Institut Mines-Telecom

Méthode de Stein fonctionnelle

L. Decreusefond

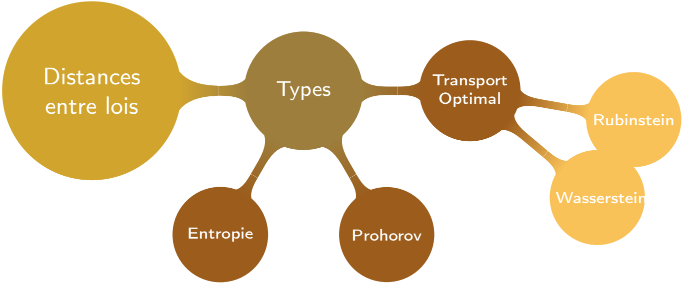
Journées MAS

Bibliographie

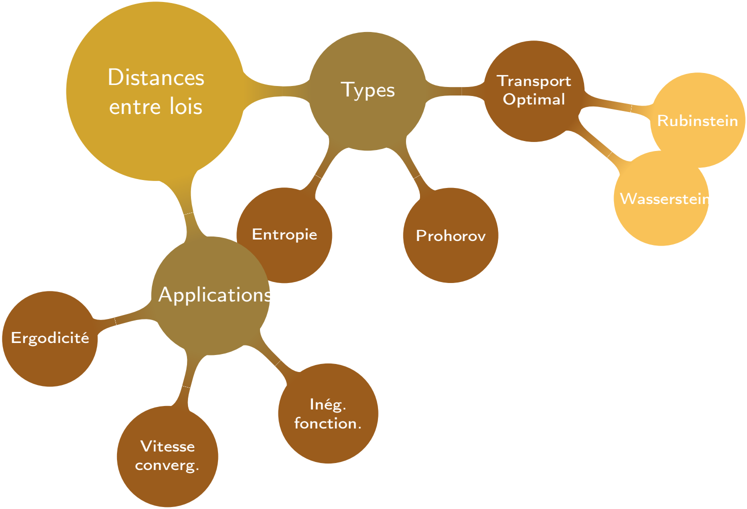
Méthode de Stein fonctionnelle

- L. Coutin and L. Decreusefond, “Stein’s method for Brownian approximations,” Communications on Stochastic Analysis, vol. 7, no. 3, pp. 349–372, Sep. 2013.http://de.arxiv.org/abs/1207.3517
- L. Coutin and L. Decreusefond, “Higher order expansions via Stein’s method,” Communications on Stochastic Analysis, 2014.http://de.arxiv.org/abs/1405.0235
- L. Decreusefond, M. Schulte and C. Thäle, “Functional Poisson approximation with applications in stochastic geometry”, http://de.arxiv.org/abs/1406.5484

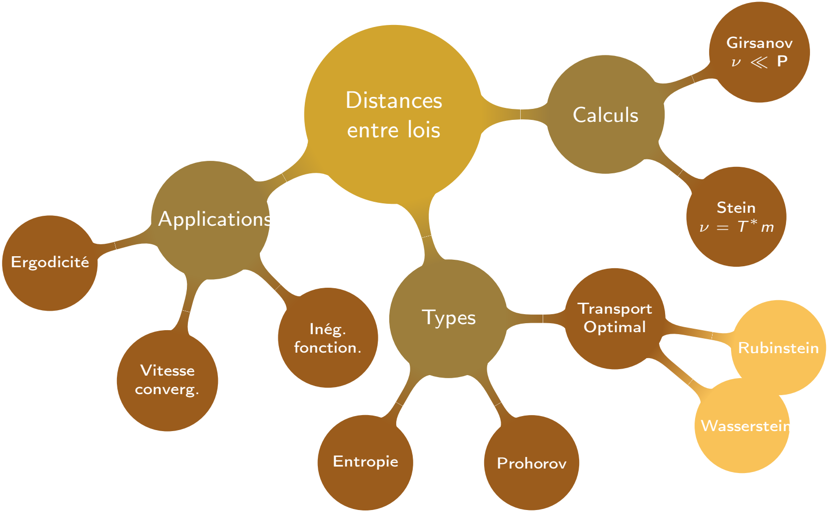
Roadmap


Distances entre lois
Types
Transport Optimal
Rubinstein
Wasserstein
Entropie
Prohorov

Roadmap

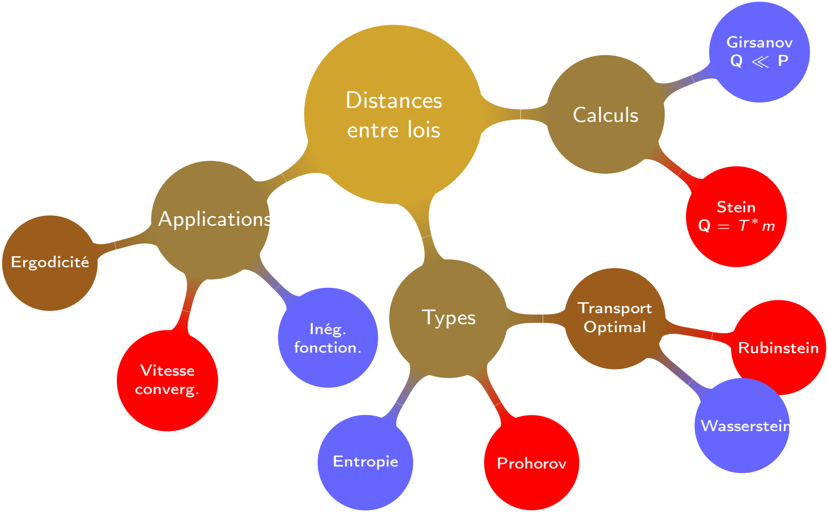

Distances entre lois
Types
Transport Optimal
Rubinstein
Wasserstein
Entropie
Prohorov
Applications
Ergodicité
Vitesse converg.
Inég. fonction.

