

# Marches aléatoires en milieu de Dirichlet : direction asymptotique

Laurent Tournier

LAGA (Université Paris 13)

Journées MAS, Toulouse  
27–29 août 2014



Graphe  $G = (V, E)$  orienté.

On se donne des **poids initiaux**  $\alpha_e > 0$  pour  $e \in E$  (arêtes orientées  $e = (\underline{e}, \bar{e})$ ).

La **marche aléatoire renforcée par arêtes orientées** vérifie  $X_0 = o$ , puis :

- les probabilités de transition sont proportionnelles aux poids des arêtes ;
- le poids d'une arête croît de 1 après chaque traversée de celle-ci.

Autrement dit,

$$P((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n) = \frac{\alpha_e + N_e^{(n)}}{\sum_{f=\underline{e}} (\alpha_f + N_f^{(n)})} \mathbf{1}_{\{\underline{e}=X_n\}},$$

où  $N_f^{(n)}$  est le nombre de traversées de l'arête  $f$  jusqu'à l'instant  $n$ .

# Marche renforcée par arêtes orientées

Graphe  $G = (V, E)$  orienté.

On se donne des **poids initiaux**  $\alpha_e > 0$  pour  $e \in E$  (arêtes orientées  $e = (\underline{e}, \bar{e})$ ).

La **marche aléatoire renforcée par arêtes orientées** vérifie  $X_0 = o$ , puis :

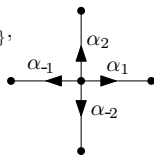
- les probabilités de transition sont proportionnelles aux poids des arêtes ;
- le poids d'une arête croît de 1 après chaque traversée de celle-ci.

Autrement dit,

$$P((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n) = \frac{\alpha_e + N_e^{(n)}}{\sum_{\underline{f}=e} (\alpha_f + N_f^{(n)})} \mathbf{1}_{\{\underline{e}=X_n\}},$$

où  $N_f^{(n)}$  est le nombre de traversées de l'arête  $f$  jusqu'à l'instant  $n$ .

Dans  $\mathbb{Z}^d$  : poids invariants par translation  $\rightarrow$  il y a  $2d$  paramètres



# Marche renforcée par arêtes orientées

Graphe  $G = (V, E)$  orienté.

On se donne des **poids initiaux**  $\alpha_e > 0$  pour  $e \in E$  (arêtes orientées  $e = (\underline{e}, \bar{e})$ ).

La **marche aléatoire renforcée par arêtes orientées** vérifie  $X_0 = o$ , puis :

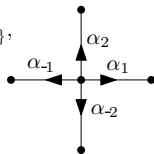
- les probabilités de transition sont proportionnelles aux poids des arêtes ;
- le poids d'une arête croît de 1 après chaque traversée de celle-ci.

Autrement dit,

$$P((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n) = \frac{\alpha_e + N_e^{(n)}}{\sum_{\underline{f}=e} (\alpha_f + N_f^{(n)})} \mathbf{1}_{\{\underline{e}=X_n\}},$$

où  $N_f^{(n)}$  est le nombre de traversées de l'arête  $f$  jusqu'à l'instant  $n$ .

Dans  $\mathbb{Z}^d$  : poids invariants par translation  $\rightarrow$  il y a  $2d$  paramètres



## Théorème

La marche aléatoire renforcée par arêtes orientées, de poids initiaux  $\alpha_e, e \in E$   
*a même loi que*

la marche aléatoire dans un milieu aléatoire de Dirichlet de paramètres  $\alpha_e, e \in E$ .

# Marche renforcée par arêtes orientées

Graphe  $G = (V, E)$  orienté.

On se donne des **poinds initiaux**  $\alpha_e > 0$  pour  $e \in E$  (arêtes orientées  $e = (\underline{e}, \bar{e})$ ).

La **marche aléatoire renforcée par arêtes orientées** vérifie  $X_0 = o$ , puis :

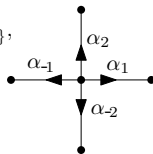
- les probabilités de transition sont proportionnelles aux poids des arêtes ;
- le poids d'une arête croît de 1 après chaque traversée de celle-ci.

Autrement dit,

$$P((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n) = \frac{\alpha_e + N_e^{(n)}}{\sum_{\underline{f}=e} (\alpha_f + N_f^{(n)})} \mathbf{1}_{\{\underline{e}=X_n\}},$$

où  $N_f^{(n)}$  est le nombre de traversées de l'arête  $f$  jusqu'à l'instant  $n$ .

Dans  $\mathbb{Z}^d$  : poids invariants par translation  $\rightarrow$  il y a  $2d$  paramètres



## Théorème

La marche aléatoire renforcée par arêtes orientées, de poids initiaux  $\alpha_e, e \in E$   
*a même loi que*

la marche aléatoire dans un milieu aléatoire de Dirichlet de paramètres  $\alpha_e, e \in E$ .

## Marche aléatoire en milieu de Dirichlet :

On tire  $(Z_e)_{e \in E}$  indépendantes, avec  $Z_e \sim \Gamma(\alpha_e)$ , puis la chaîne de Markov  $X$  avec

$$P((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n, Z) = \frac{Z_e}{\sum_{\underline{f}=e} Z_f} \mathbf{1}_{\{\underline{e}=X_n\}}.$$

Sur  $\mathbb{Z}$ , le comportement des MAMA est bien connu, donc celui de la marche renforcée aussi :

- Si  $\alpha_1 = \alpha_{-1}$ , récurrence p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ ,  $X_n \rightarrow +\infty$ , p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1} + 1$ ,  $\frac{X_n}{n} \rightarrow v = \frac{\alpha_1 - \alpha_{-1} - 1}{\alpha_1 + \alpha_{-1} - 1} > 0$ , p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1} + 2$ , TCL
- ...

⇒ on s'intéresse au cas  $\mathbf{d} \geq 2$ .

Sur  $\mathbb{Z}$ , le comportement des MAMA est bien connu, donc celui de la marche renforcée aussi :

- Si  $\alpha_1 = \alpha_{-1}$ , récurrence p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ ,  $X_n \rightarrow +\infty$ , p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1} + 1$ ,  $\frac{X_n}{n} \rightarrow v = \frac{\alpha_1 - \alpha_{-1} - 1}{\alpha_1 + \alpha_{-1} - 1} > 0$ , p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1} + 2$ , TCL
- ...

⇒ on s'intéresse au cas  $d \geq 2$ .

Questions évoquées dans cet exposé : si les poids ne sont pas symétriques,

- Est-ce que  $X_n \cdot \vec{u} \rightarrow +\infty$  ? (selon le vecteur  $\vec{u}$ ) **(transience directionnelle)**
- Est-ce que  $\frac{X_n}{\|X_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vec{v}$  ? **(direction asymptotique)**

Sur  $\mathbb{Z}$ , le comportement des MAMA est bien connu, donc celui de la marche renforcée aussi :

- Si  $\alpha_1 = \alpha_{-1}$ , récurrence p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ ,  $X_n \rightarrow +\infty$ , p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1} + 1$ ,  $\frac{X_n}{n} \rightarrow v = \frac{\alpha_1 - \alpha_{-1} - 1}{\alpha_1 + \alpha_{-1} - 1} > 0$ , p.s.
- Si  $\alpha_1 > \alpha_{-1} + 2$ , TCL
- ...

⇒ on s'intéresse au cas  $\mathbf{d} \geq 2$ .

Questions évoquées dans cet exposé : si les poids ne sont pas symétriques,

- Est-ce que  $X_n \cdot \vec{u} \rightarrow +\infty$  ? (selon le vecteur  $\vec{u}$ ) **(transience directionnelle)**
- Est-ce que  $\frac{X_n}{\|X_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vec{v}$  ? **(direction asymptotique)**

**NB.** Les temps de sortie de  $\{0, \vec{e}_i\}$  ont des queues lourdes. On pose

$$\kappa = 2 \sum_{|e|=1} \alpha_e - \max_{1 \leq i \leq d} (\alpha_i + \alpha_{-i})$$

$$\kappa \leq 1 \Leftrightarrow \text{il existe } e \text{ tel que } E_o[\text{tps de sortie de } \{0, e\}] = \infty \Rightarrow \frac{X_n}{n} \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$



Graphe orienté  $G = (V, E)$ , avec poids  $\alpha = (\alpha_e)_{e \in E}$ .

