



Département GMM
Orientation MMN – 5^{ème} année

Equations Intégrales en Electromagnétisme

A. Bendali

Toulouse – 2013/2014

Equations Intégrales

en

Electromagnétisme

A. Bendali

Département de
Génie Mathématique et Modélisation

E-mail : abendali@insa-toulouse.fr

Table des matières

Avant-propos	1
Chapitre 1. Quelques éléments d'électromagnétisme	3
1. Equations de Maxwell en régime harmonique	3
2. Matériaux à pertes et sans pertes.	6
3. Conditions d'interface et aux limites.	6
4. Formulations à un seul champ	7
Chapitre 2. Propagation libre dans un milieu homogène	11
1. Réduction des équations de Maxwell dans le cas d'une propagation libre	11
2. Milieu sans pertes et avec pertes	12
3. Solution élémentaire.	15
4. Propagation libre dans un milieu avec pertes.	16
5. Propagation dans un milieu sans pertes.	18
6. Conditions de radiation	20
Chapitre 3. Potentiels et formules de représentation	25
1. Formules de représentation	25
2. Les potentiels du système de Maxwell	29
Chapitre 4. Principales équations intégrales	33
1. Diffraction par un obstacle parfaitement conducteur	33
2. Principe de résolution par équations intégrales	33
3. Equation intégrale du champ électrique	35
4. Equation intégrale du champ magnétique	36
5. Equation combinée	36
Chapitre 5. Eléments de frontière	39
1. Approximation par éléments finis de surface de l'espace $H_{\text{div}}(\Gamma)$	39
2. Eléments sur la mise en oeuvre numérique	43
Chapitre 6. Couplage éléments finis-équations intégrales	47
1. Le problème de diffraction	47
2. Le problème couplé éléments finis- équations intégrales	49

Avant-propos

L'objet de ce cours est d'introduire les notions de base sur la méthode de résolution par équations intégrales de certains problèmes aux limites intervenant dans la radiation ou la diffraction des ondes électromagnétiques.

Ces méthodes sont couramment utilisées à l'heure actuelle dans le secteur industriel pour la simulation numériques du fonctionnement de certains dispositifs, généralement des antennes, ou le comportement de certaines structures illuminées par une onde électromagnétique : technologies de la furtivité RADAR dans les activités de défense, compatibilité électromagnétique, effet d'un champ d'éoliennes sur le fonctionnement des balises électromagnétiques pour le guidage des avions civils, etc.

Le plan du cours est le suivant. Après un rappel des équations de base de l'électromagnétisme, et en particulier l'utilisation de "phaseurs" pour la représentation de quantités variant sinusoïdalement au cours du temps, nous montrerons comment les problèmes posés dans tout l'espace peuvent être résolus de façon explicite : on peut interpréter cette résolution comme la détermination du champ électromagnétique rayonné par une distribution de sources dans l'espace libre, i.e., sans matériaux. Ceci permet d'établir la formule de Stratton-Chu qui est à la base de la résolution par équations intégrales du système de Maxwell. Nous terminerons ce cours en montrant comment coupler les équations intégrales aux éléments finis pour traiter des problèmes où interviennent des matériaux avec des caractéristiques variables.

Quelques éléments d'électromagnétisme

Ce chapitre donne un rappel des équations de Maxwell qui constituent les équations générales de l'électromagnétisme. Il introduit aussi la notion de *phaseur* qui permet de décrire convenablement les champs électromagnétiques variant de façon sinusoïdale au cours du temps. On termine par les conditions de raccord du champ électromagnétique à l'interface entre deux milieux diélectriques et la condition à la surface d'un métal parfaitement conducteur.

1. Equations de Maxwell en régime harmonique

Le champ électromagnétique est décrit par des quantités $U(x, t)$ qui dépendent d'une variable d'espace $x \in \mathbb{R}^3$ et du temps t ; $U(x, t)$ peut-être la composante d'une quantité vectorielle : champ électrique ou magnétique, courant, etc... ou une quantité scalaire : la charge électrique.

On distingue deux grandes classes de modèles :

- (1) **le régime temporel** : où on étudie l'évolution du champ électromagnétique au cours du temps ; généralement, on utilise des techniques de différences finies en espace et en temps pour calculer des approximations numériques du champ électromagnétique; ces techniques sont souvent désignées par **FDTD** (Finite Differences Time Domain) dans la littérature; autrement dit, le champ électromagnétique en chaque point de l'espace dépend de façon non connue à priori du paramètre temps;
- (2) **le régime harmonique** : où la dépendance en temps est supposée être sinusoïdale a priori; toutes les quantités $U(x, t)$ vibrent à la même **fréquence** ν , reliée à la **pulsation** ω par $\omega = 2\pi\nu$ (où à la **période** T par $\nu = 1/T$), de la façon suivante :

$$(1.1) \quad U(x, t) = U_0(x) \cos(\omega t - \varphi(x));$$

où $U_0(x)$ est le **module** et φ est la **phase** de U au point x .

Notons d'abord que la présence de la phase dans l'écriture (1.1) est essentielle pour décrire les phénomènes de propagation d'ondes : c'est ce qui permet de distinguer qu'en deux points différents de l'espace $U(x, t)$ et $U(y, t)$ n'atteignent pas leur amplitude maximum aux mêmes instants.

La représentation (1.1) n'est pas commode. Par exemple, pour superposer deux signaux $U(x, t) = U_0(x) \cos(\omega t - \varphi(x))$ et $V(x, t) = V_0(x) \cos(\omega t - \psi(x))$, on doit utiliser la règle

des vecteurs tournants (figure 1.1) pour déterminer le module $W_0(x)$ et la phase $\theta(x)$ de la somme :

$$(1.2) \quad W(x, t) = U(x, t) + V(x, t) = W_0(x) \cos(\omega t - \theta(x));$$

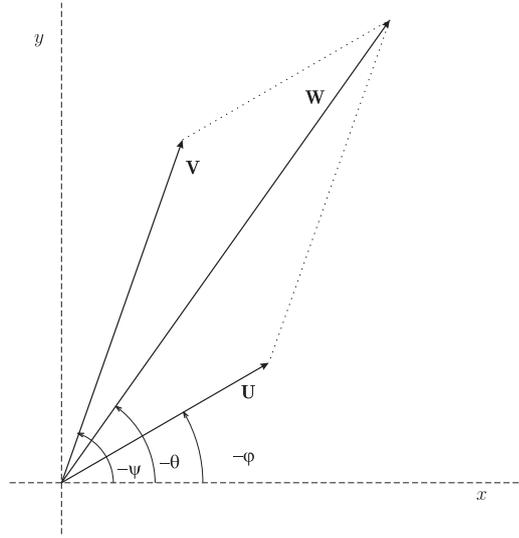


FIG. 1.1. Règle des vecteurs tournants

Pour avoir une description plus maniable, on plonge le problème dans le plan complexe en écrivant que :

$$(1.3) \quad U(x, t) = \text{Re} \{ U_0(x) e^{i\varphi(x)} e^{-i\omega t} \} = \text{Re} \{ u(x) e^{-i\omega t} \},$$

où la quantité complexe

$$(1.4) \quad u(x) = U_0(x) e^{i\varphi(x)}, \quad |u(x)| = U_0(x),$$

décrit en même temps le module et la phase; $u(x)$ est appelé le *phaseur* de $U(x, t)$. On a maintenant plus simplement

$$(1.5) \quad W(x, t) = \text{Re} \{ w(x) e^{-i\omega t} \}, \quad w(x) = u(x) + v(x),$$

avec $v(x) = V_0(x) e^{i\psi(x)}$ et $|v(x)| = V_0(x)$.

Le régime harmonique ne peut s'établir généralement qu'en l'absence de non-linéarité. Dans ce cas, le terme $e^{-i\omega t}$ est un coefficient multiplicatif qu'on peut simplifier. Les équations en régime harmonique sont ainsi posées uniquement avec les phaseurs, la dépendance en temps étant alors uniquement implicite. Le phaseur $u(x)$ contenant les deux informations importantes sur le module et sur la phase. Notons que, dans la quasi totalité des cas, il sera inutile de revenir à la partie réelle $U(x, t)$ pour la description physique du champ et que donc toutes les propriétés physiques seront décrites à l'aide du seul phaseur $u(x)$.

La dérivation $\partial_t U(x, t) = \partial_t \text{Re} \{ u(x) e^{-i\omega t} \}$ se traduit simplement par la multiplication par le facteur $-i\omega$

$$(1.6) \quad \partial_t U(x, t) = \text{Re} \{ -i\omega u(x) e^{-i\omega t} \}$$

REMARQUE 1.1. *Dans les livres de physique, la dépendance en temps est généralement prise en $e^{j\omega t}$, en notant par j l'imaginaire $i = \sqrt{-1}$ où, comme nous le sous-entendons partout dans ce texte, la racine carrée est celle relative à la détermination principale de l'argument, i.e., celle dont l'argument θ vérifie $0 \leq \theta < \pi$. Cette notation a quelques inconvénients : sens de propagation d'une onde plane, description des caractéristiques d'un milieu à pertes, etc... C'est pourquoi dans toute la suite, nous adoptons la convention généralement utilisée par les mathématiciens de dépendance implicite en $e^{-i\omega t}$ des champs. Pour passer de l'une à l'autre, il suffit de remplacer l'imaginaire i par $-j$.*

Dans un milieu isotrope, caractérisé en chaque point x par :

- **une permittivité diélectrique** : $\varepsilon_r(x)\varepsilon_0$; $\varepsilon_r(x) \geq 1$,
- **une perméabilité magnétique** : $\mu_r(x)\mu_0$; $\mu_r(x) \geq 1$,
- $\varepsilon_0 > 0$ et $\mu_0 > 0$ sont la permittivité et la perméabilité du vide (sensiblement égales à celles de l'air),
- **une conductivité électrique** : $\sigma(x) \geq 0$,
- **une conductivité magnétique** : $\sigma_m(x) \geq 0$,

et dans lequel sont appliqués les courants (décrits à l'aide de leur phaseur) :

- **courants électriques** : $\mathbf{J}(x)$,
- **courants magnétiques** : $\mathbf{M}(x)$,

le champ électromagnétique est décrit à l'aide des phaseurs du

- **champ électrique** : $\mathbf{E}(x)$;
- **champ magnétique** : $\mathbf{H}(x)$;

Ces champs (qu'on confond à leur phaseurs) vérifient les équations de Maxwell dans lesquelles la dérivation en temps est remplacée par la multiplication par $-i\omega$.

- **Loi de Lenz-Faraday**

$$(1.7) \quad \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H} = -\mathbf{M} - \sigma_m\mathbf{H}$$

- **Loi d'Ampère-Maxwell.**

$$(1.8) \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E} = \mathbf{J} + \sigma\mathbf{E}$$

REMARQUE 1.2. *Physiquement, il n'y a ni courants, ni charges magnétiques, i.e., $\mathbf{M} = 0$ et $\sigma_m = 0$. La considération de ces quantités fictives permet de simplifier certains problèmes de modélisation.*

Les **charges électriques** $\varrho(x)$ et **magnétiques** $\varrho_m(x)$ sont implicites dans les équations précédentes. Elles sont reliées aux courants par **les équations de conservation de la charge** :

$$(1.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} - i\omega\varrho = 0$$

$$(1.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{M} - i\omega\varrho_m = 0$$

Ces conservations de la charge sont fondamentales pour la conformité et la stabilité des schémas numériques qui sont utilisés dans la résolution par équations intégrales.

2. Matériaux à pertes et sans pertes.

Si σ ou σ_m est strictement positif, le matériau est à pertes. Il absorbe de l'énergie par effet Joule si $\sigma > 0$. Le cas où $\sigma_m > 0$ correspond aussi à un modèle avec absorption d'énergie. Il est commode de décrire de tels matériaux par un coefficient de permittivité ou de perméabilité relatives généralisés, complexes :

$$(1.11) \quad \varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon'_r, \quad \mu = \mu_r + i\mu'_r,$$

$$(1.12) \quad \varepsilon'_r = \sigma/\omega\varepsilon_0, \quad \mu'_r = \sigma_m/\omega\mu_0,$$

avec ainsi, dans ce cas :

$$\Im(\varepsilon) = \varepsilon'_r > 0, \quad \Im(\mu) = \mu'_r > 0$$

REMARQUE 1.3. *Le choix d'une dépendance en temps en $e^{i\omega t}$ aurait donné :*

$$(1.13) \quad \Re(\varepsilon) < 0 \text{ ou } \Re(\mu) < 0$$

pour un matériau à pertes.

