

Un modèle de Curie-Weiss de Criticalité Auto-Organisée

Matthias Gorny

Université Paris Sud et ENS Paris

Journées MAS - 27 août 2014

- 1 La Criticalité Auto-Organisée
- 2 Le modèle d'Ising Curie-Weiss
- 3 Le modèle de Curie-Weiss de SOC

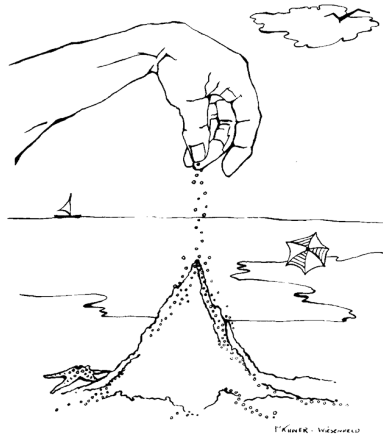
En anglais **SOC** pour **Self-Organized Criticality**.

En anglais **SOC** pour **Self-Organized Criticality**.

Notion introduite en **1987** par les physiciens **Per Bak, Chao Tang** et **Kurt Wiesenfeld**.

En anglais **SOC** pour **Self-Organized Criticality**.

Notion introduite en **1987** par les physiciens **Per Bak, Chao Tang** et **Kurt Wiesenfeld**.



- 1 La Criticalité Auto-Organisée
- 2 Le modèle d'Ising Curie-Weiss
- 3 Le modèle de Curie-Weiss de SOC

C'est la version « champ moyen » du modèle d'Ising (qui modélise l'orientation des particules dans un aimant).

C'est la version « champ moyen » du modèle d'Ising (qui modélise l'orientation des particules dans un aimant).

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ (+1 : orientation N ; -1 : orientation S).

C'est la version « champ moyen » du modèle d'Ising (qui modélise l'orientation des particules dans un aimant).

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ (+1 : orientation N; -1 : orientation S).

Le modèle d'Ising Curie-Weiss

Le modèle d'Ising Curie-Weiss associé à la température T est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles

C'est la version « champ moyen » du modèle d'Ising (qui modélise l'orientation des particules dans un aimant).

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ (+1 : orientation N; -1 : orientation S).

Le modèle d'Ising Curie-Weiss

Le modèle d'Ising Curie-Weiss associé à la température T est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad X_n^k = \text{orientation de la particule } k \text{ parmi } n \text{ particules} \in \{-1, 1\}$$

C'est la version « champ moyen » du modèle d'Ising (qui modélise l'orientation des particules dans un aimant).

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ (+1 : orientation N ; -1 : orientation S).

Le modèle d'Ising Curie-Weiss

Le modèle d'Ising Curie-Weiss associé à la température T est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad X_n^k = \text{orientation de la particule } k \text{ parmi } n \text{ particules} \in \{-1, 1\}$$

et (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$

C'est la version « champ moyen » du modèle d'Ising (qui modélise l'orientation des particules dans un aimant).

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ (+1 : orientation N ; -1 : orientation S).

Le modèle d'Ising Curie-Weiss

Le modèle d'Ising Curie-Weiss associé à la température T est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad X_n^k = \text{orientation de la particule } k \text{ parmi } n \text{ particules} \in \{-1, 1\}$$

et (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$, avec

$$Z_n(T) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Théorème

- Si $T \geq 1$ alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Théorème

- Si $T \geq 1$ alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

- Si $T < 1$ alors il existe $m(T) \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{2}(\delta_{-m(T)} + \delta_{m(T)}).$$

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Théorème

- Si $T \geq 1$ alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

- Si $T < 1$ alors il existe $m(T) \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{2}(\delta_{-m(T)} + \delta_{m(T)}).$$

$T = 1$: température critique

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Théorème : fluctuations pour $T \geq 1$

- Si $T > 1$ alors

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{T}{T-1}\right).$$

Soit $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Théorème : fluctuations pour $T \geq 1$

- Si $T > 1$ alors

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{T}{T-1}\right).$$

- Si $T = 1$ (cas critique) alors

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} C \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right) dx.$$

Et pour une mesure ρ quelconque ?

Et pour une mesure ρ quelconque ?

Supposons que ρ est centrée, « strictement sous-Gaussienne » et de variance $\sigma^2 > 0$. Soit $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Et pour une mesure ρ quelconque ?

Supposons que ρ est centrée, « strictement sous-Gaussienne » et de variance $\sigma^2 > 0$. Soit $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Théorème (Ellis, Newman 1978)

- Si $T > \sigma^2$ alors

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{T\sigma^2}{T - \sigma^2}\right).$$

- Si $T = \sigma^2$ (cas critique) alors il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} C_\lambda \exp(-\lambda x^4) dx.$$

$T = \sigma^2$: température critique

- 1 La Criticalité Auto-Organisée
- 2 Le modèle d'Ising Curie-Weiss
- 3 Le modèle de Curie-Weiss de SOC

Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé n'est pas un modèle d'auto-organisation car il dépend de la température T .

Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé n'est pas un modèle d'auto-organisation car il dépend de la température T .

Idée : exprimer T comme une fonction des variables aléatoires du modèle, de sorte que, quand n tend vers $+\infty$, T converge vers la valeur critique σ^2 du modèle.

Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé n'est pas un modèle d'auto-organisation car il dépend de la température T .

Idée : exprimer T comme une fonction des variables aléatoires du modèle, de sorte que, quand n tend vers $+\infty$, T converge vers la valeur critique σ^2 du modèle.

Nous pouvons montrer que si X_n^1, \dots, X_n^n sont distribuées selon le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé associé à $T \geq \sigma^2$ alors

$$\frac{(X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé n'est pas un modèle d'auto-organisation car il dépend de la température T .