Roadmap



Distances entre lois
Calculs
Girsanov $\nu \ll P$
Stein $\nu = T^* m$
Applications
Ergodicité
Vitesse converg.
Inég. fonction.
Types
Transport Optimal
Rubinstein
Wasserstein
Entropie
Prohorov

Roadmap



Distances entre lois
Calculs
Girsanov $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$
Stein $\mathbf{Q} = T^* m$
Applications
Ergodicité
Vitesse converg.
Inég. fonction.
Types
Transport Optimal
Rubinstein
Wasserstein
Entropie
Prohorov

f-divergence

Définition

f convexe telle que $f(1) = 0$

$$D_f(\mathbf{Q}\|\mathbf{P}) = \int f\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\right)\,\mathrm{d}\mathbf{P}$$

Exemples

Kullblack-Leibler $f(t) = t \ln t$

Hellinger $f(t) = (\sqrt{t} - 1)^2$

Variation totale $f(t) = |t - 1|$

Problème de transport, Kantorovitch (1942)

Optimisation sur l'espace des mesures

- X et Y deux espaces Polonais
- $c : X \times Y \to \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ s.c.i.
- $\mathbf{P}$ = mesure de proba. sur X
- $\mathbf{Q}$ = mesure de proba. sur Y
- Distance associée

$$\mathfrak{T}_c(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \inf_{\gamma \in \Sigma(\mathbf{P}, \mathbf{Q})} \int_{X \times Y} c(x, y) \, d\gamma(x, y).$$

Exemples

Wasserstein

- $X = Y = \mathbf{R}^n$, $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$.

Exemples

Wasserstein

- $X = Y = \mathbf{R}^n$, $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$.
- $X = Y = \mathcal{C}_0([0,1], \mathbf{R}^d)$, $c(x,y) = \frac{1}{2}|x - y|_H^2$ avec $H = W^{1,2}([0,1])$.

Rubinstein

$$X = Y = \mathbf{R}^n,\ c(x, y) = |x - y|$$

Exemples

Wasserstein

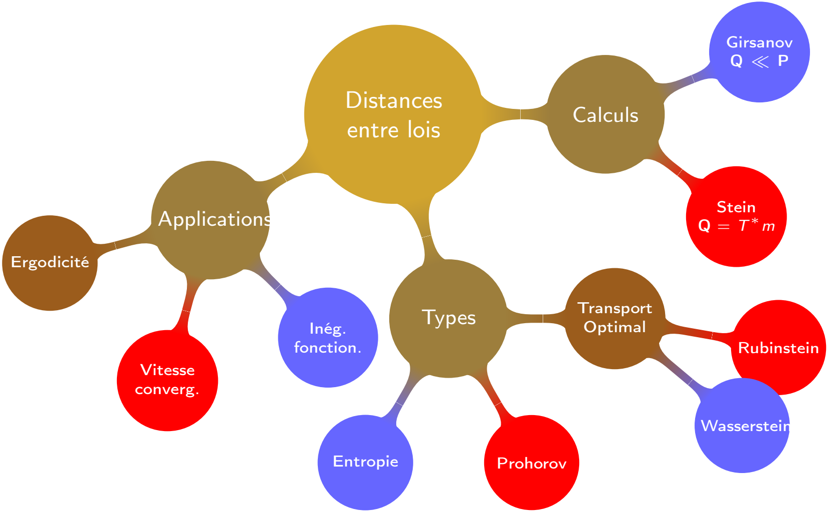
- $X = Y = \mathbf{R}^n$, $c(x, y) = \frac{1}{2}|x-y|^2$.
- $X = Y = \mathcal{C}_0([0,1], \mathbf{R}^d)$, $c(x,y) = \frac{1}{2}|x-y|_H^2$ avec $H = W^{1,2}([0,1])$.

Rubinstein

$$X = Y = \mathbf{R}^n,\ c(x, y) = |x-y|$$

Hamming

$$X = Y = \{0, 1\}^n,\ c(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{x_j \neq y_j}$$


Distances entre lois
Calculs
Girsanov $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$
Stein $\mathbf{Q} = T^* m$
Applications
Ergodicité
Vitesse converg.
Inég. fonction.
Types
Transport Optimal
Rubinstein
Wasserstein
Entropie
Prohorov

Inégalité HWI

H-W-I

Entropie (H) $H_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[L \log L]$ avec $L = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$

Inégalité HWI

H-W-I

Entropie (H) $H_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[L \log L\right]$ avec $L = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$

Wasserstein (W) $W_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathfrak{T}_{\|.\|^2/2}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$

Inégalité HWI

H-W-I

Entropie (H) $H_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[L \log L\right]$ avec $L = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$

Wasserstein (W) $W_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathfrak{T}_{\|.\|^2/2}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$

Information de Fischer (I) $I_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[|\nabla \log L|^2\right]$

Inégalité HWI

H-W-I

Entropie (H) $H_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[L \log L]$ avec $L = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$

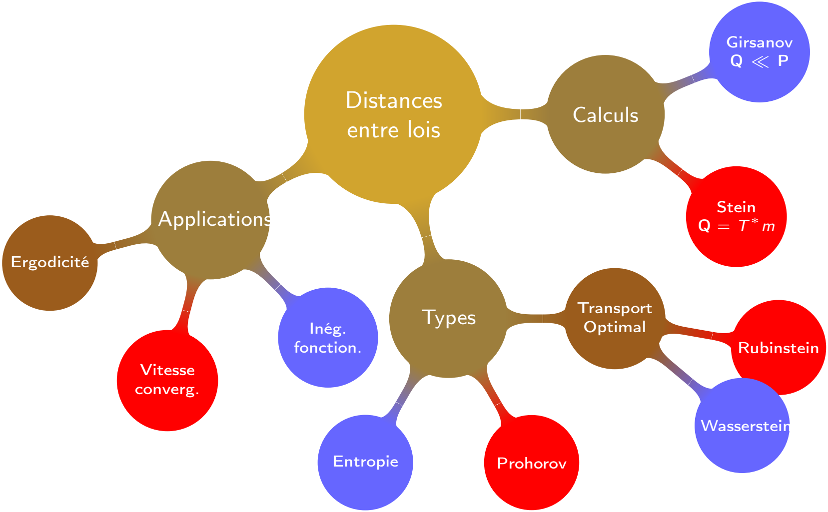
Wasserstein (W) $W_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathfrak{T}_{\|.\|^2/2}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$

