}$  dans l'intervalle  $[u_k, u_{k+2}]$ . On a donc

$$\bar{u} = \alpha_0^2 u_k + (1 - \alpha_0^2) u_{k+2}, \quad (3.13)$$

avec  $\alpha_0^2 \in [0, 1]$ . On définit le point  $P_k^2$  sur le segment  $[P_{k-1}^1, P_k^1]$  :

$$P_k^2 = \alpha_0^2 P_{k-1}^1 + (1 - \alpha_0^2) P_k^1. \quad (3.14)$$

2) On considère  $\bar{u}$  dans l'intervalle  $[u_{k-1}, u_{k+1}]$ . On a donc

$$\bar{u} = \alpha_1^2 u_{k-1} + (1 - \alpha_1^2) u_{k+1}, \quad (3.15)$$

avec  $\alpha_1^2 \in [0, 1]$ . On définit le point  $P_{k-1}^2$  sur le segment  $[P_{k-2}^1, P_{k-1}^1]$  :

$$P_{k-1}^2 = \alpha_1^2 P_{k-2}^1 + (1 - \alpha_1^2) P_{k-1}^1. \quad (3.16)$$

À l'étape II, on a ainsi généré deux points  $P_k^2, P_{k-1}^2$ .

## Étape III

1) On considère  $\bar{u}$  dans l'intervalle  $[u_k, u_{k+1}]$ . On a donc

$$\bar{u} = \alpha_0^3 u_k + (1 - \alpha_0^3) u_{k+1}, \quad (3.17)$$

avec  $\alpha_0^3 \in [0, 1]$ . On définit le point  $P_k^3$  sur le segment  $[P_{k-1}^2, P_k^2]$  :

$$P_k^3 = \alpha_0^3 P_{k-1}^2 + (1 - \alpha_0^3) P_k^2. \quad (3.18)$$

Le point  $P_k^3$  est le point recherché  $P(\bar{u})$ .

La démonstration de cet algorithme repose sur l'égalité suivante :

$$P(\bar{u}) = \sum_{i=k-3}^k N_i^4(\bar{u}) P_i = \sum_{i=k-3}^k \left( \frac{(\bar{u} - u_i)}{(u_{i+3} - u_i)} N_i^3(\bar{u}) + \frac{(u_{i+4} - \bar{u})}{(u_{i+4} - u_{i+1})} N_{i+1}^3(\bar{u}) \right) P_i = \sum_{i=k-2}^k N_i^3(\bar{u}) P_i^1, \quad (3.19)$$

avec  $P_i^1$  donné par l'étape I. Cette égalité est répétée jusqu'à obtenir  $P(\bar{u}) = N_k^1(\bar{u}) P_k^3 = P_k^3$ .

---

## Algorithme de De Boor - Cas général

Soit une courbe B-spline  $P(u)$  d'ordre  $m \geq 2$  et  $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1}]$ .

**pour**  $i = 0$  à  $m - 1$  **faire** (boucle d'initialisation)

$$P_{k-i}^0 = P_{k-i}$$

**fin pour**  $i$

**pour**  $j = 1$  à  $m - 1$  **faire** (boucle des étapes)

**pour**  $i = 0$  à  $m - 1 - j$  (boucle de génération des  $m - j$  points à chaque étape)

$$\alpha_i^j = \frac{(u_{k-i+m-j} - \bar{u})}{(u_{k-i+m-j} - u_{k-i})}$$

$$P_{k-i}^j = \alpha_i^j P_{k-i-1}^{j-1} + (1 - \alpha_i^j) P_{k-i}^{j-1}$$

**fin pour**  $i$

**fin pour**  $j$

On obtient  $P(\bar{u}) = P_k^{m-1}$

---

### Remarque

Le coefficient  $\alpha_i^j \in [0, 1]$  défini plus haut vérifie l'égalité  $\bar{u} = \alpha_i^j u_{k-i} + (1 - \alpha_i^j) u_{k-i+m-j}$ .

## 4 Polynômes de Bézier

Les polynômes de Bézier sont définis par :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad (4.1)$$

pour  $t \in [0, 1]$ , et  $i = 0, \dots, n$ .

L'exposant  $n$  est le degré des polynômes  $B_i^n(t)$ . On va voir que les polynômes  $B_i^n$  constituent une base de  $\mathcal{P}_n$  et qu'ils font partie d'une famille particulière de fonctions B-splines issues d'un vecteur nodal particulier.

Donnons quelques exemples de polynômes  $B_i^n(t)$  : pour

$n = 0$  , on a  $B_0^0(t) = 1$ ,

$n = 1$  , on a  $B_0^1(t) = (1-t)$ ,  $B_1^1(t) = t$ ,

$n = 2$  , on a  $B_0^2(t) = (1-t)^2$ ,  $B_1^2(t) = 2(1-t)t$ ,  $B_2^2(t) = t^2$ .

### 4.1 Propriétés élémentaires des polynômes $B_i^n(t)$ .

Les propriétés suivantes des polynômes  $B_i^n$  découlent directement de leur définition.

- Positivité :

$$\forall t \in [0, 1], B_i^n(t) \geq 0. \quad (4.2)$$

- Valeurs aux bords de l'intervalle de définition :

$$B_0^n(0) = 1, \text{ et } B_i^n(0) = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

$$B_n^n(1) = 1, \text{ et } B_i^n(1) = 0, \text{ pour } i = 0, \dots, n-1. \quad (4.4)$$

- Récurrence :

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \quad (4.5)$$

- Dérivée :

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)). \quad (4.6)$$

- Dérivée d'ordre  $k$  :

$$\frac{d^k}{dt^k} B_i^n(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k B_i^n(t) \quad (4.7)$$

où on pose  $\Delta B_i^n(t) = B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)$  et  $\Delta^k B_i^n(t) = \Delta(\Delta^{k-1} B_i^n(t))$ .

- Partition de l'unité :

$$\forall t \in [0, 1], \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1. \quad (4.8)$$

- Symétrie :

$$\forall t \in [0, 1], B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t). \quad (4.9)$$

- Maximum :

$$B_i^n\left(\frac{i}{n}\right) = \max_{t \in [0,1]} B_i^n(t). \quad (4.10)$$

- Convergence dans  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  muni de la norme  $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$  (théorème de Bernstein) : pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ , on définit le polynôme de degré  $n$ ,  $P_n(f)(t) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(t)$ . On a alors

$$\|P_n(f) - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

pour  $n \rightarrow \infty$ .

- Base de  $\mathcal{P}_n$  : les polynômes  $B_i^n(t), i = 0, \dots, n$ , constituent une base de l'espace  $\mathcal{P}_n$ .  
En particulier, on a une expression simple du monôme  $t$  dans la base  $B_i^n(t)$  :

$$\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) = t. \quad (4.12)$$

## 4.2 Courbes de Bézier

En prenant des combinaisons linéaires des polynômes  $B_i^n(t)$ , on peut construire, de la même façon que pour les fonctions B-splines, des courbes paramétriques.

À partir des points  $P_i, i = 0, \dots, n$ , appartenant à  $\mathbb{R}^2$  ou à  $\mathbb{R}^3$ , on définit la courbe paramétrique

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i. \quad (4.13)$$

La base des polynômes  $B_i^n(t)$  permet de réaliser un "contrôle géométrique" de la courbe  $P(t)$  à partir des points  $P_i$ . Il faut remarquer que dans l'expression (4.13) le nombre de points de contrôle  $P_i$  utilisés correspond au degré +1 des polynômes  $B_i^n(t)$ .

### Propriétés de la courbe $P(t)$

De la positivité des fonctions  $B_i^n(t)$  et de la propriété de la partition de l'unité, on déduit que pour toute valeur du paramètre  $t$ , le point  $P(t)$  appartient à l'enveloppe convexe des points de contrôle  $P_i, i = 0, \dots, n$ .

Aux extrémités, on a  $P(0) = P_0$  et  $P(1) = P_n$ .

La dérivée de  $P(t)$  est donnée par

$$\frac{d}{dt} P(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \Delta P_i, \quad (4.14)$$

avec  $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ .

On a donc  $\frac{d}{dt} P(0) = n(P_1 - P_0)$  et  $\frac{d}{dt} P(1) = n(P_n - P_{n-1})$ .

### Algorithme d'évaluation de De Casteljau

De la même façon que pour les courbes B-splines, on a un algorithme de complexité minimale qui donne la valeur  $P(\bar{t})$  pour  $\bar{t}$  fixé. Il utilise la formule de récurrence (4.5) des fonctions  $B_i^n(t)$ .

### Algorithme d'évaluation de De Casteljau

Soit  $P(t)$  une courbe de Bézier de degré  $n$ .

**pour**  $i = 0$  **à**  $n$  **faire** (initialisation)  
 $P_i^0 = P_i$   
**fin pour**  $i$

**pour**  $j = 1$  **à**  $n$  **faire**  
**pour**  $i = 0$  **à**  $n - j$

$$P_i^j = (1 - \bar{t})P_i^{j-1} + \bar{t}P_{i+1}^{j-1} \quad (4.15)$$

**fin pour**  $i$   
**fin pour**  $j$   
On a  $P(\bar{t}) = P_0^n$

On peut représenter les différentes étapes de l'algorithme de De Casteljau par le tableau triangulaire suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & P_n^0 \\ & & & & & & P_{n-1}^0 & P_{n-1}^1 \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & & & & P_1^0 & P_1^1 & \cdots & P_1^{n-1} \\ & & & & & & P_0^0 & P_0^1 & \cdots & P_0^{n-1} & P_0^n \end{array}$$

Chaque point  $P_i^j$  est obtenu par une combinaison convexe (récurrence (4.15)) des points  $P_i^{j-1}$  et  $P_{i+1}^{j-1}$  situés sur la colonne à gauche de  $P_i^j$  et respectivement sur la même ligne et sur la ligne immédiatement au-dessus.