On définit le *graphe retourné*  $\check{G} = (V, \check{E})$ , dont les arêtes  $\check{e}$  sont les *retournés*  $(y, x)$  des arêtes  $e = (x, y) \in E$  et conservent leur poids :  $\check{\alpha}_{\check{e}} = \alpha_e$ .

Pour  $x \in V$ , on note  $\alpha_x$  la somme des poids sortants de  $x$  :

$$\alpha_x = \sum_y \alpha_{(x,y)}.$$

## Lemme

On suppose  $\text{div}(\alpha) = 0$  : pour tout  $x \in V$ ,  $\alpha_x = \check{\alpha}_x$ .

Alors, pour tout cycle  $\sigma$  dans  $G$  passant par  $o$ ,

$$P_o^{(\alpha)}((X_n)_n \text{ suit } \sigma) = P_o^{(\check{\alpha})}((X_n)_n \text{ suit } \check{\sigma}).$$

Graphe orienté  $G = (V, E)$ , avec poids  $\alpha = (\alpha_e)_{e \in E}$ .

On définit le *graphe retourné*  $\check{G} = (V, \check{E})$ , dont les arêtes  $\check{e}$  sont les *retournés*  $(y, x)$  des arêtes  $e = (x, y) \in E$  et conservent leur poids :  $\check{\alpha}_{\check{e}} = \alpha_e$ .

Pour  $x \in V$ , on note  $\alpha_x$  la somme des poids sortants de  $x$  :

$$\alpha_x = \sum_y \alpha_{(x,y)}.$$

## Lemme

On suppose  $\text{div}(\alpha) = 0$  : pour tout  $x \in V$ ,  $\alpha_x = \check{\alpha}_x$ .

Alors, pour tout cycle  $\sigma$  dans  $G$  passant par  $o$ ,

$$P_o^{(\alpha)}((X_n)_n \text{ suit } \sigma) = P_o^{(\check{\alpha})}((X_n)_n \text{ suit } \check{\sigma}).$$

**Preuve :**

$$P_o^{(\alpha)}(\sigma) = \frac{\prod_{e \in E} \alpha_e (\alpha_e + 1) \cdots (\alpha_e + N_e(\sigma) - 1)}{\prod_{x \in V} \alpha_x (\alpha_x + 1) \cdots (\alpha_x + N_x(\sigma) - 1)}$$

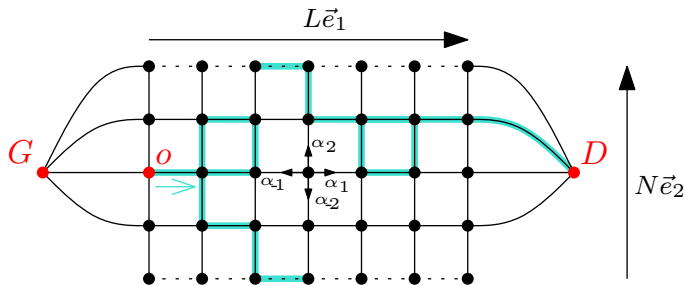
Or,  $\alpha_e = \check{\alpha}_{\check{e}}$ ,  $\alpha_x = \check{\alpha}_x$ ,  $N_e(\sigma) = N_{\check{e}}(\check{\sigma})$ , et  $N_x(\sigma) = N_x(\check{\sigma})$ .





# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :

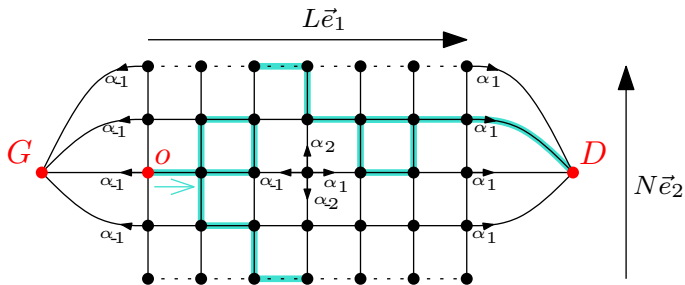


Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G)$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut–bas) :

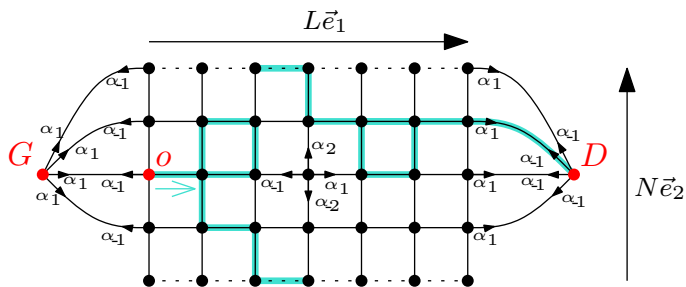


Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G)$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :

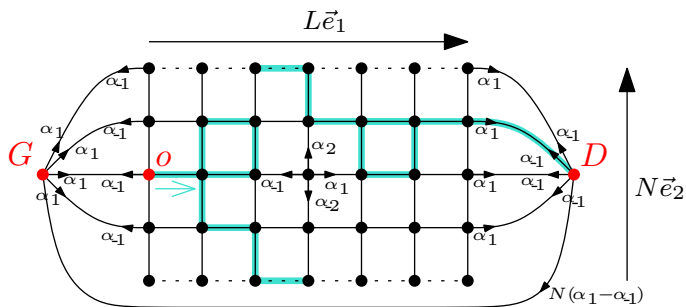


Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G)$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :



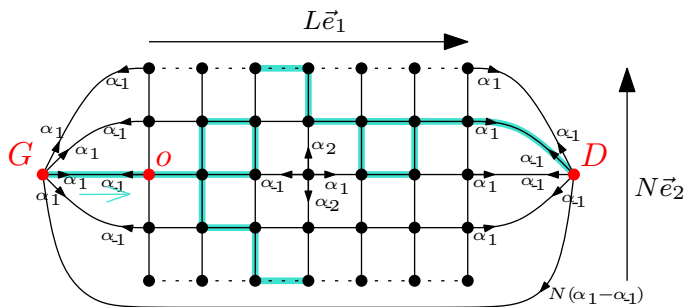
Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G)$$



# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :

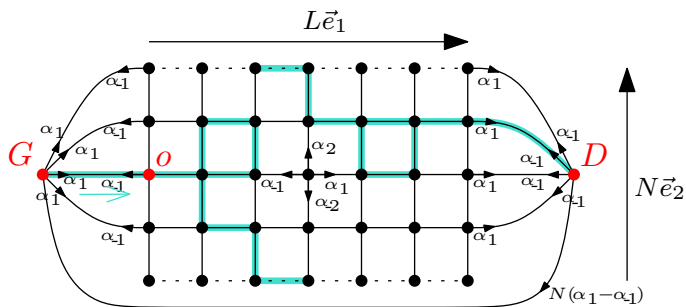


Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G) = P_G^{(\alpha)}(H_D < H_G^+)$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :

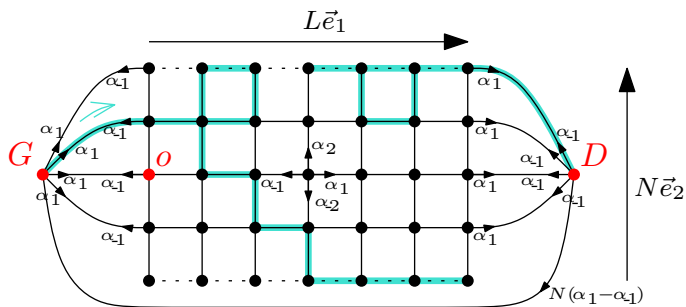


Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G) = P_G^{(\alpha)}(H_D < H_G^+)$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :

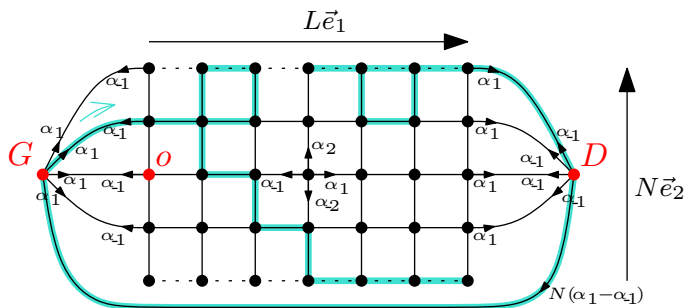


Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G) = P_G^{(\alpha)}(H_D < H_G^+)$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :

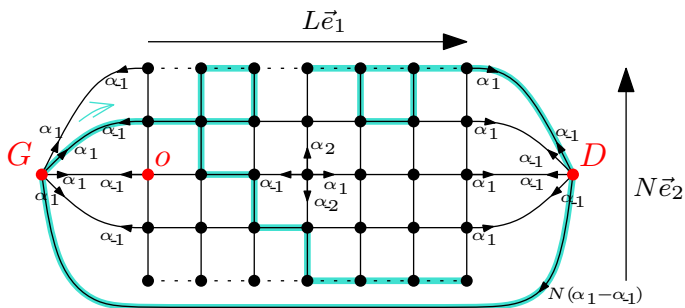


Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G) = P_G^{(\alpha)}(H_D < H_G^+) \geq P_G^{(\alpha)}(X_{H_G^+ - 1} = D)$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :

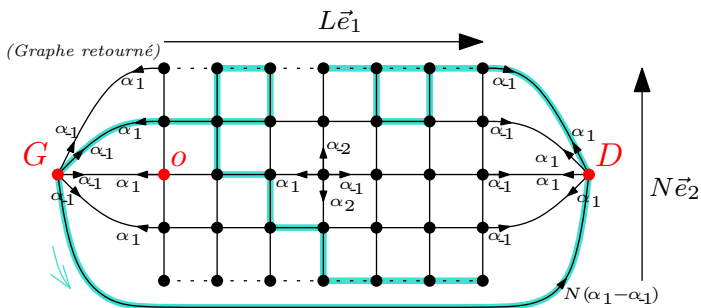


Probabilité de sortie par la droite ?

$$P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G) = P_G^{(\alpha)}(H_D < H_G^+) \geq P_G^{(\alpha)}(X_{H_G^+ - 1} = D) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel}$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut–bas) :

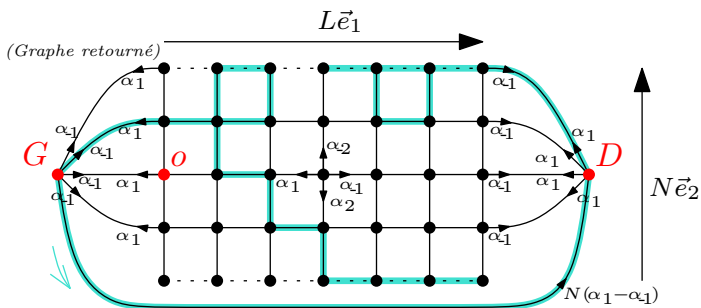


Probabilité de sortie par la droite ?

$$\begin{aligned} P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G) &= P_G^{(\alpha)}(H_D < H_G^+) \geq P_G^{(\alpha)}(X_{H_G^+-1} = D) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel} \\ &= P_G^{(\check{\alpha})}(X_1 = D) \end{aligned}$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :

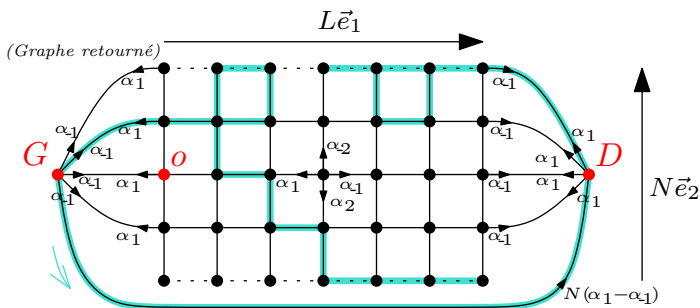


Probabilité de sortie par la droite ?

$$\begin{aligned}
 P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G) &= P_G^{(\alpha)}(H_D < H_G^+) \geq P_G^{(\alpha)}(X_{H_G^+ - 1} = D) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel} \\
 &= P_G^{(\check{\alpha})}(X_1 = D) \quad \text{Loi du premier pas : connue!} \\
 &= \frac{N(\alpha_1 - \alpha_{-1})}{N\alpha_{-1} + N(\alpha_1 - \alpha_{-1})} = 1 - \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_1}. \quad \text{Indépendant de } N!
 \end{aligned}$$

# Application — Transience directionnelle : une minoration

On suppose  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ . On considère le cylindre (identification haut-bas) :



Probabilité de sortie par la droite ?

$$\begin{aligned}
 P_o^{(\alpha)}(H_D < H_G) &= P_G^{(\alpha)}(H_D < H_G^+) \geq P_G^{(\alpha)}(X_{H_G^+ - 1} = D) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel} \\
 &= P_G^{(\check{\alpha})}(X_1 = D) \quad \text{Loi du premier pas : connue!} \\
 &= \frac{N(\alpha_1 - \alpha_{-1})}{N\alpha_{-1} + N(\alpha_1 - \alpha_{-1})} = 1 - \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_1}. \quad \text{Indépendant de } N!
 \end{aligned}$$

$N \rightarrow \infty$  puis  $L \rightarrow \infty$  donne :

$$\boxed{P_o^{(\alpha)}(\forall n, X_n \cdot e_1 \geq 0) \geq 1 - \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_1}}.$$

D'où rapidement :  $P_o^{(\alpha)}(X_n \cdot e_1 \rightarrow +\infty) \geq 1 - \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_1}$ .



On a obtenu : si  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ , alors

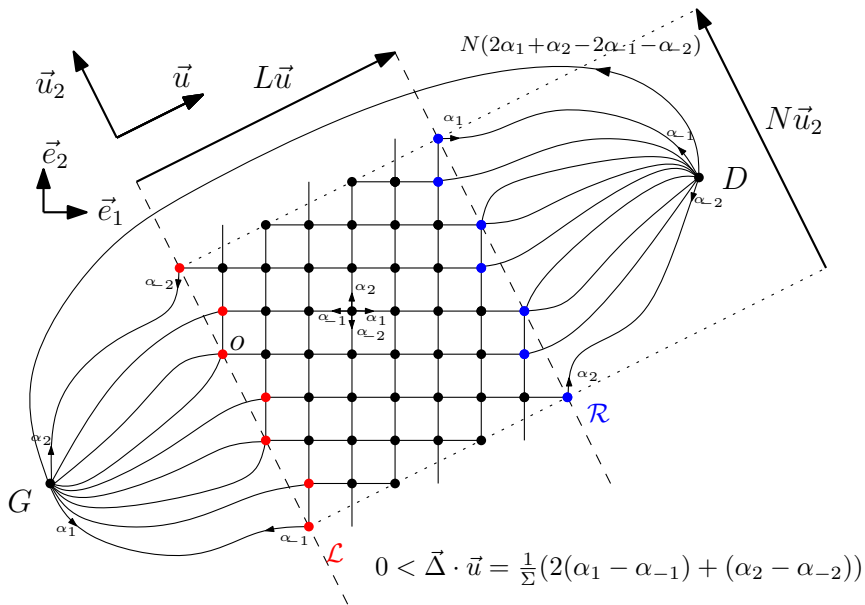
$$P_o(X_n \cdot \vec{e}_1 \rightarrow +\infty) \geq 1 - \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_1}.$$