Information de Fischer (I) $I_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[|\nabla \log L|^2\right]$

Inégalité (cf. Villani)

Si $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ admettent une variance (sur $\mathbf{R}^n$) et $\mathbf{P} = \exp(-V)\,\mathrm{d}x$ avec $\nabla^2 V \geq K\mathrm{Id}_n$

$$H_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q}) \leq W_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q})\sqrt{I_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})} - \frac{K}{2} W_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q})^2$$


Distances entre lois
Calculs
Girsanov $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$
Stein $\mathbf{Q} = T^* m$
Applications
Ergodicité
Vitesse converg.
Inég. fonction.
Types
Transport Optimal
Rubinstein
Wasserstein
Entropie
Prohorov

Distance de Prohorov

ϵ-voisinage

(E, d) espace métrique

$$A^\epsilon = \{y \in E,\ \exists x \in A, d(x, y) \leq \epsilon\}$$

Definition (Distance de Prohorov)

$$\mathrm{Dist}_{\mathrm{Pro}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \inf\left\{\epsilon > 0, \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{Q}(A^\epsilon) + \epsilon \text{ pour tout } A \in \mathfrak{B}(E)\right\}$$

Distance de Prohorov

ϵ-voisinage

(E, d) espace métrique

$$A^{\epsilon} = \{y \in E,\ \exists x \in A, d(x,y) \leq \epsilon\}$$

Definition (Distance de Prohorov)

$$\mathrm{Dist}_{\mathrm{Pro}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \inf\left\{\epsilon > 0, \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{Q}(A^{\epsilon}) + \epsilon \text{ pour tout } A \in \mathfrak{B}(E)\right\}$$

Topologie de la convergence en loi

Si (E, d) séparable alors

$$(\mathbf{P}_n \Longrightarrow \mathbf{P}) \Longleftrightarrow (\mathrm{Dist}_{\mathrm{Pro}}(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}) \xrightarrow{n \to \infty} 0)$$

Distance de Rubinstein

Théorème (Kantorovitch-Rubinstein)

Si c est une distance,

$$\mathfrak{T}_c(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \inf_{\gamma \in \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})} \int_{E \times E} c(x, y) \, d\gamma(x, y)$$

$$= \sup_{F \in c-\mathrm{Lip}_1} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[F] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[F] \right)$$

où

$$F \in c - \mathrm{Lip}_1 \iff |F(x) - F(y)| \le c(x, y)$$

Distance de Rubinstein

Théorème (Kantorovitch-Rubinstein)

Si c est une distance,

$$\mathfrak{T}_c(\mathbf{P},\, \mathbf{Q}) = \inf_{\gamma \in \Sigma(\mathbf{P},\mathbf{Q})} \int_{E\times E} c(x,\, y)\, d\gamma(x,\, y)$$

$$= \sup_{F \in c-\mathrm{Lip}_1} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[F\right] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[F\right]\right)$$

où

$$F \in c - \mathrm{Lip}_1 \iff |F(x) - F(y)| \leq c(x, y)$$

Théorème (cf. Dudley)

Si (E, c) est séparable, il y a équivalence entre

- $\mathbf{P}_n$ *converge en loi vers* $\mathbf{P}$
- $Dist_{Pro}(\mathbf{P}_n,\, \mathbf{P}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- $\mathfrak{T}_c(\mathbf{P}_n,\, \mathbf{P}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Autres distances

Remarque

$$\sup_{F \in c-\mathrm{Lip}_1} \left(\mathbf{E_P}[F] - \mathbf{E_Q}[F] \right)$$

Autres distances

Remarque

$$\sup_{F \in c-\mathrm{Lip}_1} \left| \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[F] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[F] \right|$$

Autres distances

Remarque

$$\sup_{F=\mathbf{1}_{]-\infty,x]}} \left| \mathbf{E_P}\left[F\right] - \mathbf{E_Q}\left[F\right] \right|$$

Autres distances

Remarque

$$\sup_{F=\mathbf{1}_{]-\infty,x]}} \left|\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[F\right] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left[F\right]\right| = \mathrm{dist}_{\mathrm{TV}}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$$

Autres distances

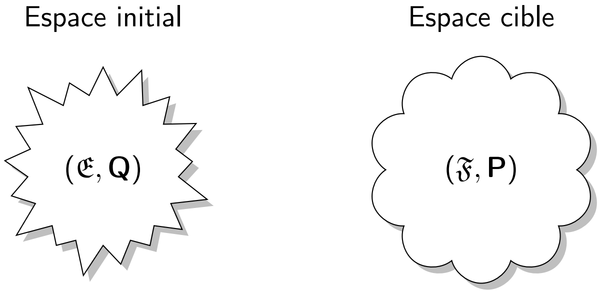
Remarque

$$\sup_{F=\mathbf{1}_{]-\infty,x]}} \left|\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[F] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[F]\right| = \mathrm{dist}_{\mathrm{TV}}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$$

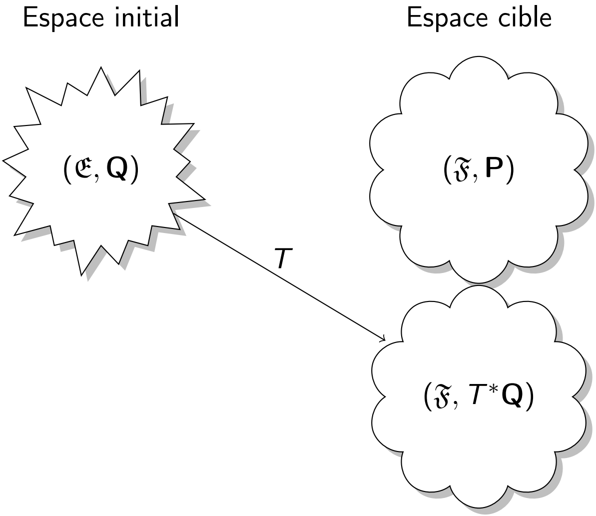
Plus généralement

$$\mathrm{dist}_{\mathcal{F}}(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \sup_{F\in\mathcal{F}, x\in\mathbf{R}} \left|\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[F] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[F]\right|$$