La proposition suivante montre l'équivalence entre les fonctions de Bézier et une famille particulière de fonctions B-splines.

**Proposition 4.1** *Les  $m$  fonctions B-splines  $N_i^m(t)$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ , obtenues en prenant le vecteur nodal  $u_0 = \dots = u_{m-1} = 0$  et  $u_m = \dots = u_{2m-1} = 1$ , vérifient l'égalité*

$$N_i^m(t) = B_i^{m-1}(t), \forall t \in [0, 1].$$

On montre cette proposition par récurrence sur le degré  $m$ .

Les propriétés des polynômes de Bézier sont ainsi une conséquence directe de cette équivalence. En particulier, l'algorithme de De Casteljau s'obtient à partir de l'algorithme de De Boor appliqué à ce vecteur nodal particulier.

### 4.3 Fonctions et courbes paramétriques

Considérons une fonction B-spline  $y(u)$  de la forme

$$y(u) = \sum_{i=0}^n y_i N_i^m(u),$$

où  $y_i \in \mathbb{R}$ . On veut exprimer cette fonction sous la forme d'une courbe B-spline paramétrique  $u \mapsto P(u) = (u, y(u))$  de la forme standard (3.1). Pour cela, il faut déterminer

les coordonnées des points de contrôle  $P_i$ . L'ordonnée de  $P_i$  est évidemment égale à  $y_i$ . L'égalité (2.21) donne

$$\sum_{i=0}^n \frac{u_{i+1} + \dots + u_{i+m-1}}{m-1} N_i^m(u) = u.$$

On a ainsi

$$P(u) = (u, y(u)) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) P_i,$$

avec  $P_i = \left( \frac{u_{i+1} + \dots + u_{i+m-1}}{m-1}, y_i \right)$ .

De la même façon, pour une fonction  $y(t)$  de Bézier de la forme

$$y(t) = \sum_{i=0}^n y_i B_i^n(t),$$

on obtient la courbe paramétrique correspondante

$$P(t) = (t, y(t)) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i,$$

en prenant  $P_i = \left( \frac{i}{n}, y_i \right)$ .

On notera au passage que l'égalité (4.12) est obtenue à partir de (2.21) en utilisant le vecteur nodal particulier donné par la proposition (4.1).

## 5 Surfaces B-splines

On définit des surfaces B-splines paramétriques  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  par produit tensoriel des fonctions B-splines :

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} N_i^{m_1}(u) N_j^{m_2}(v) P_{ij}, \quad (5.1)$$

où les points de contrôle  $P_{ij}$  appartiennent à  $\mathbb{R}^3$ . On appelle polygone (ou aussi polyèdre) de contrôle l'ensemble des points  $P_{ij}, i = 0, \dots, n_1, j = 0, \dots, n_2$ .

Pour définir les fonctions B-splines  $N_i^{m_1}, N_j^{m_2}$ , il faut se donner deux vecteurs nodaux : un vecteur nodal  $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n_1+m_1}]$  pour les fonctions  $N_i^{m_1}(u)$ , et un vecteur nodal  $V = [v_0, v_1, \dots, v_{n_2+m_2}]$  pour les fonctions  $N_j^{m_2}(v)$ .

On choisit dorénavant pour  $U$  et  $V$  des vecteurs nodaux de type II (noeuds confondus aux extrémités). On a ainsi

$$U = [u_0 = \dots = u_{m_1-1}, u_{m_1}, \dots, u_{n_1}, u_{n_1+1} = \dots = u_{n_1+m_1}],$$

et

$$V = [v_0 = \dots = v_{m_2-1}, v_{m_2}, \dots, v_{n_2}, v_{n_2+1} = \dots = v_{n_2+m_2}].$$

En prenant les polynômes de Bézier  $B_i^n(t)$ , on génère de la même façon, une surface de Bézier :

$$P(t, s) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_i^{n_1}(t) B_j^{n_2}(s) P_{ij}, \quad (5.2)$$

pour  $t, s \in [0, 1]$ .

### 5.1 Propriétés de la surface $P(u, v)$

Si l'on fixe le paramètre  $\bar{v}$ , on parcourt sur la surface  $P(u, v)$  la courbe définie par

$$P(u, \bar{v}) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(u) \left[ \sum_{j=0}^{n_2} N_j^{m_2}(\bar{v}) P_{ij} \right]. \quad (5.3)$$

On voit qu'il s'agit d'une courbe B-spline ayant pour points de contrôle les points  $P_i(\bar{v}) = \sum_{j=0}^{n_2} N_j^{m_2}(\bar{v}) P_{ij}$ .

En général les points  $P_i(\bar{v})$  ne font pas partie du polyèdre de contrôle  $P_{ij}$  de la surface  $P(u, v)$ . Cependant, pour la valeur  $\bar{v} = v_0$ , on a  $N_0^{m_2}(v_0) = 1$  et  $N_j^{m_2}(v_0) = 0$ , pour  $j = 1, \dots, n_2 + m_2$ . Donc  $P_i(v_0) = P_{i0}$ , et

$$P(u, v_0) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(u) P_{i0}. \quad (5.4)$$

De même, pour  $\bar{v} = v_{n_2+m_2}$ , on a

$$P(u, v_{n_2+m_2}) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(u) P_{in_2}. \quad (5.5)$$

Symétriquement, en fixant le paramètre  $\bar{u}$ , on parcourt sur la surface la courbe définie par

$$P(\bar{u}, v) = \sum_{j=0}^{n_2} N_j^{m_2}(v) \left[ \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(\bar{u}) P_{ij} \right]. \quad (5.6)$$

Il s'agit de la courbe B-spline ayant pour points de contrôle les points  $P_j(\bar{u}) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(\bar{u}) P_{ij}$ .

Pour  $\bar{u} = u_0$ , on trouve

$$P(u_0, v) = \sum_{j=0}^{n_2} N_j^{m_2}(v) P_{0j}, \quad (5.7)$$

et pour  $\bar{u} = u_{n_1+m_1}$ , on a

$$P(u_{n_1+m_1}, v) = \sum_{j=0}^{n_2} N_j^{m_2}(v) P_{n_1j}. \quad (5.8)$$

Aux quatre extrémités, on a

$$\begin{aligned} P(u_0, v_0) &= P_{00}, & P(u_0, v_{n_2+m_2}) &= P_{0n_2}, \\ P(u_{n_1+m_1}, v_0) &= P_{n_10}, & P(u_{n_1+m_1}, v_{n_2+m_2}) &= P_{n_1n_2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Le plan tangent à la surface  $P(u, v)$  est défini par les deux vecteurs dérivées partielles  $P'_u(u, v)$  et  $P'_v(u, v)$ . La formule de dérivation (3.3) donne pour la surface

$$P'_u(u, v) = (m_1 - 1) \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2} N_{i+1}^{m_1-1}(u) N_j^{m_2}(v) Q_{ij}, \quad (5.10)$$

où  $Q_{ij} = \frac{P_{i+1j} - P_{ij}}{(u_{i+m_1} - u_{i+1})}$ , et

$$P'_v(u, v) = (m_2 - 1) \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2-1} N_i^{m_1}(u) N_{j+1}^{m_2-1}(v) R_{ij}, \quad (5.11)$$

où  $R_{ij} = \frac{P_{ij+1} - P_{ij}}{(v_{j+m_2} - v_{j+1})}$ .

En particulier,  $P'_u(u_0, v_0) = \frac{m_1-1}{(u_{m_1}-u_1)} (P_{10} - P_{00})$  et  $P'_v(u_0, v_0) = \frac{m_2-1}{(v_{m_2}-v_1)} (P_{01} - P_{00})$ . Le plan tangent est ici déterminé par les trois points de contrôle  $P_{00}, P_{01}, P_{10}$ . On a un résultat analogue aux trois autres extrémités de la surface.

Du fait que le support des fonctions B-splines est compact, on déduit que pour  $u \in [u_k, u_{k+1}]$  et  $v \in [v_l, v_{l+1}]$ , on a

$$P(u, v) = \sum_{i=k-m_1+1}^k \sum_{j=l-m_2+1}^l N_i^{m_1}(u) N_j^{m_2}(v) P_{ij}. \quad (5.12)$$

Le point  $P(u, v)$  est dans l'enveloppe convexe des  $m_1 \times m_2$  points de contrôle  $P_{ij}$ ,  $i = k - m_1 + 1, \dots, k$ , et  $j = l - m_2 + 1, \dots, l$ .

## Algorithme d'évaluation d'un point de la surface



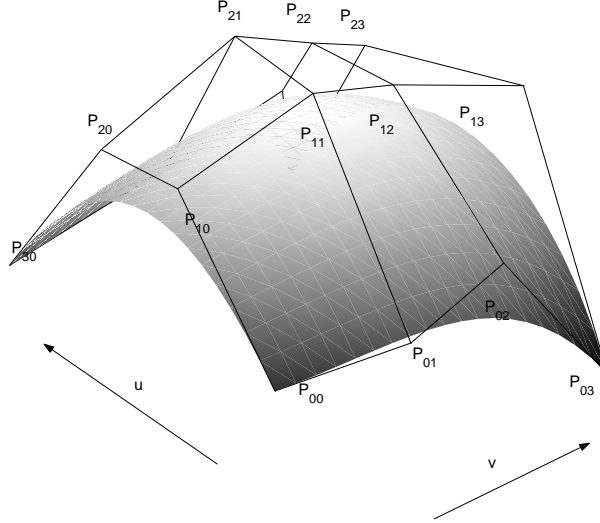


FIG. 4 – Surface B-spline d'ordre  $m_1 = m_2 = 4$

Pour calculer

$$P(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(\bar{u}) \left[ \sum_{j=0}^{n_2} N_j^{m_2}(\bar{v}) P_{ij} \right], \quad (5.13)$$

on utilise l'algorithme de De Boor dans les deux étapes suivantes :

- 1) on évalue d'abord les  $(n_1 + 1)$  points  $P_i(\bar{v}) = \sum_{j=0}^{n_2} N_j^{m_2}(\bar{v}) P_{ij}$ ,
- 2) on évalue ensuite  $P(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(\bar{u}) P_i(\bar{v})$ .