La preuve s'adapte pour montrer un résultat plus général :

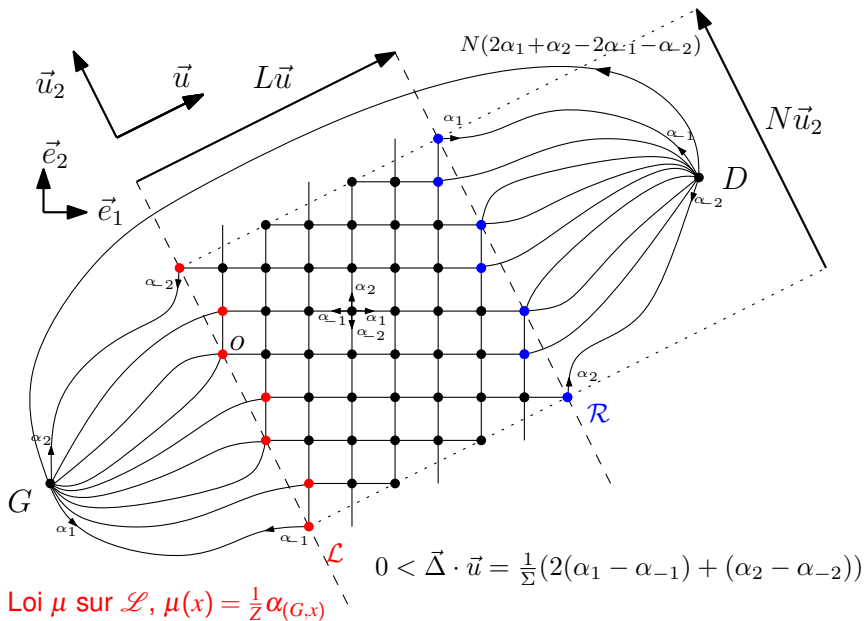
Pour  $\vec{u} \in \mathbb{Q}^d$ , dès que  $\vec{u} \cdot \vec{\Delta} > 0$ , où  $\vec{\Delta} = E_o[X_1] = \frac{1}{\sum_i (\alpha_i + \alpha_{-i})} \sum_i (\alpha_i - \alpha_{-i}) \vec{e}_i$ ,

$$P_o^{(\alpha)}(X_n \cdot \vec{u} \rightarrow +\infty) \geq 1 - \frac{E_o[(X_1 \cdot \vec{u})_-]}{E_o[(X_1 \cdot \vec{u})_+]} > 0.$$

# Schéma pour une direction $\vec{u}$ plus quelconque



# Schéma pour une direction $\vec{u}$ plus quelconque



On a obtenu : si  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ , alors

$$P_o(X_n \cdot \vec{e}_1 \rightarrow +\infty) \geq 1 - \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_1}.$$

La preuve s'adapte pour montrer un résultat plus général :

Pour  $\vec{u} \in \mathbb{Q}^d$ , dès que  $\vec{u} \cdot \vec{\Delta} > 0$ , où  $\vec{\Delta} = E_o[X_1] = \frac{1}{\sum_i (\alpha_i + \alpha_{-i})} \sum_i (\alpha_i - \alpha_{-i}) \vec{e}_i$ ,

$$P_o^{(\alpha)}(X_n \cdot \vec{u} \rightarrow +\infty) \geq 1 - \frac{E_o[(X_1 \cdot \vec{u})_-]}{E_o[(X_1 \cdot \vec{u})_+]} > 0.$$

On a obtenu : si  $\alpha_1 > \alpha_{-1}$ , alors

$$P_o(X_n \cdot \vec{e}_1 \rightarrow +\infty) \geq 1 - \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_1}.$$

La preuve s'adapte pour montrer un résultat plus général :

Pour  $\vec{u} \in \mathbb{Q}^d$ , dès que  $\vec{u} \cdot \vec{\Delta} > 0$ , où  $\vec{\Delta} = E_o[X_1] = \frac{1}{\sum_i (\alpha_i + \alpha_{-i})} \sum_i (\alpha_i - \alpha_{-i}) \vec{e}_i$ ,

$$P_o^{(\alpha)}(X_n \cdot \vec{u} \rightarrow +\infty) \geq 1 - \frac{E_o[(X_1 \cdot \vec{u})_-]}{E_o[(X_1 \cdot \vec{u})_+]} > 0.$$

$\Rightarrow$  S'il y a une direction asymptotique déterministe  $\vec{v}$  p.s., alors  $\vec{v} = \frac{\vec{\Delta}}{\|\vec{\Delta}\|}$ .

On en déduit aussi l'**existence** d'une direction asymptotique, à l'aide d'autres arguments :

- Si  $d = 2$ , avec la **loi du 0-1 de Zerner-Merkl**, et un résultat de Simenhaus (utilisation d'une **structure de renouvellement**)
- Si  $d \geq 3$ , grâce à l'étude des **mesures invariantes de l'environnement vu par la particule** de Sabot et Bouchet (arguments spécifiques au cas Dirichlet, dont le retournement temporel)

D'où finalement : dès que  $\vec{\Delta} \neq 0$ ,

$$\boxed{\frac{X_n}{\|X_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\vec{\Delta}}{\|\vec{\Delta}\|} \quad \text{p.s.}}$$

On en déduit aussi l'**existence** d'une direction asymptotique, à l'aide d'autres arguments :

- Si  $d = 2$ , avec la **loi du 0-1 de Zerner-Merkl**, et un résultat de Simenhaus (utilisation d'une **structure de renouvellement**)
- Si  $d \geq 3$ , grâce à l'étude des **mesures invariantes de l'environnement vu par la particule** de Sabot et Bouchet (arguments spécifiques au cas Dirichlet, dont le retournement temporel)

D'où finalement : dès que  $\vec{\Delta} \neq 0$ ,

$$\boxed{\frac{X_n}{\|X_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\vec{\Delta}}{\|\vec{\Delta}\|} \quad \text{p.s.}}$$

De plus, il y a en fait **égalité** dans une minoration précédente :

$$\boxed{P_o^{(\alpha)}(\forall n, X_n \cdot e_1 \geq 0) = 1 - \frac{\alpha_{-1}}{\alpha_1} .}$$

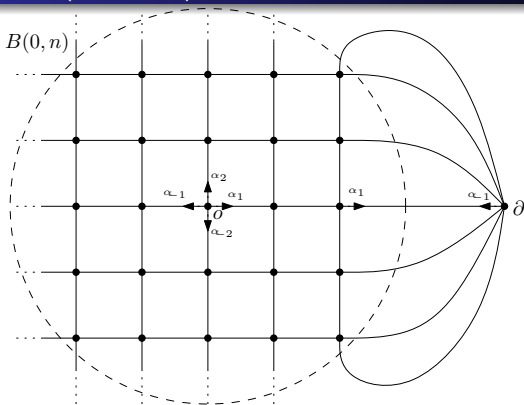
(utilise le retournement temporel, et les arguments plus techniques ci-dessus)