On peut réécrire alors les équations de Maxwell sous une forme unique, que le matériau soit à pertes ou non :

$$(1.14) \quad \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu_0\mu\mathbf{H} = -\mathbf{M}$$

$$(1.15) \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}$$

En fait, les équations (1.14), (1.15), (1.9) et (1.10) contiennent les deux autres équations du système de Maxwell.

Lois de Gauss

$$(1.16) \quad \nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = \varrho/\varepsilon_0$$

$$(1.17) \quad \nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = \varrho_m/\mu_0$$

3. Conditions d'interface et aux limites.

Entre deux milieux, décrits géométriquement par deux domaines D_1 et D_2 , avec des caractéristiques électriques ε_1, μ_1 et ε_2, μ_2 , la condition de raccord à l'interface Σ commune à D_1 et D_2 (figure 3) s'écrit :

Conditions de transmission :

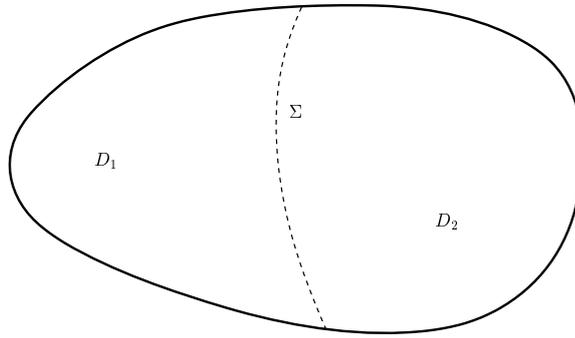
$$(1.18) \quad \mathbf{E}_T^{(1)}|_\Sigma = \mathbf{E}_T^{(2)}|_\Sigma$$

$$(1.19) \quad \mathbf{H}_T^{(1)}|_\Sigma = \mathbf{H}_T^{(2)}|_\Sigma$$

où l'indice T indique la composante tangentielle à Σ (i.e., $\mathbf{E}_T = \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$ où \mathbf{n} est la normale unitaire à Σ) et $\mathbf{E}^{(j)}$ indique les valeurs aux limites par Σ prises à partir des valeurs dans D_j . Les conditions (1.18) et (1.19) peuvent être écrites aussi de façon équivalente en utilisant le produit vectoriel

$$\mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{n}|_\Sigma = \mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{n}|_\Sigma$$

$$\mathbf{H}^{(1)} \times \mathbf{n}|_\Sigma = \mathbf{H}^{(2)} \times \mathbf{n}|_\Sigma$$



Dans le domaine des micro-ondes —correspondant à des fréquences de 0.1 MHz à quelques dizaines de GHz— les corps conducteurs peuvent être considérés comme parfaitement conducteurs, i.e., avec une conductivité infinie :

$$(1.20) \quad \sigma = +\infty$$

Pour que les équations de Maxwell puissent être vérifiées, il est nécessaire que le champ électromagnétique s'annule dans un conducteur parfait. Dans ces conditions si Ω a une frontière Γ qui limite un conducteur parfait, la condition (1.18) donne en particulier la

Condition aux limites de type conducteur parfait.

$$(1.21) \quad \mathbf{E}_T = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Cette condition peut aussi être écrite de façon équivalente

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

4. Formulations à un seul champ

On peut en fait éliminer l'un des deux champs \mathbf{E} ou \mathbf{H} et obtenir un système posé pour seulement l'un des deux champs mais qui sera d'ordre 2.

On introduit auparavant les notations suivantes qui permettent d'écrire le système de Maxwell sous une forme plus symétrique. On note par

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

la vitesse de la lumière dans le vide, $c = 299\,792\,458$ m/s, généralement arrondi à $c = 300\,000$ km/s et par

$$k = \omega/c$$

le nombre d'onde dans le vide. On utilisera aussi l'impédance du vide, définie par

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$Z \approx 100\pi$ dans le système international (SI). Comme $\omega\mu_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = kZ$ et $\omega\varepsilon_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} = kZ^{-1}$, le système de Maxwell se réécrit alors à l'aide de k et Z

$$(1.22) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ikZ\mu\mathbf{H} = -\mathbf{M}, \\ \nabla \times \mathbf{H} + ikZ^{-1}\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}. \end{cases}$$

Comme $\Re(\varepsilon)$ et $\Re(\mu)$ sont ≥ 1 , on peut réécrire les équations précédentes en divisant respectivement par μ et par ε et en prenant le rotationnel sous la forme

$$\begin{cases} \nabla \times \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E} - ikZ \nabla \times \mathbf{H} = -\nabla \times \frac{1}{\mu}\mathbf{M}, \\ \nabla \times \frac{1}{\varepsilon}\nabla \times \mathbf{H} + ikZ^{-1}\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{J}. \end{cases}$$

On sera amené à utiliser aussi l'indice n du matériau défini par

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

4.1. Formulation en champ électrique. En réutilisant les équations de Maxwell, on peut éliminer \mathbf{H} dans la première équation

$$(1.23) \quad \nabla \times \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E} - k^2\varepsilon\mathbf{E} = ikZ\mathbf{J} - \nabla \times \frac{1}{\mu}\mathbf{M}$$

La condition aux limites (1.21) de type conducteur parfait reste inchangée de même que la condition de transmission portant sur le champ électrique.

En supposant que le support des courants \mathbf{J} et \mathbf{M} sont à l'intérieur des domaines, on peut réécrire les conditions de transmission sur le champ magnétique sous la forme

$$(1.24) \quad \frac{1}{\mu_1}\nabla \times \mathbf{E}^{(1)} \times \mathbf{n}|_{\Sigma} = \frac{1}{\mu_2}\nabla \times \mathbf{E}^{(2)} \times \mathbf{n}|_{\Sigma}.$$

4.2. Formulation en champ magnétique. De la même façon que ci-dessus, on peut aussi éliminer le champ électrique et obtenir

$$(1.25) \quad \nabla \times \frac{1}{\varepsilon}\nabla \times \mathbf{H} - k^2\mu\mathbf{H} = ikZ^{-1}\mathbf{M} + \nabla \times \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{J}.$$

La condition de conducteur parfait devient

$$(1.26) \quad \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0.$$

De la même façon, la condition de transmission (1.18) sur la composante tangentielle du champ électrique devient

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \nabla \times \mathbf{H}^{(1)} \times \mathbf{n}|_{\Sigma} = \frac{1}{\varepsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}^{(2)} \times \mathbf{n}|_{\Sigma}$$

La condition (1.19) reste inchangée.

Propagation libre dans un milieu homogène

La résolution par équations intégrales n'est possible que si le milieu est homogène dans le domaine de résolution ; c'est-à-dire ici que ε et μ sont constants. Si ε ou μ sont variables, ce qui correspond à un milieu non homogène, on doit utiliser une formulation par éléments finis. L'utilisation d'une méthode de résolution par équations intégrales ramène le problème à des équations posées dans \mathbb{R}^3 tout entier. On dit alors qu'on a une propagation libre. La résolution, dans le cas d'une propagation libre, passe par la réduction du système de Maxwell à une équation d'Helmholtz sur chaque composante, ces équations étant indépendantes l'une de l'autre. Ce découplage n'est généralement possible qu'en propagation libre.

1. Réduction des équations de Maxwell dans le cas d'une propagation libre

Il suffit de déterminer le champ \mathbf{E} , le champ \mathbf{H} sera alors donné par la première équation du système de Maxwell (1.22) du chapitre 1

$$(2.1) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{ikZ\mu} (\mathbf{M} + \nabla \times \mathbf{E})$$

On utilise ainsi l'équation (1.24) du chapitre 1. Comme ε et μ sont constants, on écrit cette équation en utilisant l'indice n du milieu de propagation

$$(2.2) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 n^2 \mathbf{E} = ikZ\mu \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{M}.$$

Pour découpler les équations sur chaque composante de \mathbf{E} , on procède en deux étapes.

- (1) En prenant la divergence des deux membres, on exprime $\nabla \cdot \mathbf{E}$ à l'aide de $\nabla \cdot \mathbf{J}$, retrouvant ainsi la loi de Gauss

$$(2.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -ikZ \left(\frac{1}{k^2 \varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{J} \right).$$

- (2) On utilise la relation

$$(2.4) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

où $\Delta \mathbf{E}$ est le laplacien vectoriel donné en coordonnées cartésiennes par

$$(2.5) \quad (\Delta \mathbf{E})_j = \Delta E_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

où E_j et $(\Delta \mathbf{E})_j$ sont les composantes respectives de \mathbf{E} et $\Delta \mathbf{E}$ dans le repère orthormé associé à un système coordonnées cartésiennes x_j ($j = 1, 2, 3$) de \mathbb{R}^3 .

On rappelle que le laplacien d'une fonction scalaire est défini par

$$\Delta w = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j}^2 w.$$

On obtient ainsi un système d'équations découplées sur chaque composante qu'il est commode de garder sous forme vectorielle

$$(2.6) \quad -(\Delta + k^2 n^2) \mathbf{E} = \mathbf{T} \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

avec

$$(2.7) \quad \mathbf{T} := ikZ \left(\frac{1}{k^2 \varepsilon} \nabla \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu \mathbf{J} \right) - \nabla \times \mathbf{M}.$$

REMARQUE 2.1. *En partant de la formulation en champ magnétique (1.25) du chapitre 1, on aurait obtenue de façon similaire l'équation suivante pour chaque composante de \mathbf{H}*

$$(2.8) \quad -(\Delta + k^2 n^2) \mathbf{H} = ikZ^{-1} \left(\frac{1}{k^2 \mu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{M} + \varepsilon \mathbf{M} \right) + \nabla \times \mathbf{J} \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

Nous verrons que la solution fournie par (2.7) est la même que celle qu'on obtiendrait par (2.1) après avoir résolu l'équation en \mathbf{E} .

Dans le cas d'une propagation libre, le support des courants appliqués \mathbf{J} et \mathbf{M} est borné; c'est-à-dire que \mathbf{J} et \mathbf{M} sont nuls à l'extérieur de la boule B_R de centre 0 et de rayon R qu'on note par

$$B_R^e := \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| > R\}.$$

Nous supposons que ces conditions sont vérifiées dans toute la suite.

2. Milieu sans pertes et avec pertes

2.1. Le lemme de Rellich pour un milieu sans pertes. Dans ce chapitre, où nous travaillons dans tout l'espace, implicitement, nous supposons que le milieu de propagation est l'air, $\varepsilon = \mu = 1$, lorsque nous considérons un milieu sans pertes. Un changement de notation nous ramène à cette situation dans le cas d'un milieu quelconque sans pertes.

Le théorème de Rellich suivant nous dit que les champs électromagnétiques créés par des courants dans tout l'espace ne peuvent être dans l'espace $L^2(B_R^e)$ que s'ils ont une forme très particulière.

THÉORÈME 2.1 (Lemme de Rellich). *Soit U un domaine extérieur de \mathbb{R}^3 , i.e., tel qu'il existe R_0 avec*

$$(2.9) \quad B_{R_0}^e \subset U$$

Soit $u \in \mathcal{D}'(U)$ vérifiant

$$(2.10) \quad \Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(U)$$

avec $k > 0$. Alors, $u \in C^\infty(U)$ et on a l'alternative suivante :

$$(2.11) \quad u \equiv 0 \text{ dans } U$$

$$(2.12) \quad \begin{cases} \exists R_1 > R_0 \text{ et } M > 0 \text{ tels que} \\ \int_{R_0 < |x| < R} |u(x)|^2 dx \geq MR, \forall R > R_1 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. (Admise.) □

En appliquant le théorème précédent dans le domaine U non borné où les courants \mathbf{J} et \mathbf{M} sont nuls, on trouve que \mathbf{E} et \mathbf{H} sont dans $L^2(B_R^e)$ si et seulement si $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ dans U ; c'est-à-dire que les courants ne rayonnent aucun champ à l'extérieur d'une surface englobant leur support. C'est clairement une situation physique particulière exceptionnelle qui ne saurait caractériser un champ électromagnétique quelconque.

2.2. Ondes planes. Loin des sources, tout champ électromagnétique peut être considéré comme une onde plane en première approximation. C'est pourquoi les ondes planes, qui sont des solutions du système de Maxwell, sans sources ou encore avec des sources rejetées à l'infini, jouent un grand rôle dans les problèmes de détection radar.