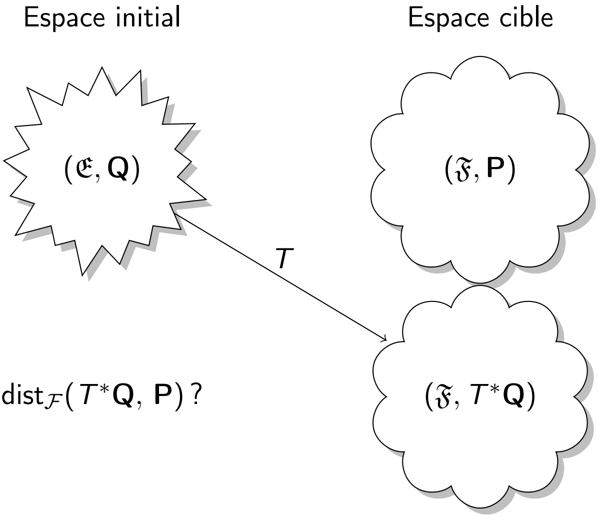
Situation générique



Situation générique



Situation générique



$\mathrm{dist}_{\mathcal{F}}(T^*\mathbf{Q}, \mathbf{P})$?

Méthode de Stein

Historique (partiel)

- Stein ('72) : approximation gaussienne

Méthode de Stein

Historique (partiel)

- Stein ('72) : approximation gaussienne
- Chen ('73) : approximation Poisson

Méthode de Stein

Historique (partiel)

- Stein ('72) : approximation gaussienne
- Chen ('73) : approximation Poisson
- Barbour : extensions au Poisson composé, au mouvement brownien, ...

Méthode de Stein

Historique (partiel)

- Stein ('72) : approximation gaussienne
- Chen ('73) : approximation Poisson
- Barbour : extensions au Poisson composé, au mouvement brownien, ...
- Nourdin-Peccati ('05) : introduction du calcul de Malliavin (thm. du 4ème moment)

Méthode de Stein

Historique (partiel)

- Stein ('72) : approximation gaussienne
- Chen ('73) : approximation Poisson
- Barbour : extensions au Poisson composé, au mouvement brownien, ...
- Nourdin-Peccati ('05) : introduction du calcul de Malliavin (thm. du 4ème moment)
- Multitude d'applications : CLT, Berry-Esseen, log-itéré, géométrie stochastique, probabilités libres, variétés, dimension infinie, développement d'Edgeworth

Méthode de Stein

Historique (partiel)

- Stein ('72) : approximation gaussienne
- Chen ('73) : approximation Poisson
- Barbour : extensions au Poisson composé, au mouvement brownien, ...
- Nourdin-Peccati ('05) : introduction du calcul de Malliavin (thm. du 4ème moment)
- Multitude d'applications : CLT, Berry-Esseen, log-itéré, géométrie stochastique, probabilités libres, variétés, dimension infinie, développement d'Edgeworth
- `https://sites.google.com/site/malliavinstein/home`

Poisson - Gaussien

Convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\text{Poisson}(\lambda) - \lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} \mathcal{N}(0,\, 1)$$

Poisson - Gaussien

Convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\text{Poisson}(\lambda) - \lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} \mathcal{N}(0,\, 1)$$

Formalisme

- $\mathfrak{E} = \mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ = mesure de Poisson (λ)
- $\mathfrak{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{P} = \text{Loi}(\mathcal{N}(0, 1))$

Poisson - Gaussien

Convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\text{Poisson}(\lambda) - \lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} \mathcal{N}(0,\ 1)$$

Formalisme

- $\mathfrak{E} = \mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ = mesure de Poisson (λ)
- $\mathfrak{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{P} = \text{Loi}(\mathcal{N}(0, 1))$
- $T(n) = (n - \lambda)/\sqrt{\lambda}$

Théorème de Donsker

Convergence en loi

$$B^{\sharp}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{j=1}^{[mt]} X_j + (mt - [mt]) X_{[mt+1]} \right) \xrightarrow{m \to \infty} \mathrm{MB}(t)$$

Formalisme

- $\mathfrak{E} = \{-1, 1\}^{\mathrm{N}}$, $\mathbf{Q} = (1/2\epsilon_{-1} + 1/2\,\epsilon_1)^{\otimes \mathrm{N}}$

Théorème de Donsker

Convergence en loi

$$B^{\sharp}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{j=1}^{[mt]} X_j + (mt-[mt])X_{[mt+1]}\right) \xrightarrow{m\to\infty} \mathrm{MB}(t)$$

Formalisme

- $\mathfrak{E} = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbf{Q} = (1/2\epsilon_{-1} + 1/2\,\epsilon_1)^{\otimes \mathbb{N}}$
- $\mathfrak{F} = \mathcal{C}_0([0,1],\mathbf{R})$, $\mathbf{P}$ = Mesure de Wiener

Premier ingrédient (espace cible)

Caractérisation de la loi gaussienne

$$Z \sim \mathcal{N}(0,\, 1) \Longleftrightarrow \mathbf{E}\left[Z\, F(Z) - F'(Z)\right] = 0,\ \forall F \in \mathcal{C}_b^1$$

Premier ingrédient (espace cible)

Caractérisation de la loi gaussienne

$$Z \sim \mathcal{N}(0,\, 1) \Longleftrightarrow \mathbf{E}\left[Z\,F(Z) - F'(Z)\right] = 0,\ \ \forall F \in \mathcal{C}_b^1$$