## 5.2 Surfaces particulières

### 1) Surfaces cylindriques

Une surface cylindrique est définie à partir d'une courbe  $(C)$  et d'un vecteur de translation  $\vec{V}$ . Si la courbe  $(C)$  est une courbe B-spline d'équation paramétrique  $P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) P_i$ , la surface cylindrique B-spline est donnée par

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) \sum_{j=0}^1 N_j^2(v) P_{ij}, \quad (5.14)$$

avec  $P_{i0} = P_i$  et  $P_{i1} = P_i + \vec{V}$ .

Pour  $\bar{u}$  fixé, on a

$$P(\bar{u}, v) = \sum_{j=0}^1 N_j^2(v) \left[ \sum_{i=0}^n N_i^m(\bar{u}) P_{ij} \right], \quad (5.15)$$

et on décrit un segment d'extrémités  $[\sum_{i=0}^n N_i^m(\bar{u}) P_i]$  et  $[\sum_{i=0}^n N_i^m(\bar{u}) P_i] + \vec{V}$ .

### 2) Surfaces réglées

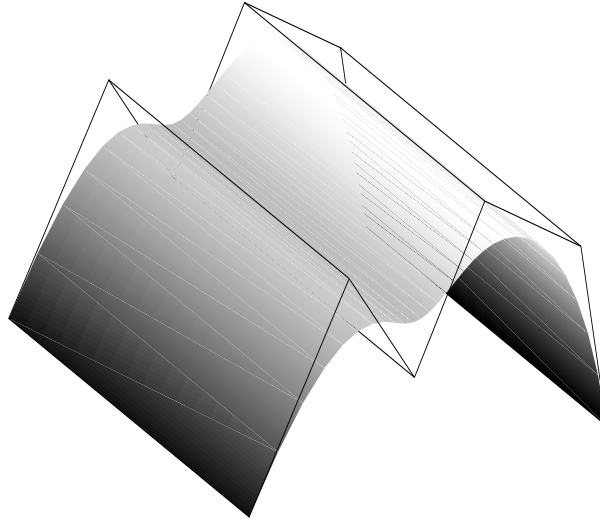


FIG. 5 – Surface cylindrique

Une surface réglée est définie par deux courbes jointes par des segments de droites. Si l'on considère deux courbes B-splines  $P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u)P_i$  et  $Q(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u)Q_i$  de même ordre  $m$  et ayant le même nombre  $n$  de points de contrôle, on définit une surface réglée B-spline

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^1 N_i^m(u) N_j^2(v) P_{ij}, \quad (5.16)$$

avec  $P_{i0} = P_i$  et  $P_{i1} = Q_i$ .

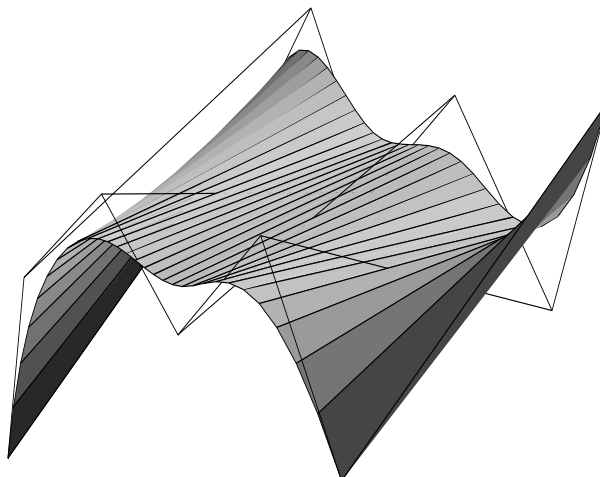


FIG. 6 – Surface réglée

## 2) Surfaces coniques

Une surface conique est une surface réglée dans laquelle une de deux courbes qui la définit est réduite à un point, par exemple  $Q(u) = Q$ . Alors  $Q_i = Q, i = 0, \dots, n$ , et on obtient la surface conique B-spline

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^1 N_i^m(u) N_j^2(v) P_{ij}, \quad (5.17)$$

avec  $P_{i0} = P_i$  et  $P_{i1} = Q$ .

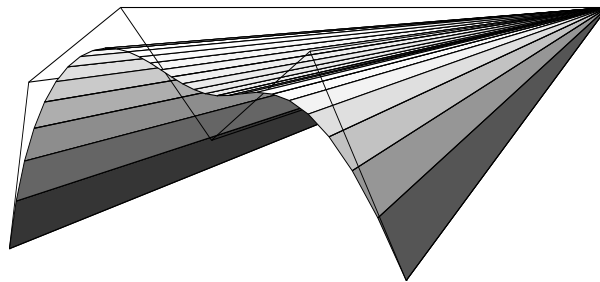


FIG. 7 – Surface conique

La construction de surfaces de révolution, également très utilisées pour la représentation de formes, ne peut cependant pas être obtenue à l'aide du produit tensoriel de fonctions B-splines. En effet, il n'est pas possible d'obtenir des coniques (et donc des cercles) à partir des fonctions B-splines. Le chapitre suivant introduit les courbes **B-splines rationnelles** (NURBS en anglais) qui permettent de générer des coniques.

## 6 Courbes et surfaces B-splines rationnelles (NURBS)

On peut définir des arcs de coniques et en particulier de cercles à partir de paramétrisations rationnelles. On connaît par exemple la paramétrisation classique d'un arc de cercle (quart de cercle) :

$$C(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad (6.1)$$

pour  $t \in [0, 1]$ .

Les courbes B-splines rationnelles sont obtenues à partir de fractions rationnelles de B-splines.

**Définition 6.1** À partir d'un vecteur nodal  $U = [u_0, \dots, u_{n+m}]$  et d'un vecteur de poids  $W = [w_0, \dots, w_n]$  avec  $w_i > 0$ , on définit  $n+1$  fonctions B-splines rationnelles de base et d'ordre  $m$

$$R_i^m(u) = \frac{w_i N_i^m(u)}{\sum_{k=0}^n w_k N_k^m(u)}. \quad (6.2)$$

Ces fonctions sont des fonctions rationnelles par morceaux. Une courbe B-spline rationnelle (en anglais NURBS pour Non Uniform Rational B-Spline) est définie par

$$R(u) = \sum_{i=0}^n R_i^m(u) P_i, \quad (6.3)$$

où  $P_i$  sont des points de contrôle de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .

On a donc

$$R(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i N_i^m(u) P_i}{\sum_{i=0}^n w_i N_i^m(u)}.$$

La paramétrisation du cercle (6.1) est ainsi obtenue en prenant  $U = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$  (il s'agit donc des polynômes de Bézier),  $W = [1, 1, 2]$ , et les points de contrôle  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On peut considérer qu'une courbe B-spline rationnelle est obtenue par transformation projective d'une courbe B-spline classique. Considérons la courbe B-spline de  $\mathbb{R}^{d+1}$ ,  $d = 2, 3$ ,

$$P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) \begin{pmatrix} w_i P_i \\ w_i \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

définie par les points de contrôle

$$\begin{pmatrix} w_i P_i \\ w_i \end{pmatrix},$$

avec  $P_i \in \mathbb{R}^d$ .

La projection conique  $\Pi$  de centre 0 sur le plan d'équation  $x_{d+1} = 1$  est l'application  $\Pi : \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{x_{d+1} = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^d$  définie par :

$$\Pi(x_1, \dots, x_{d+1}) = \left( \frac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \frac{x_d}{x_{d+1}} \right).$$

On constate que la B-spline rationnelle  $R(u)$  est l'image de la courbe  $P(u)$  par la projection  $\Pi$  :

$$\Pi(P(u)) = R(u) \tag{6.5}$$

pour toute valeur du paramètre  $u$ . Sachant que  $\Pi \begin{pmatrix} w_i P_i \\ w_i \end{pmatrix} = P_i$ , on obtient donc  $R(u) =$

$$\Pi(P(u)) = \sum_{i=0}^n R_i^m(u) \Pi \begin{pmatrix} w_i P_i \\ w_i \end{pmatrix}.$$

D'un point de vue pratique, l'évaluation de  $R(u)$  pour une valeur du paramètre  $u$  s'obtient en utilisant l'algorithme de De Boor pour la courbe (6.4) suivi par la projection  $\Pi$  (6.5).

### Propriétés des fonctions B-splines rationnelles de base $R_i^m$ et des courbes rationnelles $R$

On prend dorénavant un vecteur nodal  $U$  de type II.

Positivité :

$$\forall u \in [u_0, u_{n+m}], R_i^m(u) \geq 0.$$

Valeurs aux bords de l'intervalle  $[u_0, u_{n+m}]$  :

$$\begin{aligned} R_0^m(u_0) &= 1 \text{ et } R_i^m(u_0) = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n. \\ R_n^m(u_{n+m}) &= 1 \text{ et } R_i^m(u_{n+m}) = 0, \text{ pour } i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Partition de l'unité :

$$\sum_{i=0}^n R_i^m(u) = 1, \forall u \in [u_0, u_{n+m}].$$

Support et régularité :

On a  $\text{supp}(R_i^m) = [u_i, u_{i+m}]$ . Dans chaque intervalle  $[u_j, u_{j+1}]$ , les fonctions  $R_i^m$  sont des fonctions rationnelles et aux noeuds  $u_j$  elles sont continûment dérivables jusqu'à l'ordre  $(m-1-m_j)$  où  $m_j$  est la multiplicité du noeud.

Si tous les poids  $w_i$  sont égaux à 1, on retrouve les fonctions B-splines  $N_i^m$ .

Pour les courbes rationnelles  $R$ , on a les propriétés suivantes.