Soit un vecteur unitaire $\boldsymbol{\nu}$ dont les composantes donnent les cosinus directeurs de la direction de propagation de l'onde plane. Les ondes planes sont des solutions du système de Maxwell du type

$$(2.13) \quad \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x}, \quad \mathbf{H}(x) = \mathbf{H}_0 e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x}.$$

Il faut bien sûr que les amplitudes des champs \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 et la direction de propagation $\boldsymbol{\nu}$ soient reliées par certaines relations pour que (2.13) constituent une solution des équations de Maxwell.

THÉORÈME 2.2. *Pour que les expressions (2.13) donnent une solution des équations de Maxwell, c'est-à-dire constituent une onde plane électromagnétique, il faut et il suffit que les relations suivantes soient vérifiées*

- (1) \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 et $\boldsymbol{\nu}$ forment un repère direct,
- (2) $|\mathbf{E}_0| / |\mathbf{H}_0| = Z$

DÉMONSTRATION. On utilise la formule suivante d'analyse vectorielle donnant le rotationnel du produit d'une fonction scalaire par un champ de vecteurs

$$(2.14) \quad \nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x}) = \nabla e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x} \times \mathbf{E}_0 + e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x} \nabla \times \mathbf{E}_0$$

On a de même pour le gradient de la composée d'une fonction d'une variable et d'une fonction de trois variables

$$\nabla v(\boldsymbol{\nu} \cdot x) = v'(\boldsymbol{\nu} \cdot x) \nabla(\boldsymbol{\nu} \cdot x) = v'(\boldsymbol{\nu} \cdot x) \boldsymbol{\nu}$$

et donc pour $v(s) = e^{iks}$

$$\nabla e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x} = ik e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x} \boldsymbol{\nu}.$$

Comme \mathbf{E}_0 ne dépend pas de x , on a

$$\nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x}) = ik \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_0.$$

On a bien sûr de même

$$\nabla \times (\mathbf{H}_0 e^{ik\boldsymbol{\nu}\cdot x}) = ik \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}_0.$$

En utilisant la forme (1.22) des équations de Maxwell donnée au chapitre 1, on voit donc que les expressions (2.13) constituent une onde plane si et seulement si les vecteurs \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 et $\boldsymbol{\nu}$ sont liés par les relations suivantes

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_0 = Z\mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_0 \times \boldsymbol{\nu} = Z^{-1}\mathbf{E}_0 \end{cases}$$

D'après les propriétés du produit vectoriel, ces relations expriment que $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E}_0 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{H}_0 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{H}_0 = 0$ et que $|\mathbf{E}_0|/|\mathbf{H}_0| = Z$. La première équation peut alors être réécrite

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_0/|\mathbf{E}_0| = \mathbf{H}_0/|\mathbf{H}_0|$$

et exprime ainsi que \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 et $\boldsymbol{\nu}$ forment un repère direct. \square

Ayant donc une solution \mathbf{E} et \mathbf{H} du système de Maxwell (1.22) du chapitre 1 dans \mathbb{R}^3 avec $\varepsilon = \mu = 1$, on peut lui ajouter une onde plane $\mathbf{E}_0 e^{ik\boldsymbol{\nu} \cdot x}$, $\mathbf{H}_0 e^{ik\boldsymbol{\nu} \cdot x}$ quelconque et obtenir encore une solution. Pour caractériser, parmi toutes ces solutions, la solution qui serait en accord avec la physique, on va revenir de nouveau à cet aspect du problème.

Un milieu sans pertes est une idéalisation d'un véritable milieu qui aurait des pertes faibles. Cette idéalisation est cependant nécessaire pour rendre compte de nombreux phénomènes physiques et pour éviter que les procédés de résolution soient entâchés d'instabilités numériques. Nous allons voir cependant que la considération d'un milieu sans pertes comme un cas limite d'un milieu avec pertes permet d'effectuer la bonne caractérisation de la solution physique.

2.3. Milieu avec pertes. On revient donc à un milieu avec $\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon'_r$ et $\mu = \mu_r + i\mu'_r$ avec $\varepsilon_r, \mu_r \geq 1$ et $\varepsilon'_r, \mu'_r \geq 0$ et vérifiant

$$(2.15) \quad \varepsilon'_r + \mu'_r > 0.$$

Pour exploiter la propriété $\varepsilon_r, \mu_r \geq 1$, les physiciens caractérisent les pertes d'un milieu non pas avec les parties imaginaires ε'_r ou μ'_r mais à l'aide des "tangentes des matériaux" qui le composent

$$(2.16) \quad \tan \theta_\varepsilon = \varepsilon'_r/\varepsilon_r \text{ et } \tan \theta_\mu = \mu'_r/\mu_r$$

avec

$$(2.17) \quad 0 \leq \theta_\varepsilon, \theta_\mu < \pi/2.$$

On peut donc réécrire les constantes du diélectrique à l'aide des angles relatifs à ces tangentes comme

$$(2.18) \quad \varepsilon = \varepsilon_r(1 + i \tan \theta_\varepsilon) = |\varepsilon| e^{i\theta_\varepsilon} \text{ et } \mu = \mu_r(1 + i \tan \theta_\mu) = |\mu| e^{i\theta_\mu}.$$

Ceci nous permet d'exprimer directement l'indice $n = |n| e^{i\theta}$ à l'aide de son module $|n| = \sqrt{|\varepsilon\mu|}$ et de son argument θ qui est donné par

$$(2.19) \quad 0 \leq \theta = (\theta_\varepsilon + \theta_\mu)/2 < \pi/2.$$

Un milieu avec pertes sera donc caractérisé par un indice d'argument $\theta > 0$. Un milieu réel sera un milieu obtenu en prenant un indice $n = |n| e^{i\theta}$ et en faisant tendre $\theta \rightarrow 0$: c'est le principe d'absorption-limite.

Nous montrerons plus loin que pour un milieu absorbant, le système de Maxwell (1.22) du chapitre 1 possède une solution vérifiant

$$(2.20) \quad \mathbf{E}, \mathbf{H} \in H^1(B_R^e; \mathbb{C}^3),$$

la notation $H^1(B_R^e; \mathbb{C}^3)$ indiquant que les champs correspondant ont chacune de leur composante dans $H^1(B_R^e)$. Le lemme suivant montre que cette solution est unique.

LEMME 2.1. *Soient w_1 et w_2 deux distributions sur \mathbb{R}^3 vérifiant*

$$(2.21) \quad -(\Delta + k^2 n^2)w_j = T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

avec $n = |n|e^{i\theta}$, $\theta > 0$ et telles que le support de T soit contenu dans B_R . Si $w_1|_{B_R^e}$ et $w_2|_{B_R^e}$ sont dans $H^1(B_R^e)$, alors $w_1 = w_2$.

DÉMONSTRATION. Posons $w = w_1 - w_2$; cette distribution est solution de (2.21) avec $T = 0$. La théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques montre que w est dans $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. La distribution w est donc dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^3)$. Il existe donc $\{\varphi_m\}_{m \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ tel que

$$(2.22) \quad \lim \varphi_m = w \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^3)$$

On écrit alors

$$(2.23) \quad - \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta w + k^2 n^2 w) \overline{\varphi_m} \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla w \cdot \nabla \overline{\varphi_m} - k^2 n^2 w \overline{\varphi_m}) \, dx = 0$$

En passant à la limite, il vient

$$(2.24) \quad \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla w|^2 - k^2 n^2 |w|^2) \, dx = 0$$

Et en prenant la partie imaginaire, on tire alors

$$(2.25) \quad -k^2 |n|^2 \sin^2 \theta \int_{\mathbb{R}^3} |w|^2 \, dx = 0$$

Et ainsi $w = 0$. □

En travaillant avec chaque composante de l'équation (2.2), on déduit directement le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3. *Soient $(\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)})$ et $(\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)})$ deux champs sur \mathbb{R}^3 vérifiant les équations de Maxwell (1.22) du chapitre 1 tels que le support des courants \mathbf{J} et \mathbf{M} soit contenu dans B_R et tels que ε et μ vérifient la condition (2.15). Si $\mathbf{E}^{(j)}|_{B_R^e} \in H^1(B_R^e; \mathbb{C}^3)$ pour $j = 1, 2$, alors $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^{(2)}$ et $\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{H}^{(2)}$.*

REMARQUE 2.2. *La condition $\mathbf{H}^{(j)}|_{B_R^e} \in H^1(B_R^e; \mathbb{C}^3)$ pour $j = 1, 2$ donne le même résultat.*

3. Solution élémentaire.

La solution de (2.2) se déduit de celle de l'équation

$$(2.26) \quad -(\Delta h_{kn} + k^2 n^2 h_{kn}) = \delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

où δ est la masse de Dirac à l'origine.

Une solution de (2.26) est appelée **solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz**

$$(2.27) \quad -(\Delta w + k^2 n^2 w) = T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

On sait déjà que, si $n = |n| e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi/2$, l'équation (2.26) possède au plus une solution vérifiant $h|_{B_R^e} \in H^1(B_R^e)$ pour tout $R > 0$. On peut démontrer (exercice) que cette solution est donnée par

$$(2.28) \quad h_{kn}(x) := \frac{e^{ikn|x|}}{4\pi|x|} \text{ pour } x \neq 0.$$

4. Propagation libre dans un milieu avec pertes.

Le théorème suivant permet de résoudre l'équation (2.27) dans le cas d'un matériau avec pertes.

THÉORÈME 2.4. *Si $n = |n| e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi/2$, alors, une solution de (2.27) est donnée explicitement par*

$$(2.29) \quad u = h_{kn} * T$$

Cette solution u est de classe C^∞ en dehors du support de T et est donnée par

$$(2.30) \quad u(x) = \langle T_y, G_n(x, y) \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} ; \quad \forall x \notin \text{supp}(T)$$

où G_n est le noyau de Green de l'équation d'Helmholtz :

$$(2.31) \quad G_n(x, y) = \frac{e^{ikn|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad x \neq y,$$

En particulier, si R est assez grand de sorte que $\text{supp}(T) \subset B_R$, alors $u \in H^1(B_R^e)$.

DÉMONSTRATION. Comme T est à support compact, h_{kn} et T sont convolables. On a ainsi :

$$(2.32) \quad -(\Delta + k^2 n^2)(h_{kn} * T) = \{-(\Delta + k^2 n^2)h_{kn}\} * T = \delta * T = T$$

La théorie des distributions montre alors que $E * T|_U \in C^\infty(U)$ si $T|_U = 0$ et que pour $x \in U$, on a :

$$(2.33) \quad h_{kn} * T(x) = \langle T_y, h_{kn}(x-y) \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)}$$

d'où la formule (2.30), sachant que $h_{kn}(x-y) = G_n(x, y)$. Pour x tel que $|x| > R$, on a donc :

$$(2.34) \quad u(x) = \left\langle T_y, \frac{e^{ikn|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)}$$

Mais si $|x| \rightarrow +\infty$ et $|y| \leq R$, on a

$$(2.35) \quad |x-y|^2 = |x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2$$

$$(2.36) \quad |x-y| = |x| \left\{ 1 - 2 \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|x|} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = |x| - \frac{x}{|x|} \cdot y + \mathcal{O}(1/|x|)$$

Le développement asymptotique de l'exponentielle donne alors

$$(2.37) \quad \frac{e^{ikn|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{e^{ik(|n|\cos\theta)|x|}}{4\pi|x|} e^{-k(|n|\sin\theta)|x|} e^{-ikn\frac{x}{|x|}\cdot y} \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}$$

On tire de cette relation

$$(2.38) \quad u(x) = \frac{e^{ik(|n|\cos\theta)|x|}}{4\pi|x|} e^{-k(|n|\sin\theta)|x|} \left\{ \left\langle T_y, e^{-ikn\frac{x}{|x|}\cdot y} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}$$

Comme $\sin\theta > 0$, le terme $e^{-k(|n|\sin\theta)|x|}$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. Comme ce type de développement est vrai pour les dérivées de u , ceci démontre le théorème. \square

THÉORÈME 2.5. *La solution (2.29) est la seule solution de (2.27) qui soit dans $H^1(B_R^e)$ pour R tel que $\text{supp } T \subset B_R$.*

Comme les équations du système (2.6) sont découplées relativement à chaque composante, le théorème précédent permet d'exprimer explicitement la solution. On garde cependant une notation vectorielle qui sera commode pour exprimer le champ électromagnétique.