- (Sabot-Tournier, Tournier, Bouchet) Si  $d \geq 2$  et  $\vec{\Delta} \neq 0$ ,  $\frac{X_n}{\|X_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\vec{\Delta}}{\|\vec{\Delta}\|}$  p.s.
- (Sabot) Si  $d \geq 3$ , transience :  $\|X_n\| \rightarrow +\infty$  p.s.  
(retournement temporel)
- (Sabot) Si  $d \geq 3$  et  $\vec{\Delta} \neq 0$ , balisticité  $\Leftrightarrow \kappa > 1$   
(retournement temporel, environnement vu depuis la particule, optimisation de flots)
- (Bouchet) Si  $d \geq 3$ ,  $\vec{\Delta} \neq 0$  et  $0 < \kappa < 1$ ,  $\|X_n\| = n^{\kappa+o(p)}(1)$   
(idem, et accélération de la marche)
- (Enriquez-Sabot, Tournier) Si  $d = 2$  et  $\sum_i |\alpha_i - \alpha_{-i}| > 1$ , balisticité  
(calcul sur Dirichlet, critère de Kalikow)
- (+ Bouchet-Ramírez-Sabot) Si  $d \geq 2$ ,  $\sum_i |\alpha_i - \alpha_{-i}| > 1$  et  $\kappa > 2$ , TCL.  
(critère de Kalikow, critères de Sznitman-Berger-Drewitz-Ramírez (renormalisation) adapté au cas elliptique par Campos-Ramírez et raffiné par Bouchet-Ramírez-Sabot)

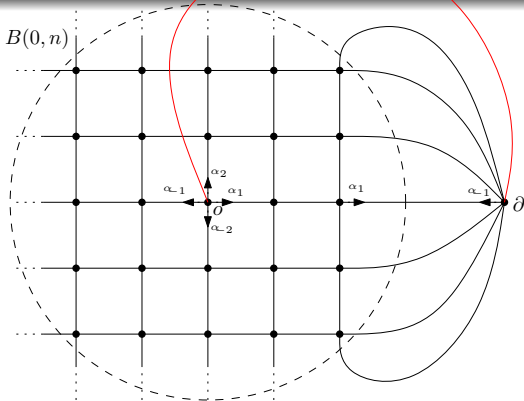
Encore ouverts :

- ( $d \geq 2$ ,  $\kappa \leq 1$ ) Loi limite ? ( $\|X_n\| \simeq n^\kappa$ )
- ( $d \geq 2$ ,  $\kappa > 1$ ) Validité du TCL ? ( $\kappa > 2$  ?)
- ( $d = 2$ ,  $\vec{\Delta} \neq 0$ ) Critère optimal de balisticité ? ( $\kappa > 1$  ?)
- ( $d = 2$ ,  $\vec{\Delta} = 0$ ) Récurrence ?

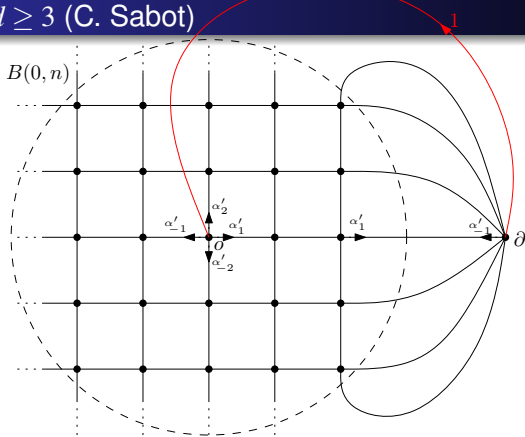




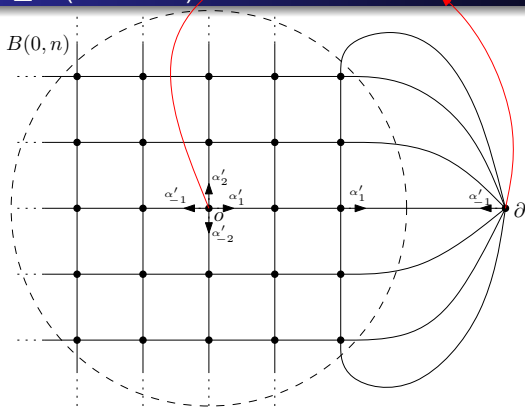
$$P_o^{(\alpha)}(H_\partial < H_o^+)$$



$$P_o^{(\alpha)}(H_\partial < H_o^+)$$

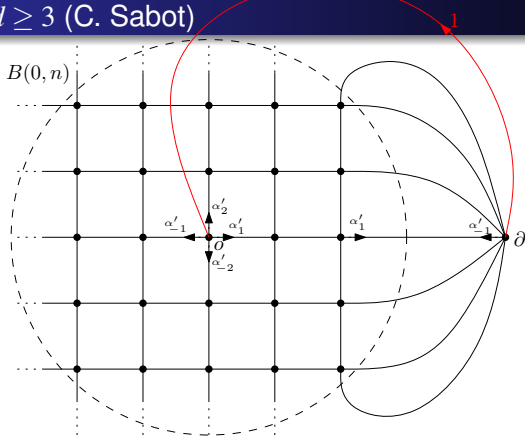


Avec  $\alpha'_e = \alpha_e + \theta_e$ , où  $\operatorname{div} \theta = \delta_o - \delta_\partial$  (flot unitaire),  
 $P_o^{(\alpha')} (H_\partial < H_o^+)$



Avec  $\alpha'_e = \alpha_e + \theta_e$ , où  $\operatorname{div} \theta = \delta_o - \delta_\partial$  (flot unitaire),

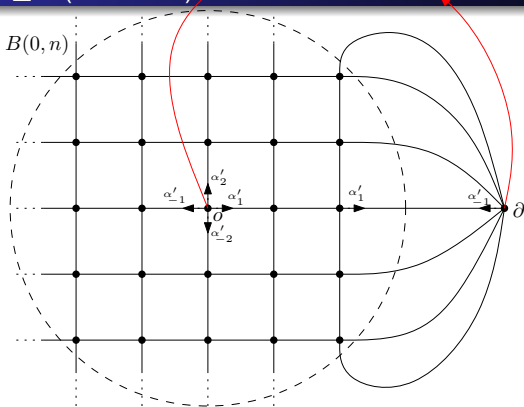
$$\begin{aligned}
 P_o^{(\alpha')} (H_\partial < H_o^+) &\geq P_o^{(\alpha')} (X_{H_o^+ - 1} = \partial) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel} \\
 &= P_o^{(\alpha')} (X_1 = \partial) = \frac{1}{1 + \alpha_o} = c > 0
 \end{aligned}$$



Avec  $\alpha'_e = \alpha_e + \theta_e$ , où  $\text{div} \theta = \delta_o - \delta_\partial$  (flot unitaire),

$$\begin{aligned}
 P_o^{(\alpha')} (H_\partial < H_o^+) &\geq P_o^{(\alpha')} (X_{H_o^+ - 1} = \partial) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel} \\
 &= P_o^{(\alpha')} (X_1 = \partial) = \frac{1}{1 + \alpha_o} = c > 0
 \end{aligned}$$

Limite  $n \rightarrow \infty$  :  $P_o^{(\alpha')} (H_o^+ = \infty) > 0 \Rightarrow$  transience **pour les poids  $\alpha'$**

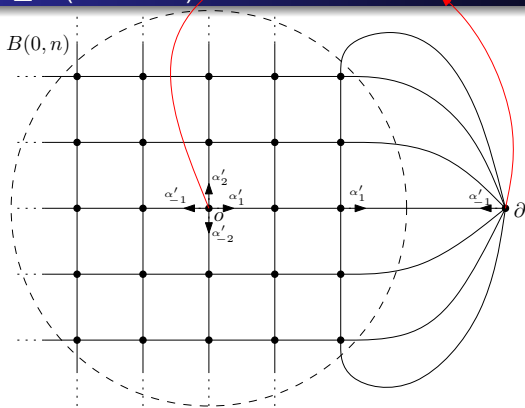


Avec  $\alpha'_e = \alpha_e + \theta_e$ , où  $\operatorname{div} \theta = \delta_o - \delta_\partial$  (flot unitaire),

$$\begin{aligned}
 P_o^{(\alpha')} (H_\partial < H_o^+) &\geq P_o^{(\alpha')} (X_{H_o^+ - 1} = \partial) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel} \\
 &= P_o^{(\alpha')} (X_1 = \partial) = \frac{1}{1 + \alpha_o} = c > 0
 \end{aligned}$$