Idée de Stein

$$Z\,F(Z) - F'(Z) \simeq 0 \Longrightarrow Z \simeq \mathcal{N}(0,\, 1)$$

Equation de Stein

Definition

$$\forall H \in \mathrm{Lip}_1, \ \exists ? \ F \text{ s.t. } H(x) - \mathbf{E}\left[H(\mathcal{N}(0,1))\right] = x\,F(x) - F'(x)$$

Equation de Stein

Definition

$$\forall H \in \mathrm{Lip}_1, \; \exists? \; F \text{ s.t. } H(x) - \mathbf{E}\left[H(\mathcal{N}(0,1))\right] = x\,F(x) - F'(x)$$

Théorème

Il existe F, qui plus est, $\mathrm{F} \in \mathcal{C}_b^2$

$$\|F'\|_\infty \leq 1, \; \|F''\|_\infty \leq 2$$

Equation de Stein

Definition

$$\forall H \in \mathrm{Lip}_1,\ \exists ?\ F \text{ s.t. } H(x) - \mathbf{E}\left[H(\mathcal{N}(0,1))\right] = x\,F(x) - F'(x)$$

Théorème

Il existe F, qui plus est, $\mathrm{F} \in \mathcal{C}_b^2$

$$\|F'\|_\infty \le 1,\ \ \|F''\|_\infty \le 2$$

Formule de représentation de Stein

$$\sup_{H \in \mathrm{Lip}_1} \int H \,\mathrm{d}\mathbf{P} - \mathbf{E}\left[H(N(0,1))\right]$$

$$= \sup_{F : \|F'\|_\infty \le 1,\ \|F''\|_\infty \le 2} \int x.F(x) - F'(x)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(x)$$

Application

Convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\text{Poisson}(\lambda) - \lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} \mathcal{N}(0,\ 1)$$

Formalisme

- $\mathfrak{E} = \mathrm{N}$, $\mathbf{Q} =$ mesure de Poisson (λ)
- $\mathfrak{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{P} = \text{Loi}(\mathcal{N}(0,1))$
- $T(n) = (n - \lambda)/\sqrt{\lambda}$

Convergence pour la distance de Rubinstein

$$\text{dist}_R\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\text{Poisson}(\lambda) - \lambda),\ \mathcal{N}(0,\ 1)\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

Deuxième ingrédient (espace initial)

Rappel

Pour $X \sim$ Poisson (λ),

$$\lambda \mathbf{E}\left[F(X+1)\right] = \mathbf{E}\left[X\, F(X)\right]$$

Intégration par parties

Soit $X \sim$ Poisson (λ) and $\tilde{X} = (X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$

$$\mathbf{E}\left[\tilde{X} F(\tilde{X})\right] = \sqrt{\lambda}\, \mathbf{E}\left[F(\tilde{X} + 1/\sqrt{\lambda}) - F(\tilde{X})\right]$$

Troisième ingrédient (deux espaces)

Pseudo commutation des « gradients »

D'après la formule de Taylor

$$F(\tilde{X} + 1/\sqrt{\lambda}) - F(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F'(\tilde{X}) + \frac{1}{2\lambda} F''(\tilde{X} + \theta/\sqrt{\lambda})$$

$$\mathrm{dist}_R\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\mathrm{Poisson}(\lambda)-\lambda),\ \mathcal{N}(0,1)\right)$$

$$= \sup_{H\in \mathrm{Lip}_1} \mathbf{E}\left[H(\tilde{X}) - H(\mathcal{N}(0,1))\right]$$

$$\leq \sup_{F:\,\|F'\|_\infty\leq 1,\ \|F''\|_\infty\leq 2} \mathbf{E}\left[\tilde{X}F(\tilde{X}) - F'(\tilde{X})\right]$$

$$= \sup_{F\ldots} \mathbf{E}\left[\sqrt{\lambda}(F(\tilde{X}+1/\sqrt{\lambda}) - F(\tilde{X})) - F'(\tilde{X})\right]$$

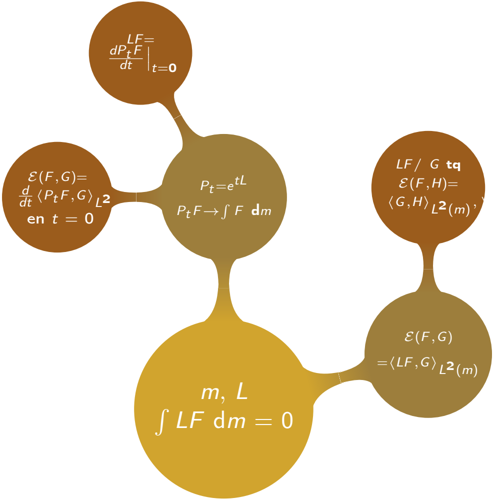
D'après la formule de Taylor

$$F(\tilde{X}+1/\sqrt{\lambda}) - F(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}F'(\tilde{X}) + \frac{1}{2\lambda}F''(\tilde{X}+\theta/\sqrt{\lambda})$$

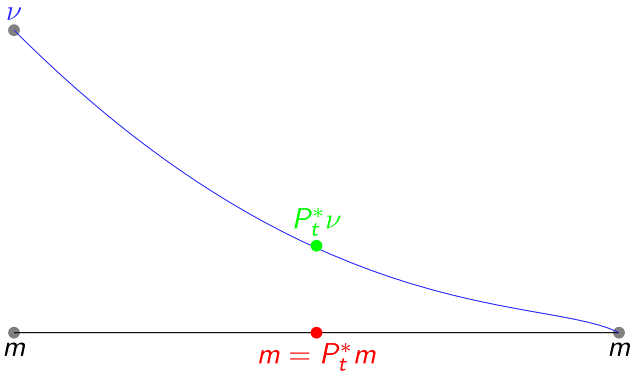
Conclusion

$$\mathrm{dist}_R\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\mathrm{Poisson}(\lambda)-\lambda),\ \mathcal{N}(0,1)\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