THÉORÈME 2.6. *Supposons que le milieu emplissant l'espace soit à pertes, avec donc $n = |n|e^{i\theta}$ et $0 < \theta < \pi/2$, et que le support des courants \mathbf{J} et \mathbf{M} soit contenu dans la boule B_R de centre 0 et de rayon R . Alors, le système de Maxwell (1.22) du chapitre 1 possède une solution et une seule vérifiant (2.20) donnée par*

$$(2.39) \quad \mathbf{E} = ikZ \left(\frac{1}{k^2\varepsilon} \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\mathbf{A} \right) - \nabla \times \mathbf{B}$$

$$(2.40) \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} + ikZ^{-1} \left(\frac{1}{k^2\mu} \nabla\nabla \cdot \mathbf{B} + \varepsilon\mathbf{B} \right)$$

$$(2.41) \quad \mathbf{A} = h_{kn} * \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = h_{kn} * \mathbf{M}$$

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 2.4 à l'équation (2.6) pour exprimer \mathbf{E} par $\mathbf{E} = h_{kn} * \mathbf{T}$ à l'aide de la distribution à valeurs vectorielles \mathbf{T} . On utilise alors le fait que pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver l'un des termes de ce produit pour obtenir (2.39) à l'aide de l'expression (2.7) de \mathbf{T} . On utilise alors la relation (2.1) pour obtenir \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ikZ\mu} \left(\mathbf{M} + \nabla \times \left(ikZ \left(\frac{1}{k^2\varepsilon} \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\mathbf{A} \right) - \nabla \times \mathbf{B} \right) \right).$$

Comme le rotationnel d'un gradient est nul, on exprime alors \mathbf{H} par

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{ikZ\mu} (\mathbf{M} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{B})$$

Par définition de \mathbf{B} , on a

$$-(\Delta + k^2n^2)\mathbf{B} = \mathbf{M}.$$

Il en résulte en faisant appel à la formule (2.4) d'analyse vectorielle

$$\mathbf{M} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla\nabla \cdot \mathbf{B} - k^2n^2\mathbf{B}.$$

Ceci donne directement (2.40). \square

REMARQUE 2.3. *On aurait obtenu aussi la formule (2.40) directement de la formulation en champ magnétique (2.8) en procédant comme pour la formulation en champ électrique.*

5. Propagation dans un milieu sans pertes.

Pour un milieu sans pertes, on va utiliser le principe d'absorption-limite. On construit une solution dans un milieu avec pertes u_θ avec $n = \cos \theta + i \sin \theta$, $\theta > 0$, et on passe à la limite :

$$u = \lim_{\theta \rightarrow 0} u_\theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} h_{kn} * T$$

On obtient donc une solution donnée par

$$(2.42) \quad u = h_k * T$$

$$(2.43) \quad h_k(x) := \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

$$(2.44) \quad u(x) = \langle T_y, G(x, y) \rangle ; \quad \forall x \notin \text{supp}(T)$$

avec

$$(2.45) \quad G(x, y) := \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \text{ pour } x \neq y.$$

On résume ces résultats dans le théorème suivant.

THÉORÈME 2.7. *Les formules (2.44) et (2.45) donnent la solution obtenue par le procédé d'absorption limite. Cette solution n'est plus dans $H^1(B_R^c)$ mais elle est asymptotiquement à variables séparées en coordonnées sphériques*

$$(2.46) \quad u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} a(x/|x|) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

$$(2.47) \quad a(x/|x|) = \frac{1}{4\pi} \left\langle T_y, e^{-ik\frac{x}{|x|} \cdot y} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)}.$$

DÉMONSTRATION. Elle s'obtient directement à partir du théorème 2.4 par passage à la limite en faisant tendre θ vers 0. \square

REMARQUE 2.4.

- (1) *Le développement (2.46) reste valable pour les dérivées grâce aux propriétés du produit de convolution.*
- (2) *La quantité $a(\theta)$ s'appelle **amplitude de diffusion** ou **fonction de radiation du champ** u . Elle est un paramètre important en pratique : calcul de la surface équivalente radar (SER), diagramme de rayonnement d'une antenne, etc...*

On obtient alors directement la résolution du système de Maxwell (1.22) du chapitre 1 dans le cas d'une propagation dans le vide. Ceci permet aussi d'avoir les expressions des fonctions de radiation du champ \mathbf{E} et \mathbf{H} .

THÉORÈME 2.8. *Le procédé d'absorption limite permet de construire une solution pour le système de Maxwell (1.22) du chapitre 1 dans le vide (ou dans l'air), i.e. pour $n = 1$, donnée par les formules (2.39), (2.40) et (2.41) en prenant $\varepsilon = \mu = 1$. Cette solution admet les fonctions de radiation $\mathbf{E}^\infty(x/|x|)$ et $\mathbf{H}^\infty(x/|x|)$ données par les formules suivantes*

$$(2.48) \quad \mathbf{E}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \mathbf{E}^\infty(x/|x|) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}$$

$$(2.49) \quad \mathbf{H}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \mathbf{H}^\infty(x/|x|) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}$$

avec

$$(2.50) \quad \mathbf{E}^\infty(x/|x|) = \frac{ik}{4\pi} x/|x| \times (Z\mathcal{F}(\mathbf{J})(x/|x|) \times x/|x| - \mathcal{F}(\mathbf{M})(x/|x|))$$

$$(2.51) \quad \mathbf{H}^\infty(x/|x|) = \frac{ik}{4\pi} x/|x| \times (Z^{-1}\mathcal{F}(\mathbf{M})(x/|x|) \times x/|x| + \mathcal{F}(\mathbf{J})(x/|x|))$$

où $\mathcal{F}(\mathbf{P})(x/|x|)$ est la valeur de la fonction de radiation associée à une distribution vectorielle à support compact dans la direction $x/|x|$

$$(2.52) \quad \mathcal{F}(\mathbf{P})(x/|x|) = \left\langle \mathbf{P}_y, e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)}.$$

DÉMONSTRATION. Le seul point non immédiat est d'établir les formules (2.49) et (2.50). Établissons la première, la seconde s'obtient exactement de la même façon.

Le théorème 2.7 nous dit que $\mathbf{E}^\infty(x/|x|)$ est donné par

$$\mathbf{E}^\infty(x/|x|) = \left\langle ikZ \left(\frac{1}{k^2} \nabla_y \nabla_y \cdot \mathbf{J}_y + \mathbf{J}_y \right) - \nabla_y \times \mathbf{M}_y, e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)}.$$

Pour faire ce calcul au sens des distributions, le plus simple est de faire l'évaluation de $\mathbf{E}^\infty(x/|x|) \cdot \mathbf{V}$ où \mathbf{V} est un champ constant et d'effectuer une dualité entre une distribution vectorielle et une fonction test vectorielle aussi

$$\mathbf{E}^\infty(x/|x|) \cdot \mathbf{V} = \left\langle ikZ \left(\frac{1}{k^2\varepsilon} \nabla_y \nabla_y \cdot \mathbf{J}_y + \mu \mathbf{J}_y \right) - \nabla_y \times \mathbf{M}_y, e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \mathbf{V} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)}.$$

On peut alors utiliser la définition par dualité des opérateurs différentiels sur les espaces de distributions pour écrire

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_y \nabla_y \cdot \mathbf{J}_y, e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \mathbf{V} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} &= \left\langle \mathbf{J}_y, \nabla_y \nabla_y \cdot \left(e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \mathbf{V} \right) \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} \\ &= \left\{ \left(-k^2 \left\langle \mathbf{J}_y, e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} \cdot \frac{x}{|x|} \right) \frac{x}{|x|} \right\} \cdot \mathbf{V} \\ \left\langle -\nabla_y \times \mathbf{M}_y, e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \mathbf{V} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} &= \left\langle -\mathbf{M}_y, \nabla_y \times \left(e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \mathbf{V} \right) \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} \\ &= \left\langle -\mathbf{M}_y, \nabla_y e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \times \mathbf{V} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} \\ &= \left(-ik \left\langle -\mathbf{M}_y, e^{-ik\frac{x}{|x|}\cdot y} \times \mathbf{V} \right\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} \times \frac{x}{|x|} \right) \cdot \mathbf{V} \end{aligned}$$

Ceci donne directement (2.48) sachant que l'identification est effectuée pour un vecteur arbitraire quelconque \mathbf{V} . \square

6. Conditions de radiation

On va essayer maintenant de caractériser la solution donnée par le procédé d'absorption limite par une condition à l'infini. Cette condition permettra de sélectionner les solutions physiques dans les cas plus complexes d'une propagation non libre.

6.1. Condition de Sommerfeld. Le comportement (2.46) caractérise la solution obtenue par le principe d'absorption limite. Il n'est cependant pas très utilisable car il fait intervenir la fonction de radiation $a(x/|x|)$ qui est inconnue à priori. On peut l'exprimer de façon équivalente par une condition à l'infini sur u , ici la **condition de radiation de Sommerfeld**.

PROPOSITION 2.1. *La solution u donnée par le principe d'absorption limite pour $n = 1$ vérifie la condition de radiation de Sommerfeld suivante :*

$$(2.53) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} u(x) - iku(x)) = 0$$

DÉMONSTRATION. On utilise la formule (2.46) qui reste valable pour les dérivées, r est la distance à l'origine $r := |x|$

$$(2.54) \quad \partial_r u(x) = \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) a(x/|x|) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

D'où la formule (2.53). □

Nous allons voir maintenant que la condition de radiation caractérise complètement la solution obtenue par le principe d'absorption-limite.

On démontre d'abord le lemme suivant.

LEMME 2.2. *Soit u solution de l'équation d'Helmholtz*

$$(2.55) \quad \Delta u + k^2 u = 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

et vérifiant la condition de radiation de radiation de Sommerfeld (2.53).

Alors, si $S_R := \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| = R\}$

$$(2.56) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |u(x)|^2 dS_R = 0$$

DÉMONSTRATION. Observons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. En utilisant la formule de Green et la formule

$$(2.57) \quad \nabla \cdot (v\mathbf{W}) = v\nabla \cdot \mathbf{W} + \mathbf{W} \cdot \nabla v$$

on peut écrire

$$(2.58) \quad \int_{|x| < R} \nabla \cdot (\bar{u}\nabla u) dx = \int_{|x| < R} (|\nabla u|^2 - k^2|u|^2) dx = \int_{S_R} \bar{u}\partial_r u dS_R$$

On a ainsi directement

$$(2.59) \quad \Im \left(\int_{S_R} \bar{u}\partial_r u dS_R \right) = 0$$

On a ensuite

$$\int_{S_R} |\partial_r u - iku|^2 dS_R \leq 4\pi R^2 \max_{|x|=R} |\partial_r u(x) - iku(x)|^2$$

et donc

$$(2.60) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |\partial_r u - iku|^2 dS_R = 0$$

Mais $|\partial_r u - iku|^2 = (\partial_r u - iku)(\overline{\partial_r u - iku}) = |\partial_r u|^2 + k^2|u|^2 - 2k\Im(\bar{u}\partial_r u)$ et ainsi en utilisant (2.59)

$$\int_{S_R} |\partial_r u - iku|^2 dS_R = \int_{S_R} |\partial_r u|^2 dS_R + k^2 \int_{S_R} |u|^2 dS_R$$

Le lemme découle alors de (2.60). \square

On obtient alors le théoreme suivant.

THÉORÈME 2.9. *La solution u , obtenue par le principe d'absorption-limite, est l'unique solution de l'équation*

$$(2.61) \quad \Delta u + k^2 u = -T, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

qui vérifie la condition de radiation de Sommerfeld.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que si $T = 0$ alors $u = 0$. Supposons que u est non nul. Le lemme de Rellich montre qu'il existe R_1 et $M > 0$ tel que

$$(2.62) \quad \int_{|x|<R} |u(x)|^2 dx \geq MR, \quad \forall R > R_1$$

Le lemme 2.2 montre qu'il existe R_2 , qu'on peut supposer $\geq R_1$, tel que

$$(2.63) \quad \int_{S_R} |u(x)|^2 dS_R \leq \frac{M}{2}, \quad \forall R \geq R_2$$

On écrit alors en passant en coordonnées sphériques

$$(2.64) \quad \int_{|x|<R} |u(x)|^2 dx = \int_{|x|<R_2} |u(x)|^2 dx + \int_{R_2}^R \left\{ \int_{S_r} |u(x)|^2 dS_r \right\} dr$$

$$(2.65) \quad \leq \int_{|x|<R_2} |u(x)|^2 dx + (R - R_2) \frac{M}{2}$$

En utilisant (2.62) et (2.63), il vient en divisant par R

$$(2.66) \quad M \leq \frac{1}{R} \int_{|x|<R_2} |u(x)|^2 dx + (1 - R_2) \frac{M}{2}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on arrive à une contradiction. \square

6.2. Condition de Silver-Müller. On peut bien sûr caractériser la solution donnée par le principe d'absorption limite comme l'unique solution vérifiant l'une des deux conditions de Sommerfeld sur chaque composante des champs

$$(2.67) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} \mathbf{E}(x) - ik\mathbf{E}(x)) = 0 \text{ ou } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} \mathbf{H}(x) - ik\mathbf{H}(x)) = 0.$$

Cette condition n'est cependant pas très adaptée à un champ électromagnétique. Par exemple, le vecteur de Poynting

$$(2.68) \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}$$

décrit le flux de l'énergie rayonnée relative au champ électromagnétique. La condition (2.68) ne donne aucune indication sur ce vecteur.