Pour tout  $u \in [u_0, u_{n+m}]$ ,  $R(u)$  appartient à l'enveloppe convexe des points de contrôle  $P_i$ . Plus précisément, pour  $u \in [u_k, u_{k+1}]$ , les seules fonctions non nulles en  $u$  sont les fonctions  $R_{k-m+1}^m, \dots, R_k^m$  et  $R(u)$  appartient donc à l'enveloppe convexe des points  $P_{k+m-1}, \dots, P_k$ .

Les valeurs aux extrémités sont :

$$R(u_0) = P_0 \text{ et } R(u_{n+m}) = P_n.$$

Les dérivées aux extrémités sont données par :

$$R'(u_0) = \frac{m-1}{(u_m - u_0)} \frac{w_1}{w_0} (P_1 - P_0),$$

et

$$R'(u_{n+m}) = \frac{m-1}{(u_{n+m} - u_n)} \frac{w_{n-1}}{w_n} (P_n - P_{n-1}).$$

## Arc d'une conique

L'arc d'une conique est obtenu à l'aide d'une fonction de Bézier rationnelle de la forme

$$R(u) = \frac{B_0^2(u)w_0P_0 + B_1^2(u)w_1P_1 + B_2^2(u)w_2P_2}{B_0^2(u)w_0 + B_1^2(u)w_1 + B_2^2(u)w_2}, \quad (6.6)$$

où  $u \in [0, 1]$ , et  $B_0^2, B_1^2, B_2^2$ , sont les trois polynômes de Bézier de degré 2. En raison de la symétrie des fonctions  $B_0^2$  et  $B_2^2$  et du fait que les poids sont définis à une constante multiplicative près (voir expression (6.2)), on peut fixer  $w_0 = w_2 = 1$ .

On obtient la classification suivante :

**Proposition 6.1** *Pour  $w_1 < 1$ ,  $R([0, 1])$  est un arc d'ellipse,  
pour  $w_1 = 1$ ,  $R([0, 1])$  est un arc de parabole,  
pour  $w_1 > 1$ ,  $R([0, 1])$  est un arc d'hyperbole.*

Soit  $M$  le milieu du segment  $[P_0, P_2]$  et  $S = R(\frac{1}{2})$ . On montre que les points  $M, S$  et  $P_1$  sont alignés et que

$$w_1 = \frac{\|\overrightarrow{SM}\|}{\|\overrightarrow{SP_1}\|}. \quad (6.7)$$

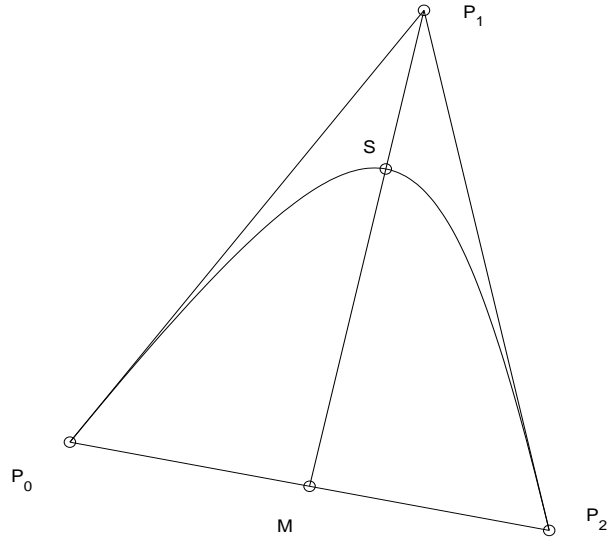


FIG. 8 – Arc de conique ( $w_1 = 2$ )

### Arc de cercle

Le cas particulier du cercle est obtenu en prenant  $\|\overrightarrow{P_1P_0}\| = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|$ . Notons  $\theta$  l'angle  $P_1\widehat{P_0}P_2$ . On montre que

$$w_1 = \cos(\theta). \tag{6.8}$$

### Applications

a) Pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , on a  $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Ainsi, pour  $P_1\widehat{P_0}P_2 = \frac{\pi}{4}$  et le vecteur de poids  $W = [1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ , on a l'arc de cercle suivant :

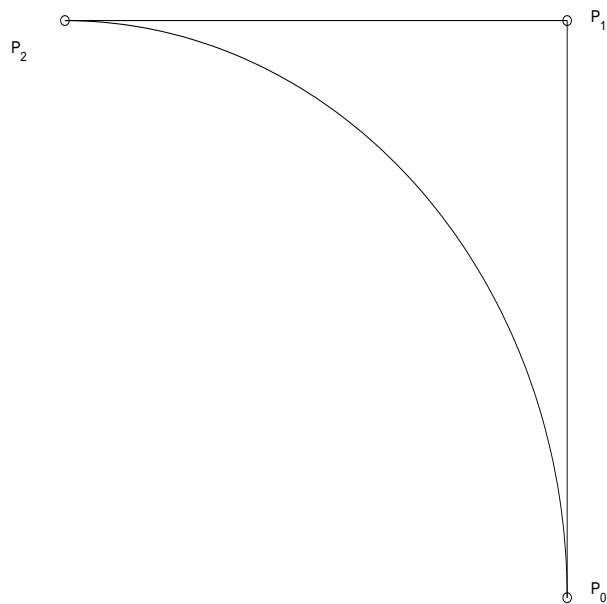


FIG. 9 – Quart de cercle obtenu avec  $\theta = \pi/4$

b) Pour  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , on a  $w_1 = \frac{1}{2}$ .

Ainsi, pour  $P_1\widehat{P_0}P_2 = \frac{\pi}{3}$  et le vecteur de poids  $W = [1, \frac{1}{2}, 1]$ , on a l'arc de cercle suivant :

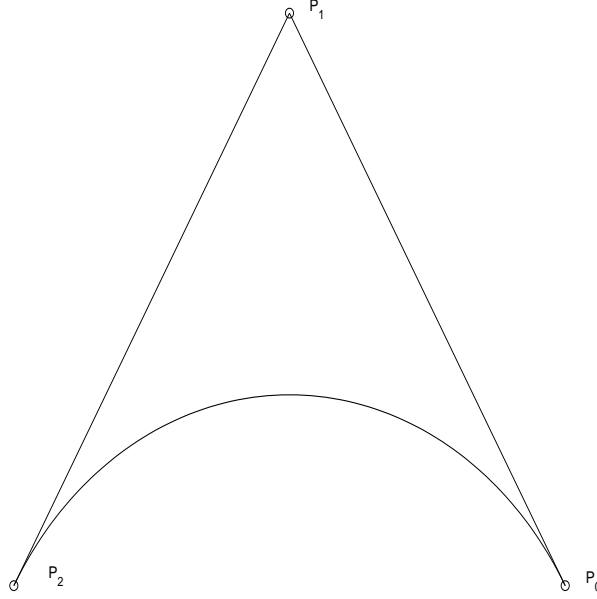


FIG. 10 – Tiers de cercle obtenu avec  $\theta = \pi/3$

### Construction d'un cercle

a) Pour obtenir un cercle complet dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , il faut générer successivement 4 arcs de cercles.

De fait, on peut obtenir le cercle complet directement en prenant les 9 points de contrôle  $P_0, P_1, \dots, P_7$  et  $P_8 = P_0$ , placés aux sommets d'un carré et au milieu de chaque côté (voir figure 12) avec le vecteur nodal

$$U = [0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1] \quad (6.9)$$

et le vecteur de poids

$$W = [1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1]. \quad (6.10)$$

En effet, le vecteur nodal  $U$  donne 9 B-splines de base d'ordre 3 (polynômes de degré 2 par morceaux). La fonction  $N_2^3$  définie sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$  est égale à  $B_2^2$  sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{4}]$  et à  $B_0^2$  sur l'intervalle  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ <sup>1</sup> après translation et homothétie des arguments. Il en est de même pour les fonctions  $N_4^3$  et  $N_6^3$  qui donnent chacune naissance aux deux polynômes de Bézier  $B_2^2$  et  $B_0^2$ . Pour les autres fonctions, on obtient facilement leur identification avec des polynômes de Bézier de degré 2. Le vecteur nodal  $U$  donne ainsi dans chaque intervalle  $[0, \frac{1}{4}]$ ,  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ ,  $[\frac{3}{4}, 1]$ , les trois polynômes de Bézier  $B_0^2, B_1^2, B_2^2$ .

b) Pour obtenir un cercle complet dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , il faut générer successivement 3 arcs de cercles.

<sup>1</sup>En effet, la formule de récurrence (2.16) des fonctions B-splines montre que deux fonctions  $N_i^m$  et  $\tilde{N}_i^m$  déterminées respectivement par les noeuds  $u_i, \dots, u_{i+m}$  et  $\tilde{u}_i, \dots, \tilde{u}_{i+m}$ , avec  $u_{i+1} = \tilde{u}_{i+1}, \dots, u_{i+m} = \tilde{u}_{i+m}$ , alors  $N_i^m = \tilde{N}_i^m$  sur l'intervalle  $[u_{i+m-1}, u_{i+m}]$ . De même, si  $u_i = \tilde{u}_i, \dots, u_{i+m-1} = \tilde{u}_{i+m-1}$ , alors  $N_i^m = \tilde{N}_i^m$  sur l'intervalle  $[u_i, u_{i+1}]$ .