Retour à  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}
 P^{(\alpha)} (H_\partial < H_o^+) &= \mathbb{E}^{(\alpha')} [P_\omega (H_\partial < H_o^+) \prod_e \omega_e^{-\theta_e}] \cdot \frac{Z_{\alpha'}}{Z_\alpha} \\
 &\geq P^{(\alpha')} (H_\partial < H_o^+)^p \Phi(\alpha, \theta, p)
 \end{aligned}$$

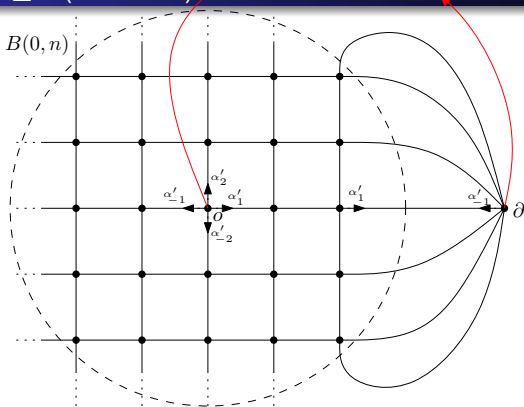


Avec  $\alpha'_e = \alpha_e + \theta_e$ , où  $\operatorname{div} \theta = \delta_o - \delta_{\partial}$  (flot unitaire),

$$\begin{aligned}
 P_o^{(\alpha')} (H_{\partial} < H_o^+) &\geq P_o^{(\alpha')} (X_{H_o^+ - 1} = \partial) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel} \\
 &= P_o^{(\alpha')} (X_1 = \partial) = \frac{1}{1 + \alpha_o} = c > 0
 \end{aligned}$$

Retour à  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}
 P^{(\alpha)} (H_{\partial} < H_o^+) &= \mathbb{E}^{(\alpha')} [P_{\omega} (H_{\partial} < H_o^+) \prod_e \omega_e^{-\theta_e}] \cdot \frac{Z_{\alpha'}}{Z_{\alpha}} \\
 &\geq P^{(\alpha')} (H_{\partial} < H_o^+)^p \Phi(\alpha, \theta, p) \geq c^p \exp(-C \sum_e \theta_e^2)
 \end{aligned}$$



Avec  $\alpha'_e = \alpha_e + \theta_e$ , où  $\text{div} \theta = \delta_o - \delta_\partial$  (flot unitaire),

$$\begin{aligned}
 P_o^{(\alpha')} (H_\partial < H_o^+) &\geq P_o^{(\alpha')} (X_{H_o^+ - 1} = \partial) \quad \text{Cycles!} \rightarrow \text{Retournement temporel} \\
 &= P_o^{(\alpha')} (X_1 = \partial) = \frac{1}{1 + \alpha_o} = c > 0
 \end{aligned}$$

Retour à  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}
 P^{(\alpha)} (H_\partial < H_o^+) &= \mathbb{E}^{(\alpha')} [P_\omega (H_\partial < H_o^+) \prod_e \omega_e^{-\theta_e}] \cdot \frac{Z_{\alpha'}}{Z_\alpha} \\
 &\geq P^{(\alpha')} (H_\partial < H_o^+)^p \Phi(\alpha, \theta, p) \geq c^p \exp(-C \sum_e \theta_e^2) > a \quad \text{Possible si } d \geq 3.
 \end{aligned}$$



## Loi du 0-1 pour la transience

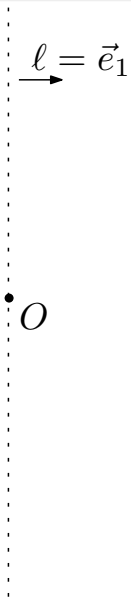
Pour toute MAMA elliptique sur  $\mathbb{Z}^d$ ,

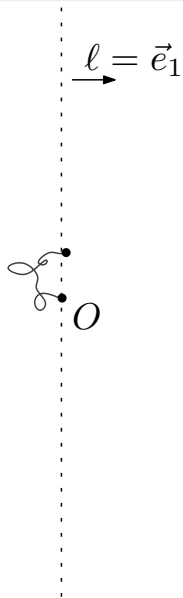
$$P(|X_n| \rightarrow \infty) \in \{0, 1\}.$$

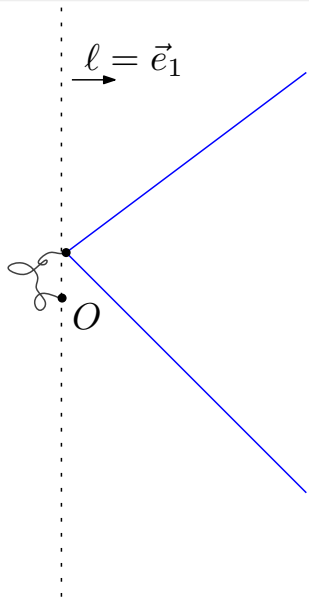
Preuve : ergodicité.