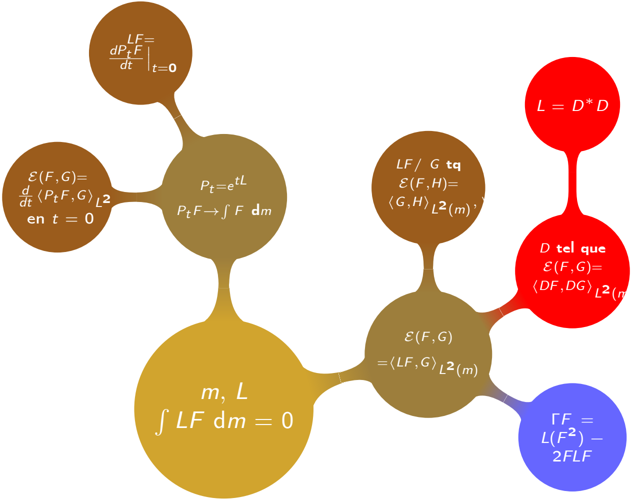
Structure de Dirichlet



Caractérisation de la loi cible



Structure de Dirichlet-Malliavin



Exemple

Mesure gaussienne sur $\mathbf{R}^n$

- $\mathfrak{F} = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{P}$=Gaussienne
- $LF(x) = x.\nabla F(x) - \Delta F(x)$
- X=processus Ornstein-Uhlenbeck

$$dX(t) = -X(t)dt + \sqrt{2}\, dB(t)$$

- Semi-groupe

$$P_t F(x) = \int_{\mathbf{R}^n} F(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\, d\mathbf{P}(y)$$

- $D = \nabla$

Mesure Gaussienne sur $\mathcal{C}_0([0,1], \mathbf{R})$

Espace de Wiener (abstrait)

- $\mathfrak{F} = \mathcal{C}_0([0,1], \mathbf{R})$, $\mathbf{P}$= mesure de Wiener
- Semi-groupe

$$P_t F(u) = \int_{\mathfrak{F}} F(e^{-t} u + \sqrt{1-e^{-2t}} v) \, d\mathbf{P}(v)$$

- D=gradient de Malliavin défini par

$$D_t F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}) \, \mathbf{1}_{[0,t_j]}(t)$$

- $LF(u) = \langle u, DF(u) \rangle_{\mathfrak{F},\mathfrak{F}^*} - \operatorname{trace}(D^{(2)} F)(u)$

Espace de Rademacher

Suite de Bernoulli symétrique indépendantes

- $\mathfrak{F} = \{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{P} = (1/2.\epsilon_{-1} + 1/2.\epsilon_1)^{\otimes \mathbf{N}}$
- Gradient discret

$$D_k^\sharp F(X) = \frac{1}{2}(F(X_k^+) - F(X_k^-)).$$

avec

$$X_k^+ = (X_1, \cdots, X_{k-1}, 1, X_{k+1} \cdots) \quad \text{and } X_k^- = (X_1, \cdots, X_{k-1}, -1, X_{k+1} \cdots).$$

- Intégration par parties

$$\mathbf{E}\left[\sum_{k \in \mathbf{N}} u_k D_k^\sharp F(X)\right] = \mathbf{E}\left[F(X) \sum_{k \in \mathbf{N}} u_k X_k\right]$$

Formule de représentation de Stein-Dirichlet

Distance de Rubinstein entre $T^*\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}$

$$P_\infty F(x) - P_0 F(x) = \int_0^\infty L P_t F(x) \mathrm{d}t$$

Formule de représentation de Stein-Dirichlet

Distance de Rubinstein entre $T^*\mathbf{Q}$ et P

$$P_\infty F(x) - F(x) = \int_0^\infty LP_t F(x) \mathrm{d}t$$

Formule de représentation de Stein-Dirichlet

Distance de Rubinstein entre $T^*\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}$

$$\int_{\mathfrak{F}} F \mathrm{d}\mathbf{P} - F(x) = \int_0^\infty LP_t F(x) \mathrm{d}t$$

Formule de représentation de Stein-Dirichlet

Distance de Rubinstein entre $T^*\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}$

$$\int_{\mathfrak{F}} F \mathrm{d}\mathbf{P} - \int_{\mathfrak{F}} F(x) \, \mathrm{d}(T^*\mathbf{Q})(x) = \int_{\mathfrak{F}} \int_0^\infty LP_t F(x) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}(T^*\mathbf{Q})(x)$$

Formule de représentation de Stein-Dirichlet

Distance de Rubinstein entre $T^*\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}$

$$\int_{\mathfrak{F}} F \mathrm{d}\mathbf{P} - \int_{\mathfrak{F}} F(x)\, \mathrm{d}(T^*\mathbf{Q})(x) = \int_{\mathfrak{F}} \int_0^\infty LP_t F(x) \mathrm{d}t\, \mathrm{d}(T^*\mathbf{Q})(x)$$

IPP sur l'espace initial

$$\int_{\mathfrak{F}} F \mathrm{d}\mathbf{P} - \int_{\mathfrak{E}} F \circ T \mathrm{d}\mathbf{Q} = \int_{\mathfrak{E}} \int_0^\infty (L^{\mathbf{P}} P_t^{\mathbf{P}} F) \circ T \ \mathrm{d}\mathbf{Q} \ \mathrm{d}t$$

Formule de représentation de Stein-Dirichlet

Distance de Rubinstein entre $T^*\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}$

$$\int_{\mathfrak{F}} F \mathrm{d}\mathbf{P} - \int_{\mathfrak{F}} F(x) \, \mathrm{d}(T^*\mathbf{Q})(x) = \int_{\mathfrak{F}} \int_0^\infty L P_t F(x) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}(T^*\mathbf{Q})(x)$$