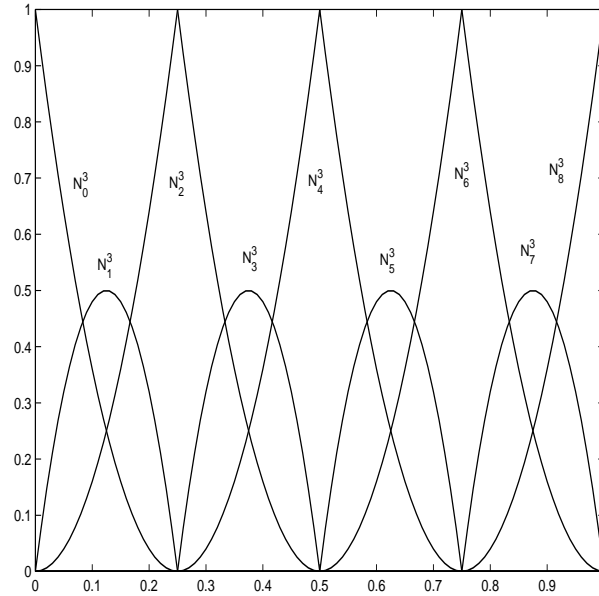


FIG. 11 – Fonctions B-splines obtenues par le vecteur nodal  $U = [0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1]$

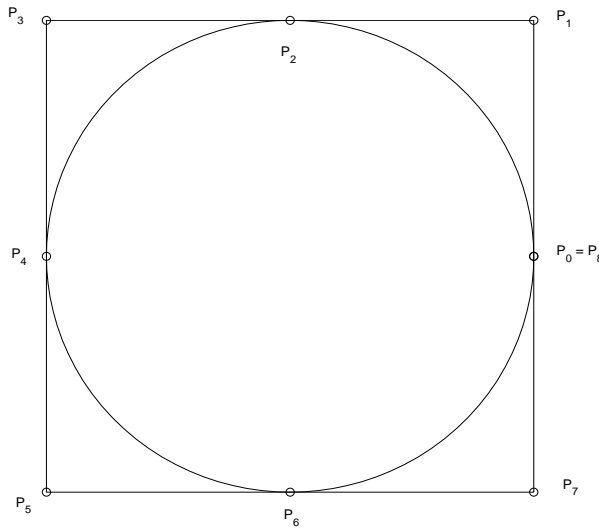


FIG. 12 – Cercle complet obtenu avec  $\theta = \pi/4$

Dans ce cas aussi, le cercle est obtenu directement en prenant 7 points de contrôle  $P_0, P_1, \dots, P_5$  et  $P_6 = P_0$ , placés aux sommets d'un triangle équilatéral et au milieu de chaque côté (voir figure 13) avec le vecteur nodal  $U = [0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1, 1]$  et le vecteur des poids  $W = [1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1]$ . La démonstration est la même que dans le cas a).

## 6.1 Surfaces de révolution

On définit une surface de révolution en "faisant tourner" une courbe située sur un plan autour d'un axe de révolution  $\Delta$  situé sur ce même plan.

Considérons une courbe B-spline (éventuellement rationnelle)  $P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u)P_i$ , avec les points de contrôle  $P_i$  situés sur un même plan.

Pour générer un cercle, on peut utiliser le procédé a) donné ci-dessus. On définit alors

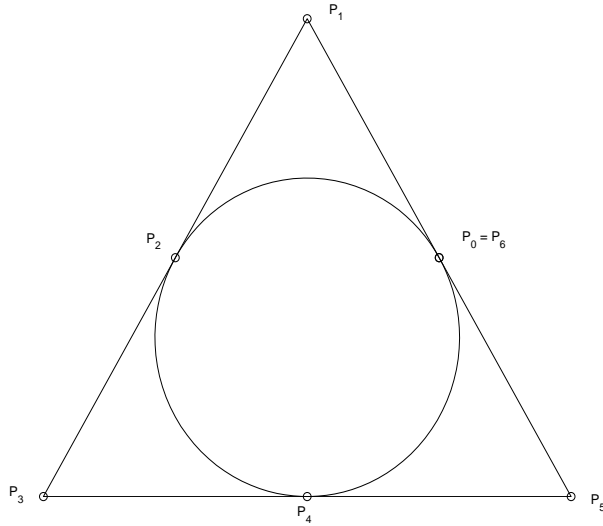


FIG. 13 – Cercle complet obtenu avec  $\theta = \pi/3$

la surface B-spline rationnelle

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^8 N_i^m(u) R_j^3(v) P_{ij}, \quad (6.11)$$

où les B-splines rationnelles

$$R_j^3(v) = \frac{w_j N_j^3(v)}{\sum_{k=0}^8 w_k N_k^3(v)}, \quad (6.12)$$

sont définies par le vecteur nodal  $U$  (6.9) et le vecteur des poids  $W$  (6.10).

Pour définir les points de contrôle  $P_{ij}$ , on considère pour tout  $i$  le plan  $\Pi_i$  perpendiculaire à l'axe  $\Delta$  et passant par le point  $P_i$ . Sur ce plan, on définit le carré  $C_i$  centré au point  $I$  intersection de  $\Pi_i$  et  $\Delta$  et ayant le point  $P_i$  pour milieu d'un côté. Les points  $P_{ij}$  sont définis par  $P_{i0} = P_{i8} = P_i$ , et  $P_{ij}$  pour  $j = 1, \dots, 7$ , sont disposés sur les sommets et les milieux des côtés de  $C_i$  (voir figure 14).

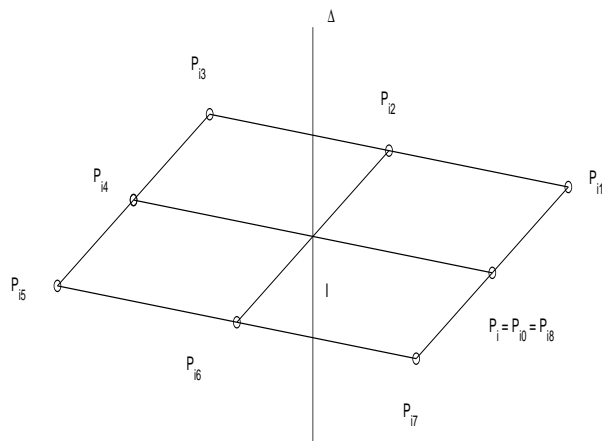


FIG. 14 – Points de contrôle  $P_{ij}$  de la surface générés à partir de  $P_i$

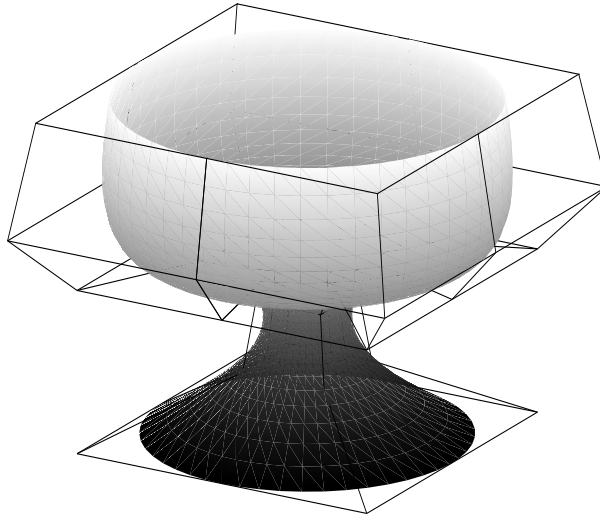


FIG. 15 – Surface de révolution

### Exemples

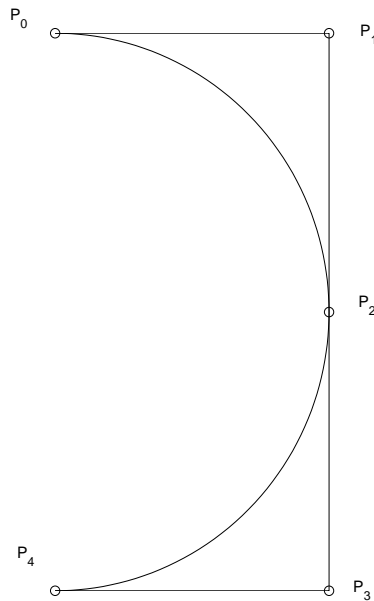


FIG. 16 – Demi-cercle permettant de générer une sphère

Pour obtenir une sphère, on génère d’abord un demi-cercle

$$P(u) = \sum_{i=0}^4 R_i^3(u) P_i, \quad (6.13)$$

où les B-splines rationnelles  $R_i^3$  sont définies par le vecteur nodal  $U = [0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1]$  et le vecteur de poids  $W = [1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ .

La sphère est obtenue en “faisant tourner” le demi-cercle autour d’un axe  $\Delta$  passant par les points  $P_0$  et  $P_4$  :

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^8 R_i^3(u) R_j^3(v) P_{ij}. \quad (6.14)$$

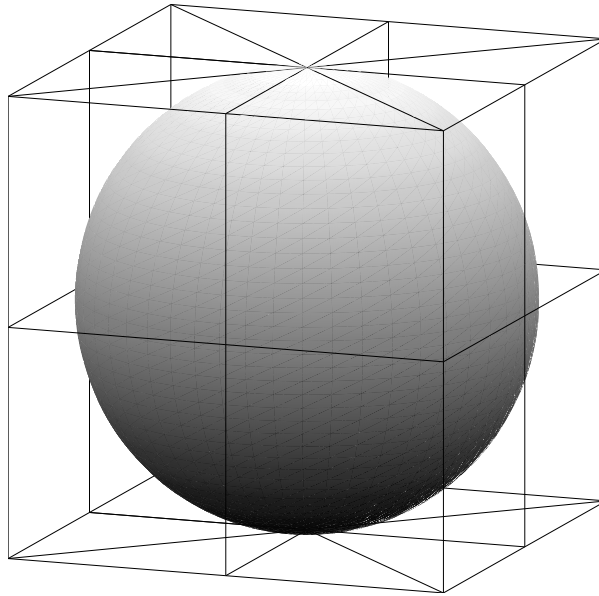


FIG. 17 – Sphère

De même, un tore s'obtient en “faisant tourner” un cercle complet autour d'un axe  $\Delta$  coplanaire avec ce cercle et ne le coupant pas.