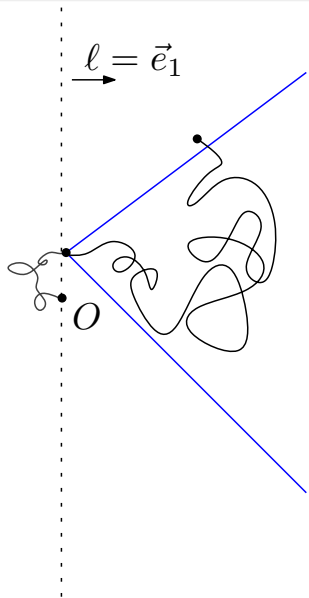
$$\vec{\ell} = \vec{e}_1$$

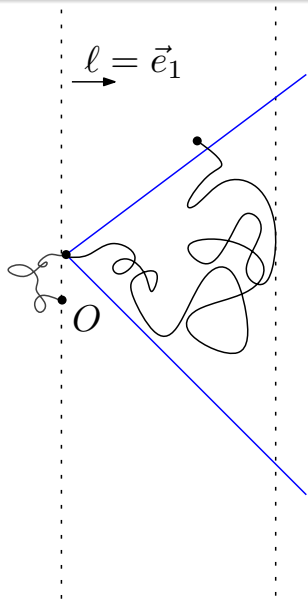
•  $O$

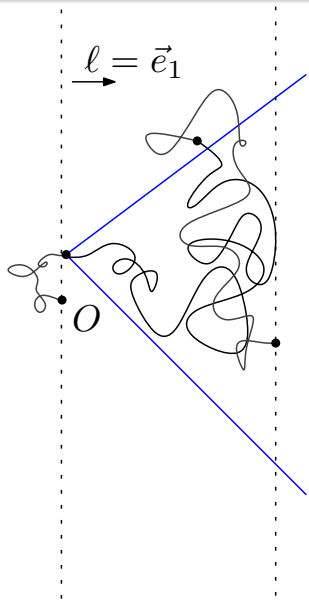




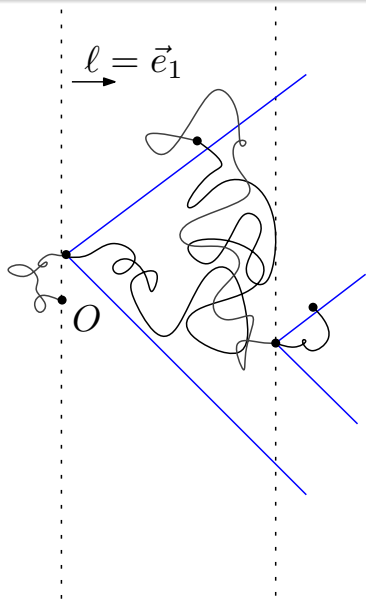


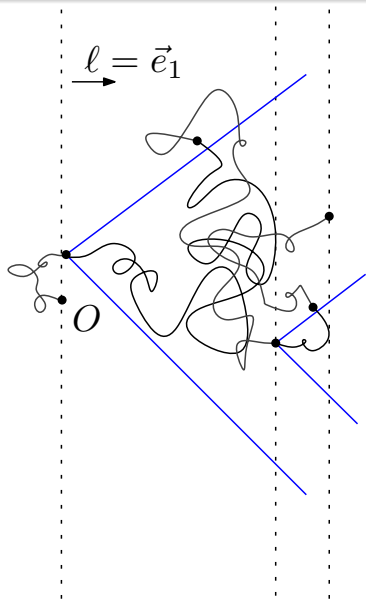


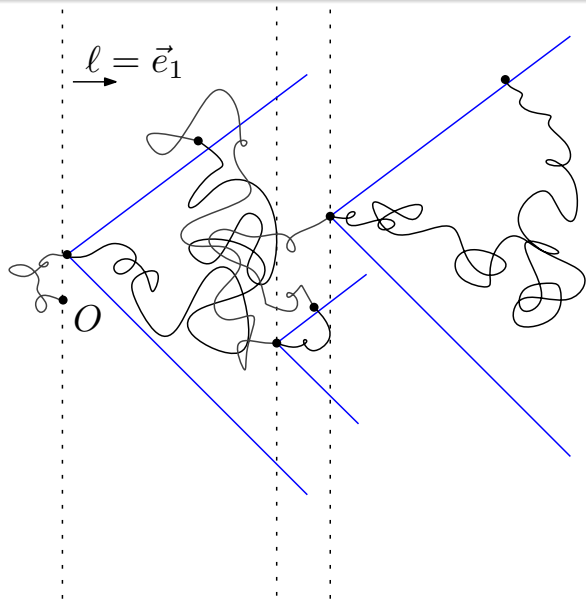


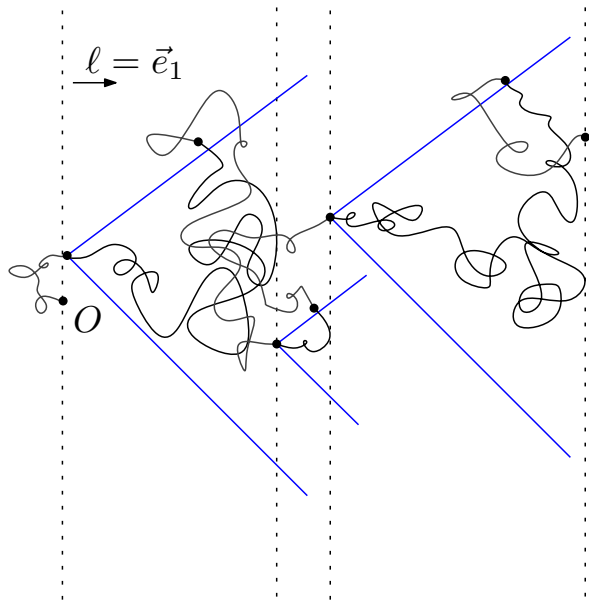


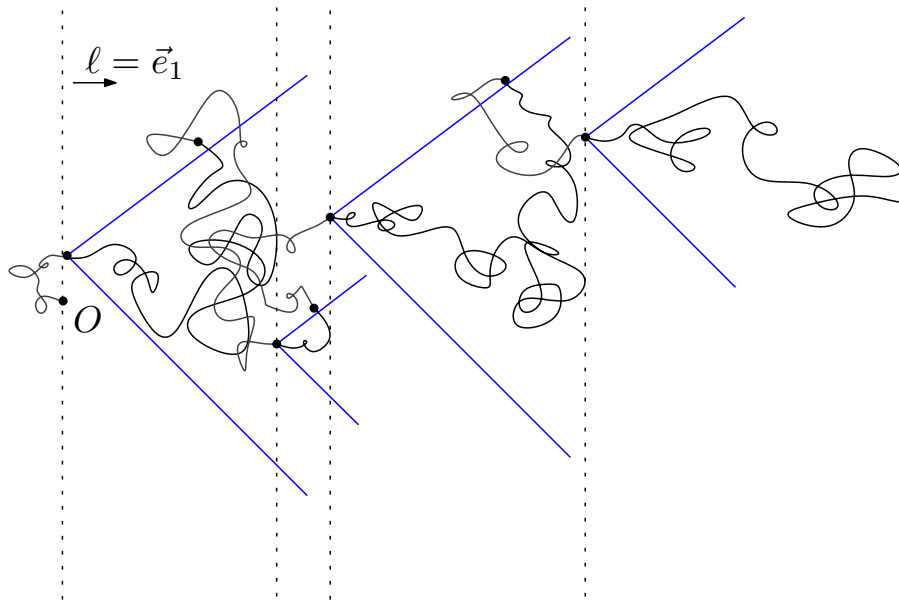


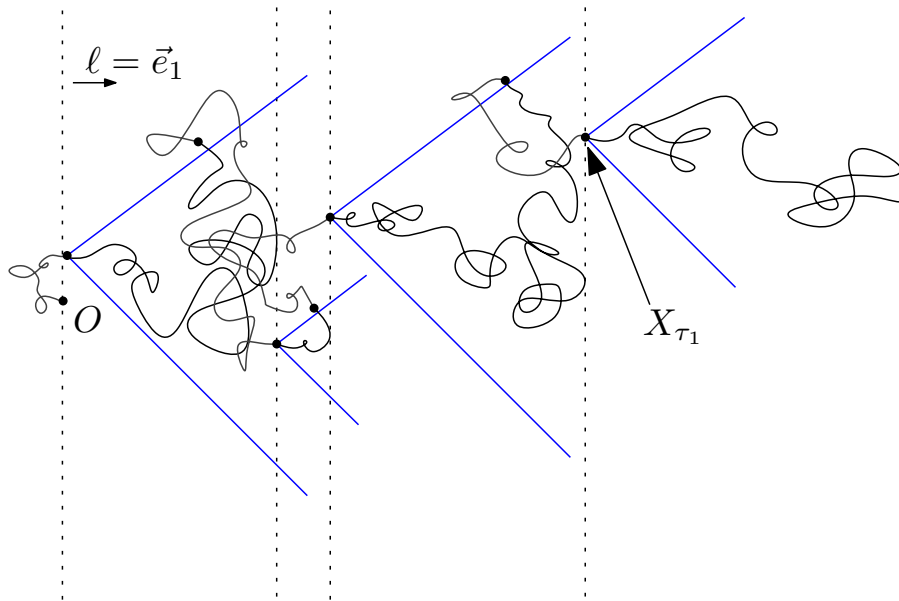


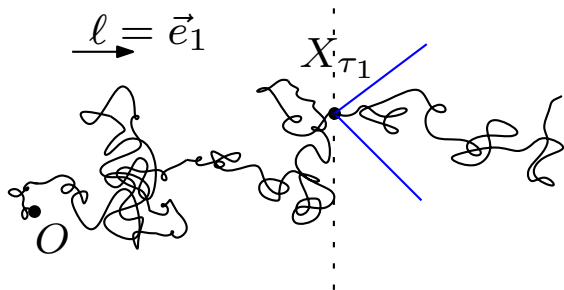


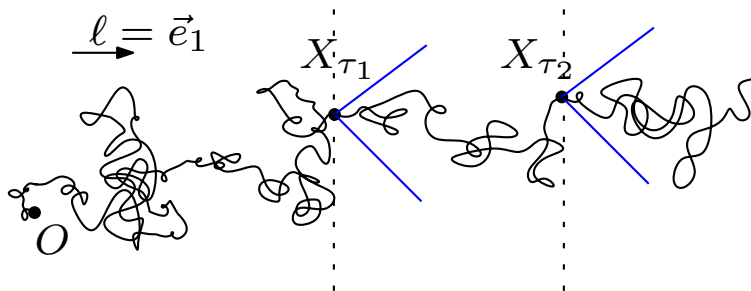




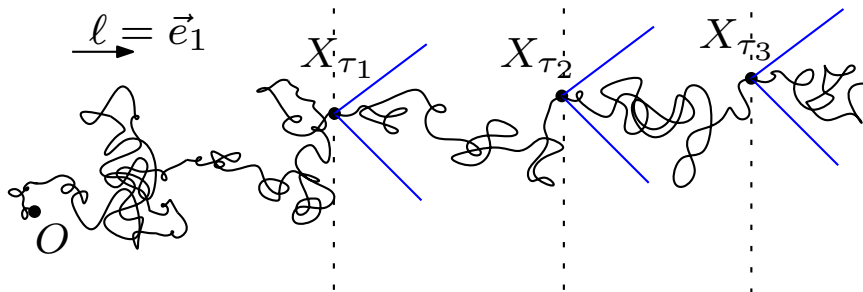


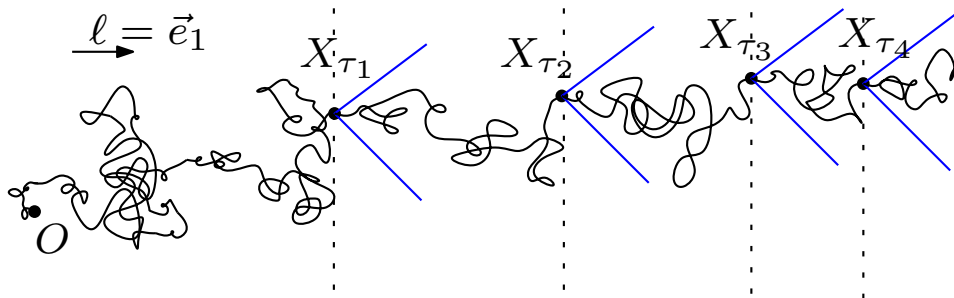






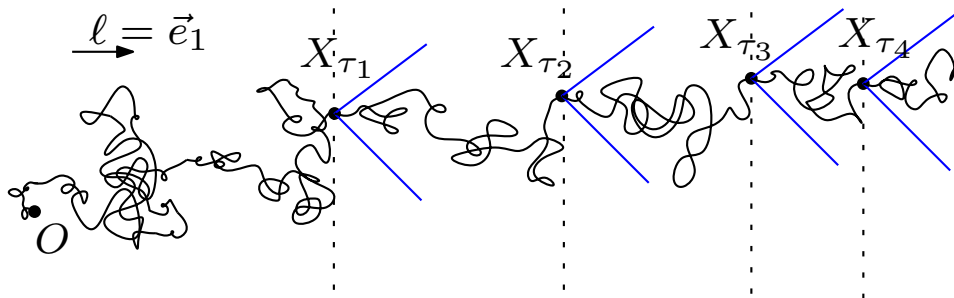






Densité moyenne de  $\{X_{\tau_k} \cdot \vec{e}_1 : k \geq 1\} \subset \mathbb{N}$  :

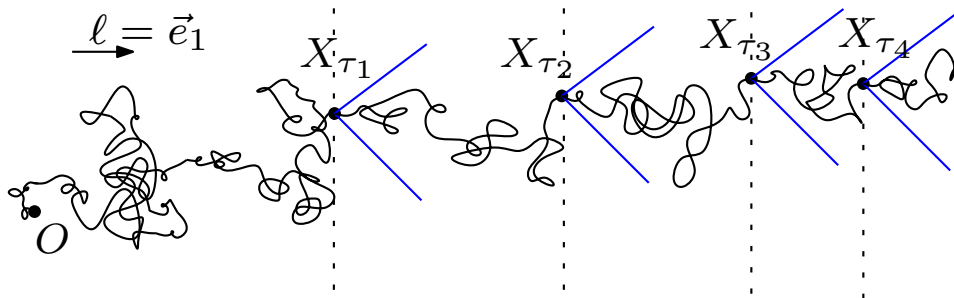
$$E \left[ \frac{1}{N} \# \left\{ k \leq N : \exists i, X_{\tau_i} \cdot \vec{e}_1 = k \right\} \right]$$



Densité moyenne de  $\{X_{\tau_k} \cdot \vec{e}_1 : k \geq 1\} \subset \mathbb{N}$  :

$$E \left[ \frac{1}{N} \# \left\{ k \leq N : \exists i, X_{\tau_i} \cdot \vec{e}_1 = k \right\} \right]$$

- vaut  $P(T_C = \infty)$ , par linéarité de l'espérance ;

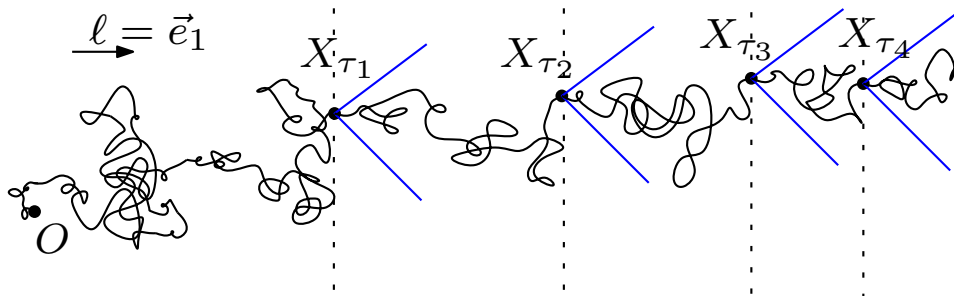


Densité moyenne de  $\{X_{\tau_k} \cdot \vec{e}_1 : k \geq 1\} \subset \mathbb{N}$  :

$$E \left[ \frac{1}{N} \# \left\{ k \leq N : \exists i, X_{\tau_i} \cdot \vec{e}_1 = k \right\} \right]$$

- vaut  $P(T_C = \infty)$ , par linéarité de l'espérance ;
- tend vers  $\frac{1}{E[(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) \cdot \vec{e}_1]}$ , par loi des grands nombres.