IPP sur l'espace initial

$$\int_{\mathfrak{F}} F \mathrm{d}\mathbf{P} - \int_{\mathfrak{E}} F \circ T \mathrm{d}\mathbf{Q} = \int_{\mathfrak{E}} \int_0^\infty D^{\mathbf{Q}}((P_t^{\mathbf{P}} F) \circ T) \, \mathrm{d}\mathbf{Q} \, \mathrm{d}t$$

$$+ \text{Reste}$$

Enfin

Commutation des gradients

$$\int_{\mathfrak{F}} F \mathrm{d}\mathbf{P} - \int_{\mathfrak{E}} F \circ T \mathrm{d}\mathbf{Q} = \int_{\mathfrak{E}} \int_0^{\infty} D^{\mathbf{Q}}(P_t^{\mathbf{P}} F) \circ T \ \mathrm{d}\mathbf{Q} \ \mathrm{d}t + \text{Reste}$$

$$= \int_{\mathfrak{E}} \int_0^{\infty} D^{\mathbf{P}}(P_t^{\mathbf{P}} F) \circ T \ \mathrm{d}\mathbf{Q} \ \mathrm{d}t + \text{Reste} + \text{Reste}'$$

Enfin

Commutation des gradients

$$\int_{\mathfrak{F}} F \mathrm{d}\mathbf{P} - \int_{\mathfrak{E}} F \circ T \mathrm{d}\mathbf{Q} = \int_{\mathfrak{E}} \int_0^\infty D^{\mathbf{Q}}(P_t^{\mathbf{P}} F) \circ T \ \mathrm{d}\mathbf{Q} \ \mathrm{d}t + \text{Reste}$$
$$= \int_{\mathfrak{E}} \int_0^\infty D^{\mathbf{P}}(P_t^{\mathbf{P}} F) \circ T \ \mathrm{d}\mathbf{Q} \ \mathrm{d}t$$
$$+ \text{Reste} + \text{Reste}'$$

Interversion

$$D^{\mathbf{P}} P_t^{\mathbf{P}} F = e^{-\Phi^{\mathbf{P}}(t)} P_t^{\mathbf{P}} D^{\mathbf{P}} F$$

Théorème de Donsker

Rappel

$$B_m^{\sharp}(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{j=1}^{[mt]} X_j + (mt - [mt]) X_{[mt+1]} \right) \xrightarrow{m \to \infty} B(t)$$

Théorème de Donsker

Rappel

$$B_m^\sharp(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{j=1}^{[mt]} X_j + (mt - [mt]) X_{[mt+1]} \right) \xrightarrow{m \to \infty} B(t)$$

Théorème (Coutin-D. + Shih)

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \left| \mathbf{E}\left[F(B_m^\#) \right] - \mathbf{E}\left[F(B) \right] \right| \leq \frac{c}{m}$$

où $\mathcal{F} =$ *fonctions 1-lipschitziennes sur* $\mathcal{C}_0([0,1], \mathbf{R})$

Développement d'Edgeworth

$$\mathbf{E}\left[\tilde{X}F(\tilde{X}) - F'(\tilde{X})\right] = \mathbf{E}\left[\sqrt{\lambda}(F(\tilde{X} + 1/\sqrt{\lambda}) - F(\tilde{X})) - F'(\tilde{X})\right]$$

D'après la formule de Taylor

$$F(\tilde{X}+1/\sqrt{\lambda})-F(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}F'(\tilde{X})+\frac{1}{2\lambda}F''(\tilde{X})+\frac{1}{6\lambda^{3/2}}F^{(3)}(\tilde{X}+\theta/\sqrt{\lambda})$$

$$\mathbf{E}\left[\tilde{X}F(\tilde{X}) - F'(\tilde{X})\right] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\underbrace{\mathbf{E}\left[F''(\tilde{X})\right]} + \frac{1}{6\lambda}\underbrace{F^{(3)}(\tilde{X} + \theta/\sqrt{\lambda})}$$

Développement d'Edgeworth

$$\mathbf{E}\left[\tilde{X}F(\tilde{X}) - F'(\tilde{X})\right] = \mathbf{E}\left[\sqrt{\lambda}(F(\tilde{X} + 1/\sqrt{\lambda}) - F(\tilde{X})) - F'(\tilde{X})\right]$$

D'après la formule de Taylor

$$F(\tilde{X}+1/\sqrt{\lambda})-F(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}F'(\tilde{X})+\frac{1}{2\lambda}F''(\tilde{X})+\frac{1}{6\lambda^{3/2}}F^{(3)}(\tilde{X}+\theta/\sqrt{\lambda})$$

$$\mathbf{E}\left[\tilde{X}F(\tilde{X}) - F'(\tilde{X})\right] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\underbrace{\mathbf{E}\left[F''(\tilde{X})\right]}+\frac{1}{6\lambda}\underbrace{F^{(3)}(\tilde{X}+\theta/\sqrt{\lambda})}_{\leq \|F^{(3)}\|_\infty}$$

Développement d'Edgeworth

$$\mathbf{E}\left[\tilde{X}F(\tilde{X}) - F'(\tilde{X})\right] = \mathbf{E}\left[\sqrt{\lambda}(F(\tilde{X} + 1/\sqrt{\lambda}) - F(\tilde{X})) - F'(\tilde{X})\right]$$

D'après la formule de Taylor

$$F(\tilde{X}+1/\sqrt{\lambda})-F(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}F'(\tilde{X})+\frac{1}{2\lambda}F''(\tilde{X})+\frac{1}{6\lambda^{3/2}}F^{(3)}(\tilde{X}+\theta/\sqrt{\lambda})$$

$$\mathbf{E}\left[\tilde{X}F(\tilde{X}) - F'(\tilde{X})\right] =$$

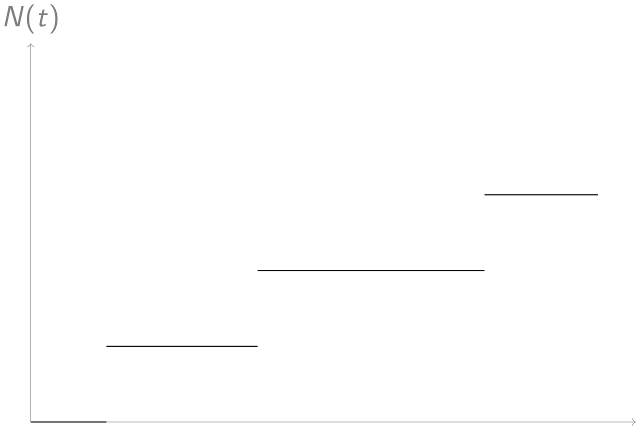
$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \underbrace{\mathbf{E}\left[F''(\tilde{X})\right]}_{\approx \mathbf{E}[F''(\mathcal{N}(0,1))]+c\lambda^{-1/2}} + \frac{1}{6\lambda} \underbrace{F^{(3)}(\tilde{X} + \theta/\sqrt{\lambda})}_{\leq \|F^{(3)}\|_\infty}$$