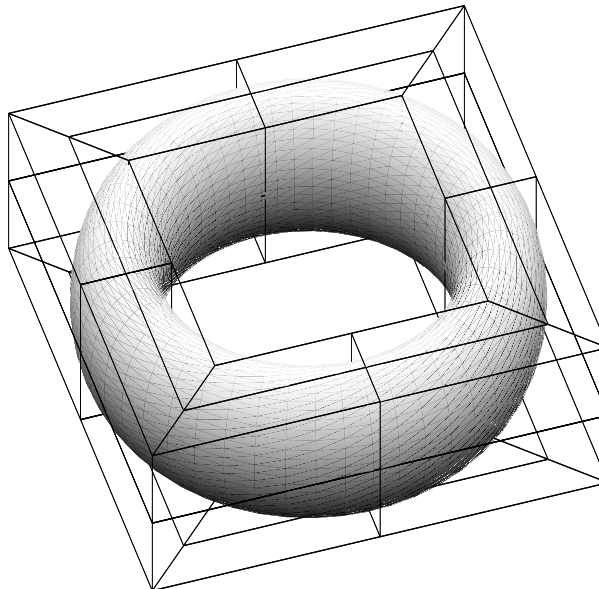


FIG. 18 – Tore

## 7 Interpolation par fonctions splines

### Le problème de l'interpolation

Considérons  $n + 1$  points  $Q_i, i = 0, \dots, n$  de  $\mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3$ . Le problème de l'interpolation de ces points  $Q_i$  par une courbe B-spline consiste à chercher une courbe B-spline d'ordre  $m, P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u)P_i$ , vérifiant les  $n + 1$  conditions d'interpolation

$$P(\bar{u}_j) = Q_j, j = 0, \dots, n. \quad (7.1)$$

Pour cela, il faut définir un vecteur nodal  $U = [u_0, \dots, u_{n+m}]$  permettant de générer les  $n + 1$  B-splines  $N_i^m$  d'ordre  $m$ . Il faut se donner également les valeurs du paramètre  $\bar{u}_j, j = 0, \dots, n$ . On définit ainsi le vecteur  $\bar{U} = [\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_n]$ , avec des valeurs  $\bar{u}_j$  ordonnées et vérifiant  $u_0 \leq \bar{u}_0 \leq \dots \leq \bar{u}_n \leq u_{n+m}$ .

Les inconnues du problème sont les points de contrôle  $P_i$ . Considérons par exemple le cas  $d = 2$ . Posons  $P_i = (\alpha_i, \beta_i)$  et  $Q_j = (a_j, b_j)$ . La solution du problème d'interpolation conduit à résoudre les 2 systèmes linéaires suivants :

$$\sum_{i=0}^n N_i^m(\bar{u}_j)\alpha_i = a_j, j = 0, \dots, n, \quad (7.2)$$

et

$$\sum_{i=0}^n N_i^m(\bar{u}_j)\beta_i = b_j, j = 0, \dots, n. \quad (7.3)$$

La matrice carrée  $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  commune à ces deux systèmes est donnée par :

$$M = (N_i^m(\bar{u}_j)),$$

avec  $j$  indice de ligne et  $i$  indice de colonne. Les deux systèmes (7.2) et (7.3) s'écrivent donc

$$\begin{cases} M\alpha = a, \\ M\beta = b, \end{cases}$$

avec les vecteurs inconnus  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)^T, \beta = (\beta_0, \dots, \beta_n)^T$ , et les vecteurs des données  $a = (a_0, \dots, a_n)^T, b = (b_0, \dots, b_n)^T$ .

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $M$  soit inversible et donc pour que le système de l'interpolation admette une solution unique.

**Proposition 7.1** *Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $M = (N_i^m(\bar{u}_j))$  soit inversible est que ses termes diagonaux  $N_i^m(\bar{u}_i), i = 0, \dots, n$ , soient tous distincts de zéro.*

On remarque que  $M$  est une matrice stochastique <sup>2</sup> avec une structure bande de demi-largeur  $m - 1$ . <sup>3</sup> Dans le cas où elle est inversible (cf. prop. précédente), son conditionnement est généralement faible.

<sup>2</sup>La matrice  $M = (m_{ij})$  est dite stochastique si  $m_{ij} \geq 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ , et  $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1, \forall i = 1, \dots, n$ .

<sup>3</sup>La matrice  $M = (m_{ij})$  a une structure bande de demi-largeur  $p$  si  $m_{ij} = 0$  pour  $|i - j| > p$ .

## Choix du vecteur nodal $U$ et du vecteur $\bar{U}$ .

Supposons que le vecteur nodal  $U$  soit donné. Un choix des valeurs  $\bar{u}_j$  satisfaisant aux conditions de la proposition (7.1) est le suivant :

$$\bar{u}_j = \frac{u_{j+1} + \dots + u_{j+m-1}}{m-1}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (7.4)$$

Souvent, le problème d'interpolation est défini uniquement par les points  $Q_j$ . Il faut alors déterminer les vecteurs  $U$  et  $\bar{U}$ . On dispose de plusieurs choix conduisant aux conditions de la proposition (7.1).

a) Si les points d'interpolation  $Q_j$  sont régulièrement espacés, on peut prendre  $\bar{u}_j = \frac{j}{n}$ .

b) Si les points  $Q_j$  sont irrégulièrement répartis, il est préférable, pour obtenir des courbes d'interpolation plus régulières, de prendre des valeurs du paramètre  $\bar{u}$  en relation avec la distance mutuelle des points  $Q_j$ .

On prend :

$$\bar{u}_j = \frac{\sum_{i=1}^j \|Q_i - Q_{i-1}\|}{\sum_{i=1}^n \|Q_i - Q_{i-1}\|}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n, \quad (7.5)$$

et  $\bar{u}_0 = 0$ .

On choisit ensuite le vecteur nodal  $U$  à partir des valeurs de  $\bar{U}$ . On peut prendre :

$$u_0 = \dots = u_{m-1} = 0, \quad u_{n+1} = \dots = u_{n+m} = 1, \quad \text{et } u_{k+m} = \frac{\bar{u}_{k+1} + \dots + \bar{u}_{k+m-1}}{m-1}, \quad k = 0, \dots, n-m. \quad (7.6)$$

Il est facile de voir qu'avec ce choix, les conditions de la proposition (7.1) sont satisfaites.

## Fonction B-spline d'interpolation

Supposons donnés des points  $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$ . On cherche une fonction B-spline  $\sigma(x) = \sum_{i=0}^n N_i^m(x) \beta_i$  vérifiant les conditions d'interpolation

$$\sigma(x_j) = y_j, \quad j = 0, \dots, n. \quad (7.7)$$

Ici, le paramétrage est fixé :  $\bar{u}_j = x_j$ .

Le choix de  $U$  peut se faire suivant les formules du type précédent :

$$u_0 = \dots = u_{m-1} = x_0, \quad u_{n+1} = \dots = u_{n+m} = x_n, \quad \text{et } u_{k+m} = \frac{x_{k+1} + \dots + x_{k+m-1}}{m-1}, \quad k = 0, \dots, n-m. \quad (7.8)$$

## Surface spline d'interpolation

Considérons  $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1)$  points d'interpolation  $Q_{kl} \in \mathbb{R}^3$ ,  $k = 0, \dots, n_1$ ,  $l = 0, \dots, n_2$ , et des valeurs de paramètre correspondantes  $(\bar{u}_k, \bar{v}_l)$ .

Le problème de l'interpolation consiste à chercher une surface B-spline  $P(u, v) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} N_i^{m_1}(u) N_j^{m_2}(v) P_{ij}$ , vérifiant les  $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1)$  conditions d'interpolation

$$P(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = Q_{kl}, \quad k = 0, \dots, n_1, \quad l = 0, \dots, n_2.$$

On obtient la surface d'interpolation en résolvant  $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1)$  problèmes d'interpolation de courbes B-splines.

On peut considérer d'abord les  $(n_2 + 1)$  courbes B-splines

$$R_l(u) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(u) R_{il}, \quad l = 0, \dots, n_2,$$

obtenues à partir des problèmes d'interpolation

$$R_l(\bar{u}_k) = Q_{kl}, \quad k = 0, \dots, n_1.$$

La résolution de ces problèmes d'interpolation fait intervenir la matrice  $M = (N_i^{m_1}(\bar{u}_k))$ , qui d'après la proposition 7.1 est inversible si et seulement si ses termes diagonaux  $N_i^{m_1}(\bar{u}_i)$ , sont tous distincts de zéro.

À partir des points  $R_{il}$  obtenus, on définit les  $(n_1 + 1)$  courbes B-splines d'interpolation

$$S_i(v) = \sum_{j=0}^{n_2} N_j^{m_2}(v) S_{ij}, \quad i = 0, \dots, n_1,$$

vérifiant les conditions d'interpolation

$$S_i(\bar{v}_l) = R_{il}, \quad l = 0, \dots, n_2.$$

La matrice associée à ces problèmes d'interpolation est la matrice  $N = (N_j^{m_2}(\bar{v}_l))$ , qui est inversible si et seulement si ses termes diagonaux  $N_j^{m_2}(\bar{v}_j)$ , sont tous distincts de zéro.

On observe alors que la surface B-spline

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(u) S_i(v) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} N_i^{m_1}(u) N_j^{m_2}(v) S_{ij},$$

vérifie les conditions d'interpolation

$$P(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(\bar{u}_k) S_i(\bar{v}_l) = \sum_{i=0}^{n_1} N_i^{m_1}(\bar{u}_k) R_{il} = Q_{kl},$$

pour  $k = 0, \dots, n_1, l = 0, \dots, n_2$ . Il s'agit bien de la surface B-spline d'interpolation recherchée.

## Spline naturelle d'interpolation

Le problème de l'interpolation par fonction B-spline (7.7) peut se formuler de manière assez naturelle en prenant pour abscisses d'interpolation  $x_j$  des noeuds de raccordement. Cela revient à chercher la fonction  $\sigma$  dans l'espace  $\mathcal{S}^m(\Delta_{n+1})$ , avec  $\Delta_{n+1} = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,

et  $a < x_0, x_n < b$ . Sachant que  $\dim(\mathcal{S}^m(\Delta_{n+1})) = n + 1 + m$ , il faut donc définir  $m$  conditions supplémentaires pour résoudre ce problème.