D'où  $E[(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) \cdot \vec{e}_1] = \frac{1}{P(T_C = \infty)} < \infty$ . Et donc  $E[\|X_{\tau_2} - X_{\tau_1}\|] < \infty$ .



Densité moyenne de  $\{X_{\tau_k} \cdot \vec{e}_1 : k \geq 1\} \subset \mathbb{N}$  :

$$E \left[ \frac{1}{N} \# \left\{ k \leq N : \exists i, X_{\tau_i} \cdot \vec{e}_1 = k \right\} \right]$$

- vaut  $P(T_C = \infty)$ , par linéarité de l'espérance ;
- tend vers  $\frac{1}{E[(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) \cdot \vec{e}_1]}$ , par loi des grands nombres.

D'où  $E[(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}) \cdot \vec{e}_1] = \frac{1}{P(T_C = \infty)} < \infty$ . Et donc  $E[\|X_{\tau_2} - X_{\tau_1}\|] < \infty$ .

LGN :  $\frac{X_{\tau_k}}{k} \rightarrow v \neq 0$ , d'où  $\frac{X_{\tau_k}}{\|X_{\tau_k}\|} \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ . Et  $\frac{X_n}{\|X_n\|} \rightarrow \frac{v}{\|v\|}$ .

## Urne linéairement renforcée

### Au début :

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$  boules de couleurs  $1, \dots, r$ .

**Puis urne renforcée** : à chaque tirage, ajout d'une boule de la couleur tirée.



Les proportions convergent p.s. vers

$$p = (p_1, \dots, p_r) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_r).$$

## Urne aléatoire

### Au début :

Proportions  $p_1, \dots, p_r$  de boules de couleurs  $1, \dots, r$ , où

$$p = (p_1, \dots, p_r) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_r).$$

**Puis urne simple** : tirages i.i.d. selon la distribution  $p$ .



## Loi de Dirichlet :

$\mathcal{D}((\alpha_i)_{i \in I})$  est la loi de  $\frac{(Z_i)_{i \in I}}{\sum_{i \in I} Z_i}$  avec  $Z_i \sim \Gamma(\alpha_i)$  indépendantes