Convergence Poisson - Brownien

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big(N(t) - \lambda t\Big) \xrightarrow{\lambda\to\infty,\delta\to 0} B(t)$$

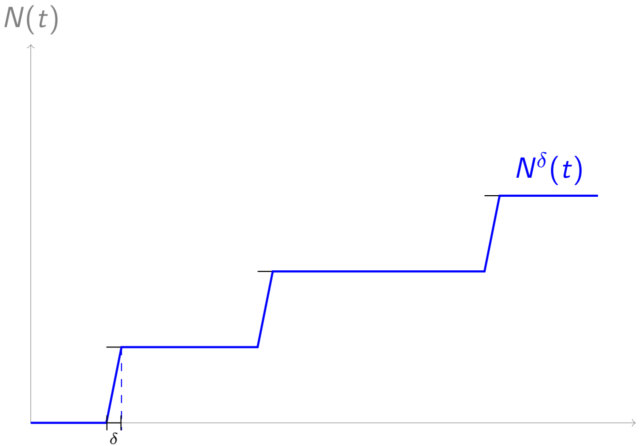
Convergence Poisson - Brownien

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big(N(t) - \lambda t\Big) \xrightarrow{\lambda\to\infty,\delta\to 0} B(t)$$



Convergence Poisson - Brownien

$$N_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(N^\delta(t) - \lambda t\right) \xrightarrow{\lambda\to\infty,\delta\to 0} B(t)$$



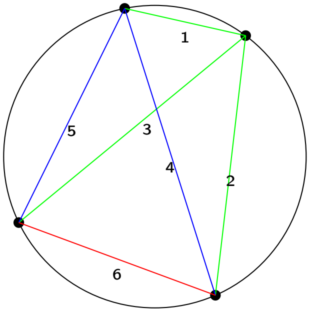
Développement d'Edgeworth

Théorème

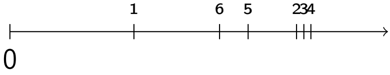
Pour F suffisamment régulière,

$$\mathbf{E}\left[F(N_\lambda)\right] = \mathbf{E_P}\left[F\right] + \frac{\lambda^{-1/2}}{6}\mathbf{E_P}\left[F\mathfrak{H}_{(1)}\right] + \lambda^{-1}\left[\frac{1}{72}\mathbf{E_P}\left[F\mathfrak{H}_{(1,1)}\right] + \frac{1}{24}\mathbf{E_P}\left[F\mathfrak{H}_{(2)}\right]\right] + O(\delta^2, \lambda^{-3/2})$$

Polytopes de Poisson

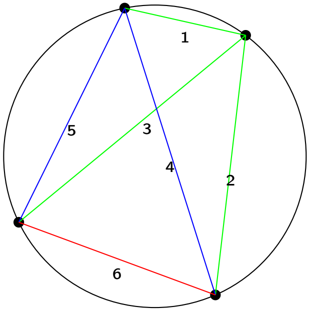


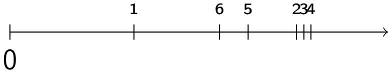
η



$\xi(\eta)$

Polytopes de Poisson





η $\xi(\eta)$

Question

Que se passe-t-il quand le nb de points tend vers l'infini ?

Espace des configurations

Definition (Distance de Rubinstein)

$$d_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) := \sup_{F \in \mathcal{F}} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[F] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[F] \right)$$

où

$$F \in \mathcal{F} \iff |F(\omega) - F(\eta)| \leq \mathrm{dist}_{\mathrm{TV}}(\omega, \eta)$$

Espace des configurations

Definition (Distance de Rubinstein)

$$d_{\mathrm{R}}(\mathbf{P},\mathbf{Q}) := \sup_{F\in\mathcal{F}} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[F] - \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[F]\right)$$

où

$$F \in \mathcal{F} \iff |F(\omega) - F(\eta)| \le \mathrm{dist}_{\mathsf{TV}}(\omega,\eta)$$

Theorem (D.-Schulte-Thäle)

$$d_{\mathrm{R}}(\mathbf{P}_n,\mathbf{Q}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Longrightarrow \mathbf{P}_n \xrightarrow{distr.} \mathbf{Q}$$

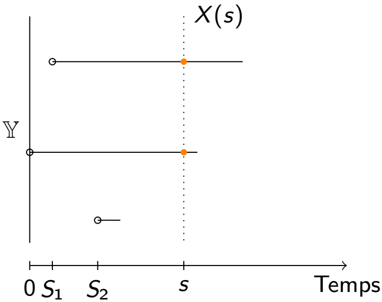
Résultat

Théorème

$$\mathrm{d_R}\Big(PPP(\mathbf{M})\big|_{[0,a]} \,,\, \sum_{x \neq y \in \eta} \delta_{t^2\|x-y\|}\big|_{[0,a]} \Big) \leq \frac{C_a}{t}$$

où $\mathbf{M}$ *est une densité de type Weibull.*

Processus de Glauber



- $S_1, S_2, \cdots$: processus de Poisson d'intensité $\mathbf{M}(\mathbb{Y})\ ds$
- Durée de vie : r.v. exponentielles de param. 1


That's all Folks!