Idee : exprimer T comme une fonction des variables aléatoires du modèle, de sorte que, quand n tend vers $+\infty$, T converge vers la valeur critique σ^2 du modèle.

Nous pouvons montrer que si X_n^1, \dots, X_n^n sont distribuées selon le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé associé à $T \geq \sigma^2$ alors

$$\frac{(X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

Nous allons donc remplacer T par $(x_1^2 + \dots + x_n^2)/n$ dans la loi du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé, i.e.,

$$\frac{1}{Z_n(T)} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Nous obtenons alors la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Nous obtenons alors la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

qui cette fois ne dépend plus d'aucun paramètre extérieur.

Nous obtenons alors la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

qui cette fois ne dépend plus d'aucun paramètre extérieur.

Heuristique : à l'infini, $x_1^2 + \dots + x_n^2$ « se rapproche » de $n\sigma^2$

Nous obtenons alors la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

qui cette fois ne dépend plus d'aucun paramètre extérieur.

Heuristique : à l'infini, $x_1^2 + \dots + x_n^2$ « se rapproche » de $n\sigma^2$ donc

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

« se rapproche » de

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Nous obtenons alors la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

qui cette fois ne dépend plus d'aucun paramètre extérieur.

Heuristique : à l'infini, $x_1^2 + \dots + x_n^2$ « se rapproche » de $n\sigma^2$ donc

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

« se rapproche » de

$$\frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2\sigma^2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

et donc la somme S_n des variables du modèle se comporte de façon critique :

$$S_n/n^{3/4} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} C_\lambda \exp(-\lambda x^4) dx.$$

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas δ_0 .

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas δ_0 .

Le modèle de Curie-Weiss de SOC

Le modèle de Curie-Weiss de SOC est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$,

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas δ_0 .

Le modèle de Curie-Weiss de SOC

Le modèle de Curie-Weiss de SOC est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$, avec

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas δ_0 .

Le modèle de Curie-Weiss de SOC

Le modèle de Curie-Weiss de SOC est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$, avec

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Il s'agit d'un modèle d'équilibre de particules auto-organisée en interaction.

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas δ_0 .

Le modèle de Curie-Weiss de SOC

Le modèle de Curie-Weiss de SOC est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$, avec

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Il s'agit d'un modèle d'équilibre de particules auto-organisée en interaction. De plus il a un comportement critique : le même que le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé critique.

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas δ_0 .

Le modèle de Curie-Weiss de SOC

Le modèle de Curie-Weiss de SOC est la donnée de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$, avec

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Il s'agit d'un modèle d'équilibre de particules auto-organisée en interaction. De plus il a un comportement critique : le même que le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé critique. En effet :

Théorème (Cerf, G. 2013)

Soit ρ une mesure de probabilité réelle **symétrique** vérifiant

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(v_0 x^2) d\rho(x) < +\infty.$$

Soit $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) d\rho(x_i).$$

Théorème (Cerf, G. 2013)

Soit ρ une mesure de probabilité réelle **symétrique** vérifiant

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(v_0 x^2) d\rho(x) < +\infty.$$

Soit $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) d\rho(x_i).$$

Alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Théorème (Cerf, G. 2013)

Soit ρ une mesure de probabilité réelle **symétrique** vérifiant

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(v_0 x^2) d\rho(x) < +\infty.$$

Soit $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec

$$(X_n^1, \dots, X_n^n) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) d\rho(x_i).$$

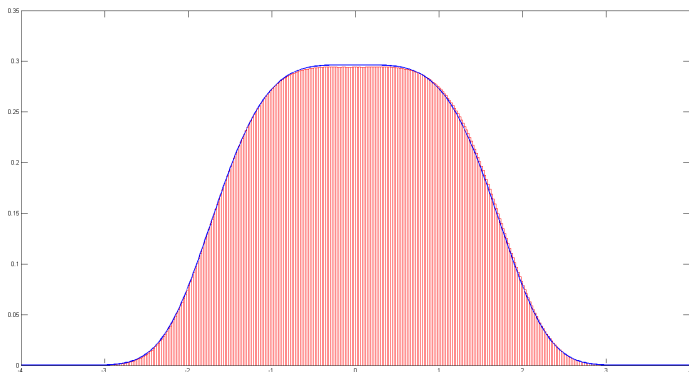
Alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Si de plus ρ admet une densité alors

$$\frac{\mu_4^{1/4}}{\sigma^2} \frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} C \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right) dx,$$

où σ^2 et μ_4 désignent les moments d'ordre 2 et 4 de ρ .



En rouge, l'histogramme renormalisé de $4,91 \times 10^{12}$ simulations de $S_n/n^{3/4}$, pour $n = 10000$ et $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$. En bleu, la courbe de la fonction

$$x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right).$$






Outils pour la démonstration de ce théorème :

- Grandes déviations.
- Etude de la transformée de Cramér

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sup_{u, v \in \mathbb{R}} \left\{ xu + yv - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz + vz^2} d\rho(z) \right\}.$$

- Méthode de Laplace (généralisée aux mesures de probabilités).

Merci !

-  Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld, *Self-organized criticality*, Phys. Rev. A (3) (1988).
-  Raphaël Cerf and Matthias Gorny, *A Curie-Weiss model of self-organized criticality*, preprint (2013).
-  Richard S. Ellis, *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*, Classics in Maths., Springer-Verlag, 2006.
-  Richard S. Ellis and Charles M. Newman, *Limit theorems for sums of dependent random variables occurring in statistical mechanics*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete (1978).
-  Matthias Gorny, *The Cramér Condition for the Curie-Weiss model of SOC*, preprint (2013).