Le théorème suivant donne une caractérisation plus adaptée à la description des propriétés du champ électromagnétique.

THÉORÈME 2.10. *La solution donnée pour le système de Maxwell (1.22) du chapitre 1 dans le vide par le procédé d'absorption limite est la seule solution de ce système vérifiant la condition suivante dite de Silver-Müller*

$$(2.69) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| \left(Z\mathbf{H}(x) \times \frac{x}{|x|} - \mathbf{E}(x) \right) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que la solution donnée par le procédé d'absorption limite vérifie (2.69). On a suite aux formules (2.50) et (2.51)

$$|x| \left(Z\mathbf{H}(x) \times \frac{x}{|x|} - \mathbf{E}(x) \right) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi} \left(Z\mathbf{H}^\infty(x/|x|) \times \frac{x}{|x|} - \mathbf{E}^\infty(x/|x|) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

On a d'abord en sous-entendant l'argument des fonctions de radiation pour raccourcir l'écriture

$$\begin{aligned} Z\mathbf{H}^\infty \times \frac{x}{|x|} &= Z \left(ik \frac{x}{|x|} \times \left(Z^{-1}\mathcal{F}(\mathbf{M}) \times \frac{x}{|x|} + \mathcal{F}(\mathbf{J}) \right) \right) \times \frac{x}{|x|} \\ &= ik \left(\frac{x}{|x|} \times \left(\mathcal{F}(\mathbf{M}) \times \frac{x}{|x|} \right) \right) \times \frac{x}{|x|} + ik \left(\frac{x}{|x|} \times Z\mathcal{F}(\mathbf{J}) \right) \times \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

Les propriétés du produit vectoriel et du double produit vectoriel donnent alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{|x|} \times \left(\mathcal{F}(\mathbf{M}) \times \frac{x}{|x|} \right) \right) \times \frac{x}{|x|} &= \mathcal{F}(\mathbf{M}) \times \frac{x}{|x|} = -\frac{x}{|x|} \times \mathcal{F}(\mathbf{M}) \\ \left(\frac{x}{|x|} \times Z\mathcal{F}(\mathbf{J}) \right) \times \frac{x}{|x|} &= \frac{x}{|x|} \times \left(Z\mathcal{F}(\mathbf{J}) \times \frac{x}{|x|} \right) \end{aligned}$$

établissant ainsi que $Z\mathbf{H}^\infty(x/|x|) \times \frac{x}{|x|} - \mathbf{E}^\infty(x/|x|) = 0$ et ainsi que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} vérifient la condition de Silver-Müller. Il reste à montrer que cette condition caractérise la solution donnée par le principe d'absorption limite. Il suffit de montrer, comme nous l'avons vu pour la condition de Sommerfeld, que l'unique solution du système de Maxwell (1.22) du chapitre 1 dans le vide, relative à des courants \mathbf{J} et \mathbf{M} égaux à 0, est la solution

nulle. On utilise pour celà la formule de Green suivante

$$(2.70) \quad \int_{B_R} (\Delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + \nabla \times \mathbf{U} \cdot \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{V}) dx = \int_{S_R} \left(\nabla \times \mathbf{U} \times \frac{x}{|x|} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{U} \left(\mathbf{V} \cdot \frac{x}{|x|} \right) \right) dS_R$$

pour $\mathbf{U} = \mathbf{E}$ et $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{E}}$

$$\int_{B_R} (\Delta \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}} + |\nabla \times \mathbf{E}|^2 + |\nabla \cdot \mathbf{E}|^2) dx = \int_{S_R} \left(\nabla \times \mathbf{E} \times \frac{x}{|x|} \cdot \overline{\mathbf{E}} + \nabla \cdot \mathbf{E} \left(\overline{\mathbf{E}} \cdot \frac{x}{|x|} \right) \right) dS_R$$

Mais, sachant que \mathbf{E} et \mathbf{H} sont solutions de (1.22) du chapitre 1 avec $\mathbf{J} = \mathbf{M} = 0$ et tenant compte de (2.3) et (2.6), cette relation peut être réécrite

$$\frac{1}{ik} \int_{B_R} (|\nabla \times \mathbf{E}|^2 - k^2 |\mathbf{E}|^2) dx = \int_{S_R} \left(Z \mathbf{H} \times \frac{x}{|x|} \cdot \overline{\mathbf{E}} \right) dS_R$$

On obtient donc que

$$\Re \left(\int_{S_R} \left(Z \mathbf{H} \times \frac{x}{|x|} \cdot \overline{\mathbf{E}} \right) dS_R \right) = 0.$$

La fin de la démonstration est alors analogue à celle du théorème 2.9 □

Potentiels et formules de représentation

Dans ce chapitre, nous montrons d'abord que les solutions du système de Maxwell, relatives à un milieu homogène, dans un domaine borné ou dont le complémentaire est un domaine borné, admettent une représentation intégrale à l'aide des traces tangentielles (tournées de $\pi/2$ autour de la normale) qu'on appelle courants équivalents : c'est la célèbre formule de Stratton-Chu. Ces représentations intégrales sont données par des opérateurs intégraux qui permettent en fait de définir des solutions du système de Maxwell appelées potentiels. Indiquons que ce procédé de représentation n'est pas limité au système de Maxwell mais peut être utilisé pour d'autres équations aux dérivées partielles à coefficients constants en adaptant le noyau $G(x, y)$ qui est apparu au chapitre 2.

1. Formules de représentation

1.1. Réduction d'un problème posé dans un domaine à un problème posé dans tout l'espace. Notons par D^- un domaine borné de \mathbb{R}^3 , par Γ sa frontière et par \mathbf{n} la normale unitaire à Γ orientée vers l'extérieur de D^- . Nous supposons que Γ est connexe de sorte que le domaine extérieur D^+ à D^- ait aussi pour frontière Γ . Soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) un champ défini et régulier dans $\overline{D^+}$ et $\overline{D^-}$ (pouvant donc admettre des discontinuités de première espèce à la traversée de Γ) et vérifiant

$$(3.1) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = 0, & \text{dans } D^+ \text{ et } D^- \\ \nabla \times \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = 0, & \text{dans } D^+ \text{ et } D^- \\ \text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) = 0 \end{cases}$$

où, pour simplifier, $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ est une onde plane dans l'air et $\text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ indique la condition de radiation de Silver-Müller

$$(3.2) \quad \text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left((\mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \times \frac{x}{|x|} - (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}) \right) = 0$$

La base des formules de représentation est la réduction du problème (3.1) à un problème posé dans tout l'espace \mathbb{R}^3 avec un second membre (inconnu malheureusement) constitué de courants surfaciques, i.e. courants tangents à Γ , appelés courants équivalents. Cette réduction est donnée par la formule suivante issue de la théorie des distributions qui est la formule des sauts particularisée pour le rotationnel.

PROPOSITION 3.1. *Soit \mathbf{W} un champ défini et régulier dans dans $\overline{D^+}$ et $\overline{D^-}$. Le rotationnel de \mathbf{W} au sens des distributions sur \mathbb{R}^3 tout entier est donné par*

$$(3.3) \quad \nabla \times \mathbf{W} = \{\nabla \times \mathbf{W}\} + [\mathbf{n} \times \mathbf{W}] \delta_\Gamma$$

où $\{\nabla \times \mathbf{W}\}$ est la fonction régulière par morceau donnée par

$$(3.4) \quad \{\nabla \times \mathbf{W}\}|_{D^\pm} = \nabla \times \mathbf{W} \text{ dans } D^\pm,$$

$$(3.5) \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{W}] = \mathbf{n} \times \mathbf{W}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{W}^-$$

est le saut à travers Γ de $\mathbf{n} \times \mathbf{W}$ et $\mathbf{P}\delta_\Gamma$ est la distribution de support contenu dans Γ , associée à un champ régulier \mathbf{P} tangent à Γ , donnée par

$$(3.6) \quad \langle \mathbf{P}\delta_\Gamma, \Phi \rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3), \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)} = \int_\Gamma \mathbf{P} \cdot \Phi \, d\Gamma$$

pour tout $\Phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$.

DÉMONSTRATION. On a par définition de la dérivation au sens des distributions

$$\langle \nabla \times \mathbf{W}, \Phi \rangle = \int_{D^+} \mathbf{W} \cdot \nabla \times \Phi \, dx + \int_{D^-} \mathbf{W} \cdot \nabla \times \Phi \, dx$$

ce qu'on écrit en utilisant les expressions avec des dérivées usuelles

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times \mathbf{W}, \Phi \rangle = & \\ & - \int_{D^+} (\nabla \times \mathbf{W}|_{D^+} \cdot \Phi - \mathbf{W} \cdot \nabla \times \Phi) \, dx + \int_{D^+} \nabla \times \mathbf{W}|_{D^+} \cdot \Phi \, dx \\ & - \int_{D^-} (\nabla \times \mathbf{W}|_{D^-} \cdot \Phi - \mathbf{W} \cdot \nabla \times \Phi) \, dx + \int_{D^-} \nabla \times \mathbf{W}|_{D^-} \cdot \Phi \, dx \end{aligned}$$

On utilise alors la formule d'analyse vectorielle

$$\nabla \cdot (\mathbf{W}|_{D^\pm} \times \Phi) = \nabla \times \mathbf{W}|_{D^\pm} \cdot \Phi - \mathbf{W} \cdot \nabla \times \Phi$$

et la formule de Green pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times \mathbf{W}, \Phi \rangle = & \int_\Gamma (\mathbf{n} \times \mathbf{W}^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{W}^-) \cdot \Phi \, d\Gamma \\ & \int_{\mathbb{R}^3} \{\nabla \times \mathbf{W}\} \cdot \Phi \, dx \end{aligned}$$

□

A partir de cette proposition, on obtient directement la réduction suivante.

COROLLAIRE 3.1. *La solution du problème (3.1) vérifie*

$$(3.7) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = -\mathbf{M}, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \times \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{J}, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{inc}) = 0, \end{cases}$$

avec

$$(3.8) \quad \begin{cases} \mathbf{J} := \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^-, & \mathbf{M} := \mathbf{M}^+ + \mathbf{M}^-, & \mathbf{E}^\pm := (\mathbf{E}|_{D^\pm})|_\Gamma, & \mathbf{H}^\pm := (\mathbf{H}|_{D^\pm})|_\Gamma \\ \mathbf{J}^\pm := \pm \mathbf{n} \times \mathbf{H}^\pm, & \mathbf{M}^\pm := \mathbf{E}^\pm \times \mathbf{n}, \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Le corollaire précédent donne

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = \{\nabla \times \mathbf{E}\} - \mathbf{M}, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \{\nabla \times \mathbf{H}\} + \mathbf{J}, & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Comme \mathbf{E} et \mathbf{H} vérifient (3.1), on a

$$\{\nabla \times \mathbf{E}\} = ikZ\mathbf{H} \text{ et } \{\nabla \times \mathbf{H}\} = -ikZ^{-1}\mathbf{E};$$

d'où le corollaire. □

On est ainsi ramené à résoudre le problème (3.7) posé dans tout \mathbb{R}^3 .

1.2. Formule de représentation. Les résultats du chapitre 2 permettent d'exprimer directement $\mathbf{E}|_{D^\pm}$ et $\mathbf{H}|_{D^\pm}$ à l'aide de \mathbf{J} et \mathbf{M} .