Par exemple, pour  $m = 4$  (spline cubique), il s'agit de fixer 4 conditions supplémentaires. Les 4 conditions  $\sigma''(a) = 0, \sigma''(b) = 0$  et  $\sigma'''(a) = 0, \sigma'''(b) = 0$ , définissent ce qu'on appelle une spline cubique d'interpolation **naturelle**. Ces conditions conduisent donc à considérer dans  $\mathcal{S}^m(\Delta_{n+1})$ , le sous-espace des fonctions qui admettent pour restriction aux intervalles  $[a, x_0]$  et  $[x_n, b]$  des polynômes de degré 1. Il s'agit d'un espace de fonction splines dites naturelles.

On montre par ailleurs que cette fonction est l'unique solution du problème variationnel général

$$\min_{\substack{f \in \mathcal{H}^2(a,b) \\ f(x_j) = y_j, j=0, \dots, n}} \int_a^b f''(x)^2 dx. \quad (7.9)$$

L'espace  $\mathcal{H}^2(a, b)$  désigne l'espace vectoriel des fonctions appartenant à  $\mathcal{C}^1(a, b)$  et possédant une dérivée généralisée d'ordre 2 appartenant à  $L^2(a, b)$ . Sachant qu'on peut considérer la dérivée seconde  $f''(x)$  comme une approximation de la courbure de la fonction, la propriété (7.9) montre ainsi que la spline cubique naturelle d'interpolation est une fonction qui a des propriétés optimales relativement à la régularité (courbure minimale). Cette propriété explique en partie pourquoi ces fonctions jouent un rôle important dans la pratique.

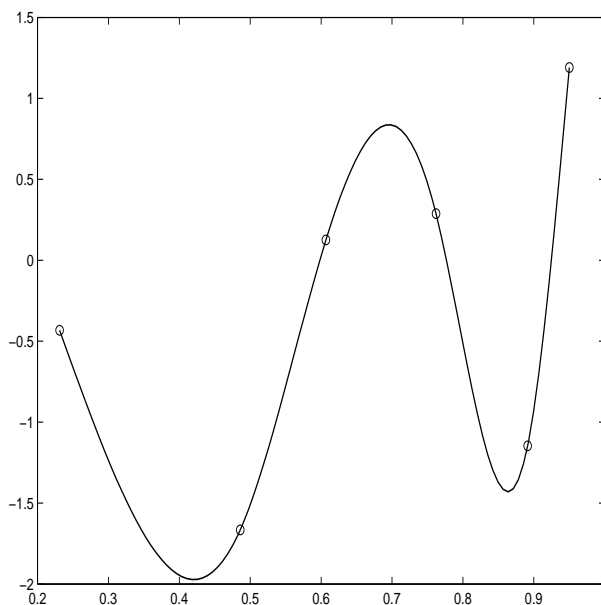


FIG. 19 – Interpolation par spline cubique ( $m = 4$ ) naturelle sur 6 points (notés o)

Plus généralement, pour tout ordre pair  $m = 2q$ , on peut définir l'espace des fonctions splines naturelles  $\mathcal{SN}^m(\Delta_{n+1})$ , comme étant le sous-espace de  $\mathcal{S}^m(\Delta_{n+1})$  pour lequel les fonctions restreintes aux intervalles  $[a, x_0]$  et  $[x_n, b]$  sont des polynômes de degré  $q - 1$ . Cet espace est de dimension  $n + 1$ . La même propriété variationnelle avec la dérivée  $q$ -ième  $f^{(q)}$  est vérifiée par les fonctions interpolantes de  $\mathcal{SN}^m(\Delta_{n+1})$ .



## 8 Algorithmes de subdivision

Considérons  $\Delta_k$  et  $\Delta_l$  deux subdivisions de  $[a, b]$  telles que  $\Delta_k \subset \Delta_l$ . Il est clair que  $\mathcal{S}^m(\Delta_k) \subset \mathcal{S}^m(\Delta_l)$ . Les algorithmes de subdivision sont basés sur cette propriété fondamentale. Ils consistent à augmenter le nombre de points nodaux d'un vecteur nodal donné et à exprimer les anciennes fonctions de base B-splines dans la nouvelle base construite à partir du vecteur nodal augmenté. Pour une courbe B-spline donnée, on obtient alors une nouvelle expression de celle-ci à partir de la nouvelle base (augmentée).

Ce procédé peut être répété plusieurs fois sur une courbe donnée, par exemple en insérant chaque fois des noeuds au milieu de chaque intervalle. On montre que lorsque le nombre de points nodaux augmente, il y a convergence du polygone de contrôle vers la courbe.

En insérant plusieurs fois un noeud au même endroit (noeud confondu), on finit par partager une courbe donnée en deux.

L'intérêt de ces procédés est de pouvoir utiliser le polygone de contrôle comme une approximation (de très bonne qualité si le nombre de noeuds insérés est suffisant) de la courbe B-spline. Plusieurs opérations, comme la recherche de l'intersection de deux courbes, l'estimation de la valeur de la fonction ou de sa dérivée, peuvent être obtenues à partir du polygone de contrôle.

### 8.1 Insertion d'un noeud

C'est le mécanisme de base à tous ces procédés.

Considérons  $P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) P_i$ , une courbe B-spline donnée, définie par un vecteur nodal  $U = [u_0, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{n+m}]$ .

On insère un noeud  $\bar{u}$  dans l'intervalle  $[u_k, u_{k+1}]$ . Notons  $\bar{U}$  le nouveau vecteur nodal obtenu à partir de  $U$  après ajout du noeud  $\bar{u}$  :

$$\bar{U} = [\bar{u}_0 = u_0, \bar{u}_1 = u_1, \dots, \bar{u}_k = u_k, \bar{u}_{k+1} = \bar{u}, \bar{u}_{k+2} = u_{k+1}, \dots, \bar{u}_{n+m+1} = u_{n+m}].$$

Sachant que  $U \subset \bar{U}$ , il est clair que les fonctions  $N_i^m$  obtenues à partir du vecteur nodal  $U$  peuvent s'exprimer à partir des fonctions  $\bar{N}_i^m$  obtenues à partir du vecteur nodal  $\bar{U}$ . On obtient ainsi la courbe  $P(u)$  exprimée sous forme de combinaison linéaire des nouvelles fonctions  $\bar{N}_i^m$  :

$$P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) P_i = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_i^m(u) \bar{P}_i. \quad (8.1)$$

On a le résultat suivant :

**Proposition 8.1** *Pour tout  $i = k - m + 1, \dots, k$ , on a*

$$N_i^m(u) = \frac{(\bar{u} - \bar{u}_i)}{(\bar{u}_{i+m} - \bar{u}_i)} \bar{N}_i^m(u) + \frac{(\bar{u}_{i+m+1} - \bar{u})}{(\bar{u}_{i+m+1} - \bar{u}_{i+1})} \bar{N}_{i+1}^m(u). \quad (8.2)$$

Pour  $i = k - m + 2, \dots, k - 1$ , on peut aussi exprimer l'égalité (8.2) en utilisant les noeuds  $u_i$  :

$$N_i^m(u) = \frac{(\bar{u} - u_i)}{(u_{i+m-1} - u_i)} \bar{N}_i^m(u) + \frac{(u_{i+m} - \bar{u})}{(u_{i+m} - u_{i+1})} \bar{N}_{i+1}^m(u). \quad (8.3)$$

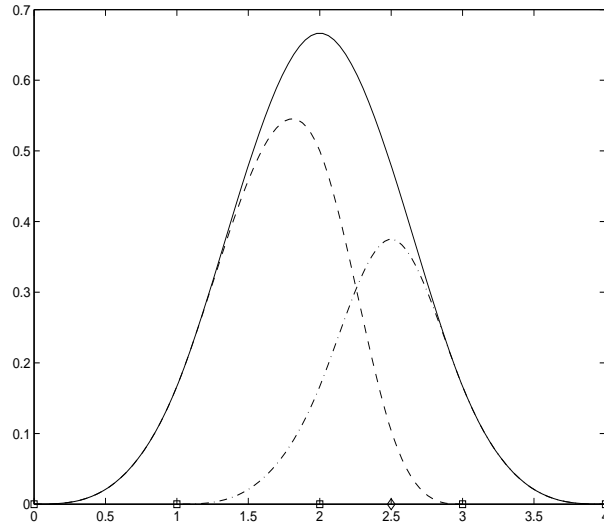


FIG. 20 – Ajout du noeud  $\bar{u} = 2.5$  au vecteur nodal  $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$ . La fonction  $N^4$  (courbe en trait plein) est égale à la somme de  $\frac{2.5}{3}\bar{N}_0^4$  (courbe en tireté) et de  $\frac{1.5}{3}\bar{N}_1^4$  (courbe en point-tireté) d'après la formule de subdivision (8.3)

En exprimant  $N_i^m$  par rapport à  $\bar{N}_i^m$  et  $\bar{N}_{i+1}^m$ , dans l'égalité (8.1) et en factorisant par rapport  $\bar{N}_i^m$ , on obtient l'expression de  $\bar{P}_i$  :

$$\bar{P}_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1}, \quad (8.4)$$

avec

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq k - m + 1 \\ \frac{(\bar{u} - u_i)}{(u_{i+m-1} - u_i)} & \text{si } i = k - m + 2, \dots, k \\ 0 & \text{si } i \geq k + 1. \end{cases} \quad (8.5)$$

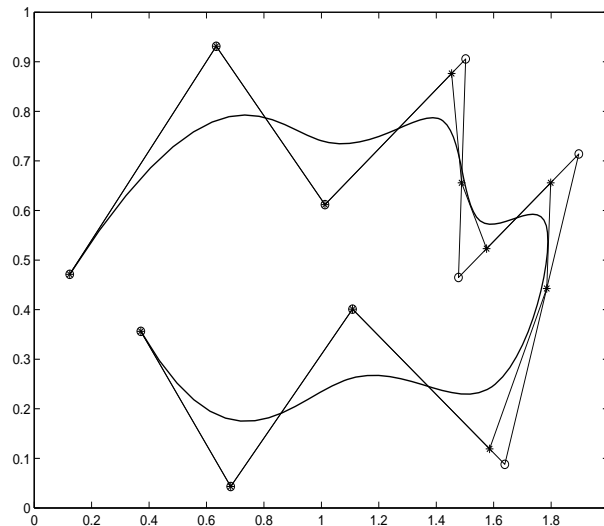


FIG. 21 – Courbe B-spline d'ordre  $m = 4$ ,  $U = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7]$ . Insertion des noeuds 2.7 et 4.3. Les nouveaux points de contrôle sont notés \*

## 8.2 Diminution de variation des courbes B-splines

Une application des formules d'insertion d'un noeud (8.4) et (8.5) est la propriété de **diminution de variation** des courbes B-splines.