THÉORÈME 3.1. *La solution de (3.1) admet la représentation intégrale suivante*

$$(3.9) \quad \begin{cases} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(x) + ikZ(\mathcal{T}\mathbf{J})(x) + (\mathcal{K}\mathbf{M})(x), & x \in D^\pm \\ \mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) - (\mathcal{K}\mathbf{J})(x) + ikZ^{-1}(\mathcal{T}\mathbf{M})(x), & x \in D^\pm \end{cases}$$

avec

$$(3.10) \quad (\mathcal{T}\mathbf{J})(x) = \left(\frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot + 1 \right) \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{J}(y) d\Gamma(y), \quad x \notin \Gamma$$

$$(\mathcal{K}\mathbf{J}\mathbf{M})(x) = -\nabla \times \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{M}(y) d\Gamma(y), \quad x \notin \Gamma$$

et $G(x, y)$ est le noyau de Green donné en (2.45) au chapitre 2. De plus, on \mathbf{E} et \mathbf{H} possèdent le comportement asymptotique donné par (2.48) et (2.49) au chapitre 2 avec ici

$$\mathcal{F}(\mathbf{J})(x/|x|) = \int_{\Gamma} \mathbf{J}(y) e^{-ik \frac{x}{|x|} \cdot y} d\Gamma(y), \quad \mathcal{F}(\mathbf{M})(x/|x|) = \int_{\Gamma} \mathbf{M}(y) e^{-ik \frac{x}{|x|} \cdot y} d\Gamma(y)$$

DÉMONSTRATION. Comme \mathbf{E}^{inc} et \mathbf{H}^{inc} vérifient le système de Maxwell homogène dans tout \mathbb{R}^3 , $\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}$ et $\mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}$ sont solutions de

$$(3.11) \quad \begin{cases} \nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}) - ikZ(\mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) = -\mathbf{M}, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) + ikZ^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}) = \mathbf{J}, & \text{dans } \mathbb{R}^3, \\ \text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) = 0. \end{cases}$$

La construction de la solution par le procédé d'absorption-limite et l'unicité des solutions du système de Maxwell vérifiant la condition de radiation de Silver-Müller du chapitre 2 établissent alors le théorème. \square

On peut donner en fait des expressions plus adaptées à certains calculs numériques des opérateurs intégraux \mathcal{T} et \mathcal{K} . Nous aurons besoin de définir auparavant la notion de divergence surfacique d'un champ de vecteurs tangent à Γ . Cette définition nécessite elle-même d'introduire d'abord la notion de gradient surfacique.

On considère une fonction régulière v définie au voisinage de Γ . Le gradient surfacique $\nabla_{\Gamma} v|_{\Gamma}$ de $v|_{\Gamma}$ peut être défini simplement comme la composante tangentielle du gradient de v

$$(3.12) \quad \nabla_{\Gamma} v|_{\Gamma} = (\nabla v)_{\Gamma} = \mathbf{n} \times (\nabla v \times \mathbf{n}).$$

La divergence surfacique d'un champ de vecteurs \mathbf{J} régulier et tangent à Γ est alors définie par dualité

$$(3.13) \quad \int_{\Gamma} \varphi \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J} d\Gamma = - \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \nabla_{\Gamma} \varphi d\Gamma$$

En particulier, si Σ est un domaine surfacique découpé sur Γ , de frontière la courbe Σ' , on peut démontrer la formule de Green suivante

$$(3.14) \quad \int_{\Sigma} \varphi \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J} \, d\Gamma = - \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \nabla_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma + \int_{\Sigma'} \varphi \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\Sigma'$$

On peut établir alors les formules données par la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2. *Les opérateurs intégraux \mathcal{T} et \mathcal{K} peuvent être aussi exprimés de la façon suivante*

$$(3.15) \quad (\mathcal{T}\mathbf{J})(x) = \frac{1}{k^2} \nabla \int_{\Gamma} G(x, y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \, d\Gamma(y) + \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{J}(y) \, d\Gamma(y), \quad x \notin \Gamma$$

$$(3.16) \quad (\mathcal{K}\mathbf{M})(x) = \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \times \mathbf{M}(y) \, d\Gamma(y), \quad x \notin \Gamma$$

DÉMONSTRATION. Pour établir (3.15), observons qu'on peut dériver sous le signe somme car $x \notin \Gamma$

$$\nabla \cdot \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{J}(y) \, d\Gamma(y) = \int_{\Gamma} \nabla_x \cdot (G(x, y) \mathbf{J}(y)) \, d\Gamma(y)$$

Mais comme $\mathbf{J}(y)$ est un vecteur constant en x , on a

$$\nabla_x \cdot (G(x, y) \mathbf{J}(y)) = \nabla_x G(x, y) \cdot \mathbf{J}(y).$$

Or

$$\nabla_x G(x, y) = \nabla_x \frac{e^{iks}}{4\pi s} = \left(\frac{e^{iks}}{4\pi s} \right)' \nabla_x s(x, y)$$

avec $s(x, y) = |x - y|$. Un calcul direct donne

$$\nabla_x s(x, y) = \frac{x - y}{|x - y|} = -\nabla_y s(x, y)$$

On a donc

$$(3.17) \quad \nabla_x G(x, y) = -\nabla_y G(x, y)$$

et ensuite

$$\nabla_x \cdot (G(x, y) \mathbf{J}(y)) = -\nabla_y G(x, y) \cdot \mathbf{J}(y)$$

Mais comme $\mathbf{J}(y)$ est tangent à Γ , on a ainsi

$$\nabla_x \cdot (G(x, y) \mathbf{J}(y)) = -\nabla_{\Gamma} G(x, y) \cdot \mathbf{J}(y).$$

La formule (3.13) permet alors d'établir (3.15).

Pour établir (3.16), on procède de la même façon

$$-\nabla \times \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{M}(y) \, d\Gamma(y) = - \int_{\Gamma} \nabla_x \times (G(x, y) \mathbf{M}(y)) \, d\Gamma(y).$$

La formule d'analyse vectorielle déjà utilisée pour caractériser les ondes planes donne encore ici

$$\nabla_x \times (G(x, y) \mathbf{M}(y)) = \nabla_x G(x, y) \times \mathbf{M}(y).$$

On utilise encore une fois la relation (3.17) pour obtenir (3.16). \square

1.3. Formule de Stratton-Chu. En prenant $\mathbf{E}|_{D^-} = \mathbf{H}|_{D^-} = 0$, on obtient la formule de représentation suivante connue sous le nom de formule de Stratton-Chu dont la démonstration est une simple particularisation de (3.9).

THÉORÈME 3.2. *Soient \mathbf{E} et \mathbf{H} , définis et réguliers dans $\overline{D^+}$ et une onde plane \mathbf{E}^{inc} et \mathbf{H}^{inc} vérifiant les équations et la condition de radiation de (3.1) dans D^+ . Alors, en notant par*

$$(3.18) \quad \mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma} \text{ et } \mathbf{M} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma}$$

on a

$$(3.19) \quad \mathbf{E}^{inc}(x) + ikZ(\mathcal{T}\mathbf{J})(x) + (\mathcal{K}\mathbf{M})(x) = \begin{cases} \mathbf{E}(x) & \text{si } x \in D^+ \\ 0 & \text{si } x \in D^- \end{cases}$$

$$(3.20) \quad \mathbf{H}^{inc}(x) + ikZ^{-1}(\mathcal{T}\mathbf{M})(x) - (\mathcal{K}\mathbf{J})(x) = \begin{cases} \mathbf{H}(x) & \text{si } x \in D^+ \\ 0 & \text{si } x \in D^- \end{cases}$$

On obtient de même en prolongeant cette fois une solution \mathbf{E} et \mathbf{H} de (3.1) dans D^- par 0 dans D^+ , la formule de Stratton-Chu dans D^- .

THÉORÈME 3.3. *Soient \mathbf{E} et \mathbf{H} , définis et réguliers dans $\overline{D^-}$ vérifiant les équations de (3.1) dans D^- . Alors, en notant par*

$$(3.21) \quad \mathbf{J} = (-\mathbf{n}) \times \mathbf{H}|_{\Gamma} \text{ et } \mathbf{M} = \mathbf{E} \times (-\mathbf{n})|_{\Gamma}$$

on a

$$(3.22) \quad (\mathcal{T}\mathbf{J})ikZ(x) + (\mathcal{K}\mathbf{M})(x) = \begin{cases} \mathbf{E}(x) & \text{si } x \in D^- \\ 0 & \text{si } x \in D^+ \end{cases}$$

$$(3.23) \quad ikZ^{-1}(\mathcal{T}\mathbf{M})(x) - (\mathcal{K}\mathbf{J})(x) = \begin{cases} \mathbf{H}(x) & \text{si } x \in D^- \\ 0 & \text{si } x \in D^+ \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer ici que \mathbf{E} et \mathbf{H} tels que $\mathbf{E}|_{D^+} = \mathbf{H}|_{D^+} = 0$ vérifient les équations de Maxwell (3.1) et la condition de radiation. Le théorème apparaît ainsi comme un cas particulier des formules (3.9). \square

2. Les potentiels du système de Maxwell

2.1. Définition. Les formules de représentation (3.9) suggèrent de considérer les deux fonctions $\mathcal{T}\mathbf{J}(x)$ et $\mathcal{K}\mathbf{M}(x)$, définies pour $x \notin \Gamma$, associées respectivement aux champs de vecteurs tangents \mathbf{J} et \mathbf{M} sur Γ . Pour des raisons qui seront claires par la suite, $\mathcal{T}\mathbf{J}$ est aussi appelé opérateur intégral de l'équation EFIE (pour Electric Integral Field Equation) et $\mathcal{K}\mathbf{M}$ est appelé opérateur intégral de l'équation MFIE (pour Magnetic field Integral Equation). On les appelle aussi potentiels associés respectivement aux densités \mathbf{J} et \mathbf{M} du système de Maxwell.

Les premières propriétés de ces opérateurs sont les suivantes et justifient ainsi leur dénomination de potentiels pour le système de Maxwell.

PROPOSITION 3.3. *Les potentiels $\mathcal{T}\mathbf{J}$ et $\mathcal{K}\mathbf{M}$ sont tels que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} définis dans $D^+ \cup D^-$ par*

$$(3.24) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = ikZ\mathcal{T}\mathbf{J} + \mathcal{K}\mathbf{M} \\ \mathbf{H} = ikZ^{-1}\mathcal{T}\mathbf{M} - \mathcal{K}\mathbf{J} \end{cases}$$

vérifient le système (3.1) avec $\mathbf{E}^{inc} = \mathbf{H}^{inc} = 0$.

DÉMONSTRATION. On peut faire cette vérification soit directement à titre d'exercice, soit en remarquant que \mathbf{E} et \mathbf{H} sont la restriction à $D^+ \cup D^-$ de la solution donnée par le procédé d'absorption-limite du système pour les courants électriques $\mathbf{J}\delta_\Gamma$ et magnétiques $\mathbf{M}\delta_\Gamma$. \square

2.2. Formules de trace. Nous admettrons les formules suivantes qui sont au coeur aussi de la résolution par équations et qui s'établissent par des développements analytiques assez longs.

THÉORÈME 3.4. *La trace tangentielle de $\mathcal{T}\mathbf{J}$ est continue à la traversée de Γ et elle est donnée en tout point x où Γ admet un plan tangent par*

$$(3.25) \quad (\mathcal{T}\mathbf{J})_T^\pm(x) = T\mathbf{J}(x)$$

$$(3.26) \quad T\mathbf{J}(x) = \frac{1}{k^2} \nabla_\Gamma \int_\Gamma G(x, y) \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}(y) d\Gamma(y) + \left(\int_\Gamma G(x, y) \mathbf{J}(y) d\Gamma(y) \right)_T$$

$$(3.27) \quad (\mathcal{K}\mathbf{M})_T^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{M} + K\mathbf{M}$$

$$(3.28) \quad K\mathbf{M} = \int_\Gamma \nabla_y G(x, y) \times \mathbf{M}(y) d\Gamma(y)$$

On obtient alors la formule dites des sauts suivantes qui jouera un rôle essentiel dans les résolutions par équations intégrales.

THÉORÈME 3.5. *Soient \mathbf{E} et \mathbf{H} définis par (3.24). Alors,*

$$(3.29) \quad \mathbf{E}_T^\pm = ikZ\mathcal{T}\mathbf{J} \pm \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{M} + K\mathbf{M}$$

$$(3.30) \quad \mathbf{H}_T^\pm = ikZ^{-1}\mathcal{T}\mathbf{M} - (\pm \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{J} + K\mathbf{J})$$

avec en particulier la formule des sauts

$$(3.31) \quad [\mathbf{E} \times \mathbf{n}] = \mathbf{M}$$

$$(3.32) \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \mathbf{J}$$

avec

$$(3.33) \quad [w] = w^+ - w^-, \quad w^\pm := (w|_{D^\pm})|_\Gamma.$$

DÉMONSTRATION. Les formules (3.29) et (3.30) sont une transcription des formules (3.25) et (3.27). On obtient alors directement (3.31) et (3.32). \square

C'est en fait sous la forme du corollaire suivant que sera utilisée la formule des sauts précédente dans les résolutions par équations intégrales.

COROLLAIRE 3.2. Soient \mathbf{E} et \mathbf{H} définis par (3.24). Alors, si $\mathbf{E}|_{D^-} = 0$ et $\mathbf{H}|_{D^-} = 0$, les traces sont reliées directement aux densités par

$$(3.34) \quad \mathbf{E}^+ \times \mathbf{n} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}^+ = \mathbf{J}$$

Si $\mathbf{E}|_{D^+} = 0$ et $\mathbf{H}|_{D^+} = 0$, alors

$$\mathbf{E}^- \times (-\mathbf{n}) = \mathbf{M}, \quad (-\mathbf{n}) \times \mathbf{H}^- = \mathbf{J}$$

Principales équations intégrales

Après avoir posé le problème de la diffraction d'une onde par un obstacle métallique, supposé être parfaitement conducteur, nous introduisons les principales formulations par équations intégrales utilisées pour sa résolution. Nous terminons par quelques éléments sur l'approximation par les méthodes d'éléments de frontière utilisées pour la résolution numérique effective et sur leur mise en oeuvre.

1. Diffraction par un obstacle parfaitement conducteur

Nous nous remettons dans les notations du chapitre 3 et supposons que l'obstacle, supposé parfaitement conducteur, occupe le domaine D^- . Lorsque cet obstacle est plongé dans le champ créé par une onde incidente \mathbf{E}^{inc} et \mathbf{H}^{inc} , le champ électromagnétique total \mathbf{E} et \mathbf{H} vérifie le problème aux limites suivant constitué du système de Maxwell et de la condition de radiation

$$(4.1) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ikZ\mathbf{H} = 0, & \text{dans } D^+ \\ \nabla \times \mathbf{H} + ikZ^{-1}\mathbf{E} = 0, & \text{dans } D^+ \\ \text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) = 0 \end{cases}$$

auquel sont jointes la condition aux limites de type conducteur parfait sur Γ

$$(4.2) \quad \mathbf{E}^+ \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Nous admettrons dans la suite que ce problème admet une solution et une seule dans un cadre fonctionnel convenable et que la régularité elliptique donne que \mathbf{E} et \mathbf{H} sont de classe \mathcal{C}^∞ jusqu'au bord si Γ est une surface de classe \mathcal{C}^∞ .

2. Principe de résolution par équations intégrales

Il y a plusieurs formulations permettant une résolution par équations intégrales. Celles que nous allons présenter ici sont celles dont les inconnues, dites physiques, sont les courants équivalents

$$(4.3) \quad \mathbf{J} := \mathbf{n} \times \mathbf{H}^+ \text{ et } \mathbf{E} := \mathbf{E}^+ \times \mathbf{n}.$$

Elles correspondent ainsi à une représentation des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} à l'aide de la formule de Stratton-Chu donnée au chapitre précédent.

Même en faisant le choix d'une formulation, on dispose encore de plusieurs façons de l'introduire. Celle que nous adoptons ici correspond à l'annulation du champ intérieur.

Elle est basée sur une sorte de réciproque de la propriété de représentation par la formule de Stratton-Chu donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Soient \mathbf{E}^{inc} et \mathbf{H}^{inc} une onde plane (pour simplifier) et \mathbf{J} et \mathbf{M} deux champs tangents sur Γ . Notons*

$$(4.4) \quad \begin{cases} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^{inc}(x) + ikZT\mathbf{J}(x) + \mathcal{K}\mathbf{M}(x) \text{ pour } x \in D^+, \\ \mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^{inc}(x) + ikZ^{-1}\mathcal{T}\mathbf{M}(x) - \mathcal{K}\mathbf{J}(x) \text{ pour } x \in D^+, \end{cases}$$

et

$$(4.5) \quad \begin{cases} \mathbf{E}^{int}(x) = \mathbf{E}^{inc}(x) + ikZT\mathbf{J}(x) + \mathcal{K}\mathbf{M}(x) \text{ pour } x \in D^-, \\ \mathbf{H}^{int}(x) = \mathbf{H}^{inc}(x) + ikZ^{-1}\mathcal{T}\mathbf{M}(x) - \mathcal{K}\mathbf{J}(x) \text{ pour } x \in D^-, \end{cases}$$

le champ électromagnétique obtenu en superposant le champ incident et le champ créé par ces courants respectivement dans D^+ et dans le domaine intérieur D^- . Alors, \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{J} et \mathbf{M} sont reliés par les relations de trace (4.3) si et seulement si

$$(4.6) \quad \begin{cases} \mathbf{E}^{int}(x) = 0, \\ \mathbf{H}^{int}(x) = 0, \end{cases} \quad \forall x \in D^-.$$

DÉMONSTRATION. La condition nécessaire est la formule de Stratton-Chu, déjà établie au chapitre 3. Pour la condition suffisante, considérons le champ créé par les courants \mathbf{J} et \mathbf{M}

$$(4.7) \quad \begin{cases} ikZT\mathbf{J}(x) + \mathcal{K}\mathbf{M}(x) \\ ikZ^{-1}\mathcal{T}\mathbf{M}(x) - \mathcal{K}\mathbf{J}(x) \end{cases} \text{ pour } x \in D^+ \cup D^-$$

Il est par hypothèse égal à $\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}$ et $\mathbf{H} - \mathbf{H}^{inc}$ dans D^+ et à $-\mathbf{E}^{inc}$ et $-\mathbf{H}^{inc}$ dans D^- . Les formules de saut montrent alors que

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= (\mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}^{inc}))^+ - (\mathbf{n} \times (-\mathbf{H}^{inc}))^- \\ \mathbf{M} &= ((\mathbf{E} - \mathbf{E}^{inc}) \times \mathbf{n})^+ - ((-\mathbf{E}^{inc}) \times \mathbf{n})^- \end{aligned}$$

Comme \mathbf{E}^{inc} et \mathbf{H}^{inc} sont continus à la traversée de Γ , on obtient directement (4.3). \square

Dans le cas du problème (4.1-4.2), le théorème précédent montre que la condition aux limites (4.2) se traduit par

$$(4.8) \quad \mathbf{M} = 0$$

et qu'il suffit d'assurer (4.6) pour obtenir une représentation intégrale du champ dans D^+ à l'aide de \mathbf{J}

$$(4.9) \quad \begin{cases} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^{inc}(x) + ikZT\mathbf{J}(x) \text{ pour } x \in D^+, \\ \mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^{inc}(x) - \mathcal{K}\mathbf{J}(x) \text{ pour } x \in D^+. \end{cases}$$

Comme \mathbf{E}^{int} et \mathbf{H}^{int} sont solution du système de Maxwell dans D^-

$$(4.10) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}^{int} - ikZ\mathbf{H}^{int} = 0, \text{ dans } D^- \\ \nabla \times \mathbf{H}^{int} + ikZ^{-1}\mathbf{E}^{int} = 0, \text{ dans } D^- \end{cases}$$

la formule de Stratton-Chu, appliquée maintenant dans D^- , montre qu'il suffit d'annuler les traces

$$(4.11) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{int})^- = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{inc})^- + ikZ\mathbf{n} \times T\mathbf{J} = 0 \text{ pour } x \in \Gamma$$

et

$$(4.12) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{\text{int}})^- = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{\text{inc}}) - \frac{1}{2}\mathbf{J} - \mathbf{n} \times K\mathbf{J} = 0 \text{ pour } x \in \Gamma$$

pour obtenir (4.6).

En fait, l'une ou l'autre des deux conditions (4.11) ou (4.12) suffit en général, sauf pour un ensemble discret de valeurs exceptionnelles, à assurer la seconde. Ce point est précisé dans la suite lors de l'utilisation de l'une, l'autre ou d'une combinaison des deux conditions.

3. Equation intégrale du champ électrique

C'est une équation universelle, valable pour les surfaces ouvertes ou fermées et adaptable pour les fils. En terminologie anglaise, elle est connue sous l'acronyme EFIE (Electric Field Integral Equation).

Elle est obtenue en utilisant la condition (4.11) sous la forme suivante

$$(4.13) \quad \begin{aligned} ikZT\mathbf{J} &:= ikZ \left(\frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) d\Gamma(y) + \left(\int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{J}(y) d\Gamma(y) \right)_{\Gamma} \right) \\ ikZT\mathbf{J} &= - (\mathbf{E}^{\text{inc}})_{\Gamma} \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Pour éviter la dérivation sous le signe somme et le passage à la composante tangentielle, on la formule de façon équivalente sous forme variationnelle. On introduit pour cela l'espace

$$(4.14) \quad H_{\text{div}}(\Gamma) := \{ \mathbf{J} \in L^2(\Gamma; \mathbb{C}^3), \mathbf{J} \text{ tangent à } \Gamma, \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J} \in L^2(\Gamma) \}$$

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{J} \in H_{\text{div}}(\Gamma), \forall \mathbf{J}' \in H_{\text{div}}(\Gamma), \\ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \left(-\frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}'(x) + \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{J}'(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x) = \\ -\frac{1}{ikZ} \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma \end{array} \right.$$

Le problème (4.15) n'est bien posé que si k est différent de certaines valeurs exceptionnelles

$$k_1^E < k_2^E < \dots$$

qui forment une suite tendant vers l'infini, et qui correspondent aux fréquences de résonance de la cavité D^- dite à murs électriques. Cependant, cette équation possède toujours une solution qui, dans le cas d'une valeur exceptionnelle, est définie à une solution de l'équation homogène près. Ces solutions de l'équation homogène sont appelés courants parasites. Comme ces courants ne rayonnent aucun champ à l'extérieur, le calcul de la SER par cette méthode reste malgré tout extrêmement stable.

4. Equation intégrale du champ magnétique

Cette équation est valable seulement pour les surfaces fermées. En terminologie anglaise, elle est désignée par l'acronyme MFIE pour Magnetic Field Integral Equation. Elle est beaucoup moins stable que la EFIE car elle donne lieu à des modes parasites qui rayonnent à l'extérieur. Elle a été longtemps utilisée avant les années 1980 avant que l'on ait disposé d'espaces d'éléments finis permettant d'approcher l'espace $H_{\text{div}}(\Gamma)$. Actuellement, elle est surtout utilisée en combinaison avec la EFIE pour construire la CFIE (pour Combined Field Integral Equation).

Pour poser la MFIE, on utilise la condition (4.12). On obtient l'équation

$$(4.16) \quad \frac{1}{2}\mathbf{J} + \mathbf{n} \times K\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}$$

Ici, de même, on utilise la formulation variationnelle suivante pour la discrétisation

$$(4.17) \quad L_{\Gamma}^2(\Gamma; \mathbb{C}^3) := \{\mathbf{J} \in L^2(\Gamma; \mathbb{C}^3), \mathbf{J} \text{ tangent à } \Gamma\}.$$

On a alors

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{J} \in L_{\Gamma}^2(\Gamma; \mathbb{C}^3), \forall \mathbf{J}' \in L_{\Gamma}^2(\Gamma; \mathbb{C}^3) \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \mathbf{n}(x) \times (\nabla_y G(x, y) \times \mathbf{J}(y)) \cdot \mathbf{J}'(x) d\Gamma_y d\Gamma_x = \\ \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma \end{array} \right.$$

Cette équation est bien posée sauf pour certaines valeurs exceptionnelles

$$k_1^{\text{H}} < k_2^{\text{H}} < \dots$$

qui donnent lieu à des courants parasites. Contrairement aux courants parasites de la EFIE, ces courants rayonnent rendant cette équation inutilisable sauf aux très basses fréquences, i.e. pour $k \ll k_1^{\text{H}}$.

Comme il n'y a aucune dérivation, ni sur \mathbf{J} , ni sur \mathbf{J}' , la discrétisation de la MFIE peut être effectuée par des champs de vecteurs complètement discontinus. C'est ce qui explique son utilisation avant que de bons espaces d'éléments finis pour approcher $H_{\text{div}}(\Gamma)$ aient été construits.