**Définition 8.1** Soit  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  une suite de nombres réels. On appelle *variation de  $\alpha$* , notée  $V(\alpha)$ , le nombre de changements de signes de la suite  $\alpha$ , c.-à-d. , le nombre d'indices  $i$  tels que  $\alpha_i \alpha_{i+k} < 0$ , avec  $\alpha_{i+1} = \dots = \alpha_{i+k-1} = 0$ .

Pour une fonction  $f$ , on définit de même la variation  $V(f)$ .

**Définition 8.2** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on note  $V(f)$  la variation de  $f$ , le nombre  $\sup V(f(x_1), \dots, f(x_n))$ , pour toute suite finie strictement ordonnée  $(x_1, \dots, x_n)$  de points de  $[a, b]$ .

Géométriquement  $V(f)$  représente le nombre d'intersections (au sens large) de la courbe  $u \mapsto (u, f(u))$  avec l'axe des abscisses.

Soit  $f(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i N_i^m(u)$ , une fonction B-spline que l'on considère sur l'intervalle  $[a, b]$ , avec  $u_0 \leq \dots \leq u_{m-1} \leq a$  et  $b \leq u_{n+1} \leq \dots \leq u_{n+m}$ .

On a la propriété suivante :

**Proposition 8.2** Si  $f(u) = \sum_{i=0}^n \alpha_i N_i^m(u)$ , alors  $V(f) \leq V(\alpha)$ , où on note  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ .

Considérons une courbe B-spline de  $\mathbb{R}^2$  :  $P(u) = (f(u), g(u)) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) P_i$ , avec  $P_i = (\alpha_i, \beta_i)$ . Notons  $(d)$  une droite de  $\mathbb{R}^2$  :  $(d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid rx + sy + t = 0\}$ .

Définissons la fonction  $h(u) = rf(u) + sg(u) + t$ . Alors  $h(u)$  est une fonction B-spline :  $h(u) = \sum_{i=0}^n \gamma_i N_i^m(u)$ , avec  $\gamma_i = r\alpha_i + s\beta_i + t$ .

Un point  $P(u)$  qui est sur la droite  $(d)$  si et seulement si  $h(u) = 0$ .

La proposition précédente montre que  $V(h) \leq V(\gamma)$ , où  $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ , autrement dit, le nombre d'intersections de  $P(u)$  avec la droite  $(d)$  est majoré par le nombre d'intersections de son polygone de contrôle  $P_i$  avec la droite  $(d)$ .

## 8.3 Insertion de noeuds confondus

Considérons une courbe B-spline d'ordre  $m$ ,  $P(u) = \sum_{i=0}^n N_i^m(u) P_i$ . Si l'on insère successivement  $m-1$  noeuds confondus en  $\bar{u} \in ]u_k, u_{k+1}[$ , on obtient la nouvelle expression de  $P$  :  $P(u) = \sum_{i=0}^{n+m-1} \bar{N}_i^m(\bar{u}) \bar{P}_i$ . Or, la fonction  $\bar{N}_k^m$  est telle que  $\bar{N}_k^m(\bar{u}) = 1$  (voir la figure 22), et donc  $P(\bar{u}) = \sum_{i=0}^{n+m-1} \bar{N}_i^m(\bar{u}) \bar{P}_i = \bar{P}_k$ .

Si l'on ajoute à nouveau le noeud  $\bar{u}$  (qui devient alors de multiplicité maximale  $m$ ), la courbe  $P(u)$  est partagée en deux courbes :

$$P_1(u) = P(u) = \sum_{i=0}^k \bar{N}_i^m(u) \bar{P}_i, \quad (8.6)$$

définie sur l'intervalle  $[u_0, \bar{u}]$  et

$$P_2(u) = P(u) = \sum_{i=k}^{n+m-1} \bar{N}_i^m(u) \bar{P}_i, \quad (8.7)$$

définie sur l'intervalle  $[\bar{u}, u_{n+m}]$ .

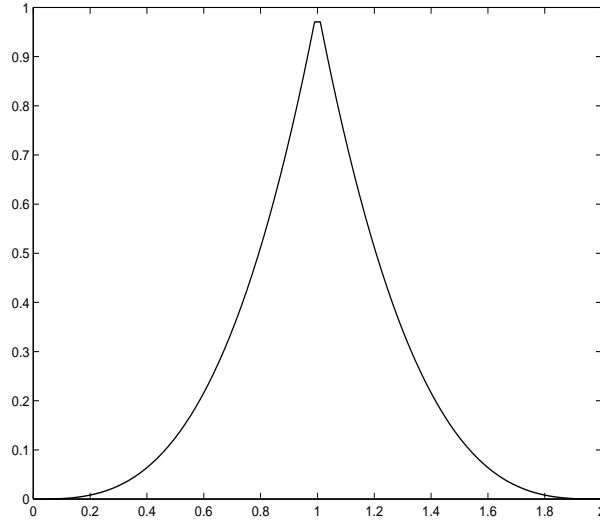


FIG. 22 – Fonction B-spline d'ordre  $m = 4$ ,  $U = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2]$

## 8.4 Subdivision pour une courbe de Bézier

Considérons une courbe de Bézier de degré  $n$  :  $P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i$ ,  $t \in [0, 1]$ . Par la proposition (4.1), on sait qu'une courbe de Bézier de degré  $n$  est une courbe B-spline d'ordre  $n + 1$  obtenue à partir du vecteur nodal  $u_0 = \dots = u_n = 0$ , et  $u_{n+1} = \dots = u_{2n+1} = 1$ .

Si l'on insère  $n + 1$  noeuds confondus en  $\bar{t} = \frac{1}{2}$ , les formules (8.4) et (8.5) répétées  $n + 1$  fois conduisent au résultat suivant :

**Proposition 8.3** *On a*

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(2t)P_i,$$

pour  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  et

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(2t - 1)P_i^{n-i},$$

pour  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ , où  $P_i^j$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $i = 0, \dots, n - j$ , sont les points définis par l'algorithme de De Casteljau (base et diagonale du tableau triangulaire - voir chapitre 4). La courbe  $P(t)$  est ainsi divisée en deux courbes de Bézier respectivement définies sur les intervalles  $[0, \frac{1}{2}]$  et  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

On peut ensuite recommencer cette opération sur chacun des intervalles  $[0, \frac{1}{2}]$  et  $[\frac{1}{2}, 1]$ . À la  $k^{\text{ième}}$  étape on obtient ainsi  $2^k$  courbes de Bézier. Si l'on note  $\Pi_k$  la réunion des polygones de contrôle des  $2^k$  courbes de Bézier, on montre que la suite  $(\Pi_k)$  converge vers la courbe de Bézier  $P(t)$  avec une vitesse de convergence en  $\frac{\lambda}{2^k}$ , où  $\lambda$  est une constante indépendante de  $k$ .

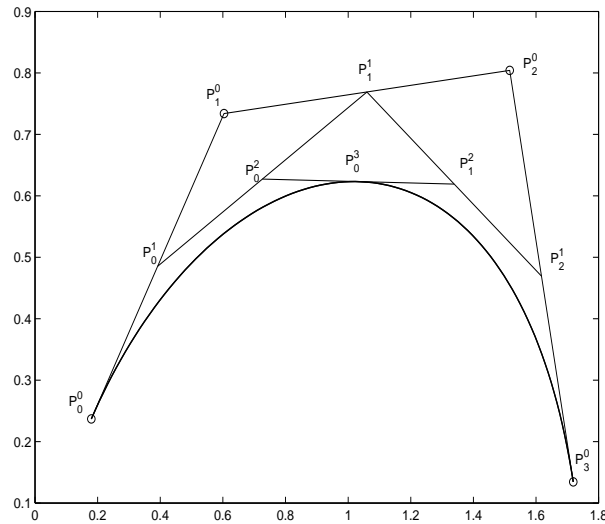


FIG. 23 – Subdivision d'une courbe de Bézier de degré  $n = 3$

## 9 Bibliographie

- L. L. Schumaker, **Spline Functions : basic theory**, John Wiley & Sons, 1981.
- Les Piegl and W. Tiller, **The Nurbs Book**, Springer, 1997.
- J. J. Risler, **Méthodes Mathématiques pour la CAO**, Masson, 1991.
- G. Demengel et J.-P. Pouget, **Modèles de Bézier, des B-splines et des NURBS**, Ellipses, 1998.
- Bojanov, Hakopian and Sahakian, **Spline Functions and Multivariate Interpolation**, Kluwer, 1993.
- G. Wahba, **Spline Models for Observational Data**, CBM-NSF, Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1990.
- G. and S. Micula, **Handbook of Splines**, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- G. Farin, **Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide**, Academic Press, 1988.
- J. Hoschek, D. Lasser, **Fundamentals of Computer Aided Geometric Design**, A. K. Peters, 1993.