5. Equation combinée

L'équation combinée des champs ou CFIE est bien posée pour tout k . C'est surtout son très bon conditionnement, la rendant ainsi apte à une résolution itérative, qui fait qu'elle est utilisée de façon systématique actuellement dans les milieux industriels pour la modélisation numérique de la furtivité radar. Cette équation, en combinant la EFIE et la MFIE, supprime les courants parasites

$$\text{CFIE} = \alpha \text{EFIE} + (1 - \alpha) Z \text{MFIE}$$

où α est un paramètre $0 < \alpha < 1$. En général, la valeur $\alpha = 1/5$ donne un bon conditionnement.

La CFIE est ainsi obtenue en imposant à \mathbf{E}^{int} et \mathbf{H}^{int} de vérifier la condition

$$(4.19) \quad \alpha (\mathbf{E}^{\text{int}})_{\mathbf{T}} + (1 - \alpha)Z \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{int}} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Cette formulation se caractérise par ses liens avec les propriétés physiques d'un champ électromagnétique rappelées dans la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1. *Soit un champ \mathbf{E} et \mathbf{H} satisfaisant les équations de Maxwell (4.10) dans D^- . Alors, le vecteur de Poynting*

$$(4.20) \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}},$$

qui traduit la direction et l'intensité de l'énergie électromagnétique rayonnée, vérifie

$$(4.21) \quad \Re \int_{\Gamma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0$$

DÉMONSTRATION. On considère la formule, déjà utilisée au chapitre 3,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} = \nabla \times \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} - \mathbf{E} \cdot \overline{\nabla \times \mathbf{H}}$$

qui s'écrit aussi sachant que \mathbf{E} et \mathbf{H} vérifient les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} &= ikZ |\mathbf{H}|^2 - \overline{(-ikZ^{-1})} |\mathbf{E}|^2 \\ &= ikZ |\mathbf{H}|^2 - ikZ^{-1} |\mathbf{E}|^2 \end{aligned}$$

En intégrant sur D^- et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Gamma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = ik \int_{D^-} (Z |\mathbf{H}|^2 - Z^{-1} |\mathbf{E}|^2) \, dx$$

D'où (4.21) en passant à la partie réelle. \square

On peut alors démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. *La CFIE (4.19) possède une solution et une seule pour tout $k > 0$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $(\mathbf{E}^{\text{int}})_{\mathbf{T}} = 0$ et $\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{int}} = 0$. Notons par $\mathbf{P}^{\text{int}} = \mathbf{E}^{\text{int}} \times \overline{\mathbf{H}^{\text{int}}}$ le vecteur de Poynting associé à \mathbf{E}^{int} et \mathbf{H}^{int} sur Γ . En faisant le produit vectoriel de (4.19) par $\overline{\mathbf{H}^{\text{int}}}$, il vient

$$\alpha (\mathbf{E}^{\text{int}})_{\mathbf{T}} \times \overline{\mathbf{H}^{\text{int}}} = -(1 - \alpha)Z (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{int}}) \times \overline{\mathbf{H}^{\text{int}}}.$$

En prenant le produit scalaire de cette relation par \mathbf{n} et en utilisant les propriétés du produit mixte, on peut exprimer $\mathbf{P}^{\text{int}} \cdot \mathbf{n}$ à l'aide de α et $|\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{int}}|^2$

$$\alpha \mathbf{P}^{\text{int}} \cdot \mathbf{n} = (1 - \alpha)Z |\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{int}}|^2.$$

En intégrant sur Γ , en prenant la partie réelle du résultat et en utilisant la propriété (4.21), on obtient alors

$$\alpha \Re \int_{\Gamma} \mathbf{P}^{\text{int}} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = (1 - \alpha)Z \int_{\Gamma} |\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{int}}|^2 \, d\Gamma = 0.$$

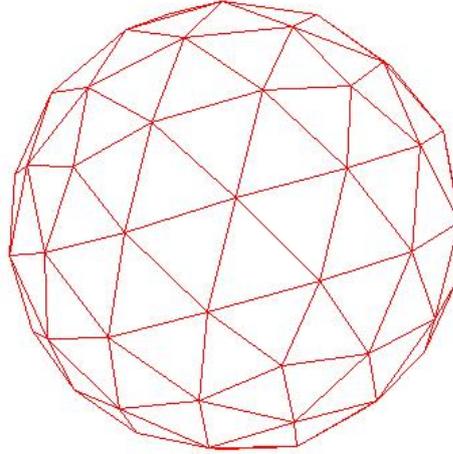
On obtient ainsi $\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{int}} = 0$ et ensuite $\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{int}} = 0$. D'où l'existence et l'unicité de la CFIE par la formule de Stratton-Chu et les formules de saut. \square

Eléments de frontière

Nous allons introduire dans ce chapitre les méthodes utilisées pour l'approximation numérique des équations intégrales du chapitre précédents. Ce sont des méthodes de type éléments finis mais comme elles sont appliquées dans le contexte d'équations sur le bord Γ du domaine, on les désigne plus spécifiquement par méthodes d'éléments de frontière ou de surface.

1. Approximation par éléments finis de surface de l'espace $H_{\text{div}}(\Gamma)$

On approche Γ par une surface polyédrique formée de triangles plan satisfaisant aux conditions usuelles de recouvrement de la méthode des éléments finis : l'intersection de deux triangles distincts se réduit soit au vide, soit à un sommet commun, soit à toute une arête commune (voir figure 1 qui donne une idée de ce maillage lorsque Γ est une sphère).



On remplace Γ par la surface polyédrique qu'on note encore Γ . On notera $K \in \Gamma$ pour traduire que le triangle K est une face triangulaire de la surface Γ .

Il n'y a aucune difficulté à définir une fonction v continue sur Γ et une notion de fonction v intégrable sur Γ

$$(5.1) \quad \int_{\Gamma} v \, d\Gamma = \sum_{K \in \Gamma} \int_K v|_K \, dK.$$

On dira alors que $v \in L^2(\Gamma)$ si et seulement si $v|_K \in L^2(K)$ pour tout $K \in \Gamma$.

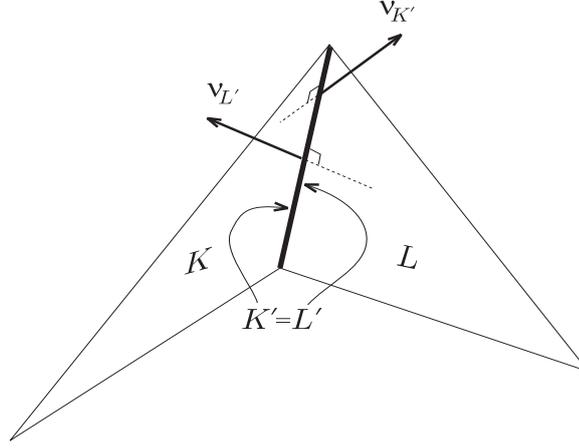


FIG. 5.1. Orientation sur une arête du maillage

En utilisant par exemple les coordonnées barycentriques sur chaque triangle $K \in \Gamma$, on peut parler de dérivées de $v|_K$ et définir ainsi $\nabla_\Gamma v$ qui serait ainsi un champ tangent défini sur chaque triangle $K \in \Gamma$ qui comme tout champ \mathbf{J} tangent à Γ admet forcément des discontinuités aux sommets et aux arêtes.

La notion de champ \mathbf{J} tangent à Γ et dans $L^2(\Gamma; \mathbb{C}^3)$ est alors claire : il suffit que les deux composantes dans un repère du plan de K de $\mathbf{J}|_K$ soient dans $L^2(K)$. On définit alors $\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}$ par dualité de sorte que la définition coïncide avec la définition usuelle dans le cas d'une surface régulière

$$(5.2) \quad \langle \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}, v \rangle = -\sum_{K \in \Gamma} \int_K \mathbf{J} \cdot \nabla_\Gamma v \, d\Gamma$$

pour toute fonction v continue sur Γ telle que $v|_K \in \mathcal{C}^1(\overline{K})$, $\forall K \in \Gamma$. La divergence surfacique $\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}$ appartiendra à $L^2(\Gamma)$ si et seulement si il existe une fonction $\varrho \in L^2(\Gamma)$ telle que

$$(5.3) \quad \langle \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}, v \rangle = \int_\Gamma \varrho v \, d\Gamma$$

pour toute fonction test v satisfaisant aux conditions de la définition (5.2) ci-dessus. La propriété $\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J} \in L^2(\Gamma)$ est exprimée par les physiciens qui parlent alors d'absence de concentration de charges aux arêtes ou aux sommets. Pour des champs \mathbf{J} , réguliers sur chaque triangle $K \in \Gamma$, la propriété $\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J} \in L^2(\Gamma)$ est exprimée par les conditions de raccord données par la proposition énoncée ci après.

PROPOSITION 5.1. *Soit \mathbf{J} un champ tangent à Γ tel que $\mathbf{J}|_K$ est régulier pour tout $K \in \Gamma$. Alors, $\nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J} \in L^2(\Gamma)$ si et seulement si*

$$(5.4) \quad \mathbf{J}|_K \cdot \boldsymbol{\nu}_{K'} + \mathbf{J}|_L \cdot \boldsymbol{\nu}_{L'} = 0$$

pour toute arête $K' \equiv L'$ de Γ où $\boldsymbol{\nu}_{K'}$ et $\boldsymbol{\nu}_{L'}$ désignent les normales unitaires à $K' \equiv L'$, respectivement dans le plan de K et L et orientées vers l'extérieur de K et L (voir figure 5.1).

DÉMONSTRATION. On a par la formule de Green appliquée dans le plan de K

$$(5.5) \quad - \int_K \mathbf{J} \cdot \nabla_\Gamma v \, d\Gamma = \int_K v \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{J}|_K \, dK - \sum_{K'} \int_{K'} \mathbf{J}|_K \cdot \boldsymbol{\nu}_{K'} \, ds$$

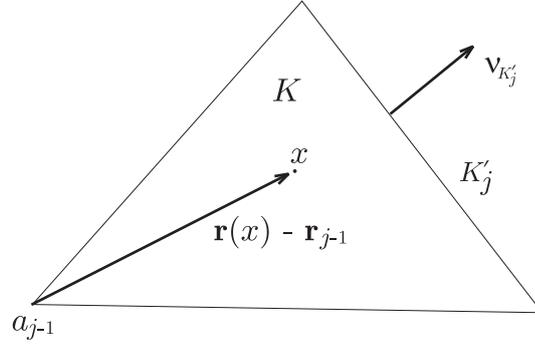


FIG. 5.2. Fonction de base de l'élément de Rao-Wilton-Glisson

où K' est une arête quelconque de K et $\nu_{K'}$ est la normale unitaire à K' dans le plan de K et orientée vers l'extérieur de K . On obtient donc

$$(5.6) \quad -\sum_{K \in \Gamma} \int_K \mathbf{J} \cdot \nabla_{\Gamma} v \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \varrho v \, d\Gamma - \sum_{K \in \Gamma} \sum_{K'} \int_{K'} v \mathbf{J}|_K \cdot \nu_{K'} \, ds$$

Comme une arête quelconque ne limite que deux triangles, un triangle K et un triangle L , la double somme dans (5.6) peut être réécrite

$$\sum_{K \in \Gamma} \sum_{K'} \int_{K'} \mathbf{J}|_K \cdot \nu_{K'} \, ds = \sum_{K' \equiv L'} \int_{K'} v (\mathbf{J}|_K \cdot \nu_{K'} + \mathbf{J}|_L \cdot \nu_{L'}) \, ds$$

où la somme ci-dessus est étendue à toutes les arêtes du maillage. Pour que $\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}$ soit une fonction et non pas une mesure supportée par les arêtes, il faut et il suffit donc que les conditions de raccord (5.4) soient satisfaites. \square

Soit K un triangle de Γ . On note a_j les sommets de K et K'_j les arêtes de sommets a_j et a_{j+1} pour $j = 1, 2, 3$. On note aussi par $|K|$ l'aire du triangle K , par $|K'_j|$ la longueur de K'_j , par $\nu_{K'_j}$ la normale unitaire à K'_j dans le plan de K , par $\mathbf{r}(x)$ le rayon vecteur du point x , vecteur d'origine 0 et d'extrémité x , et par \mathbf{r}_j les rayons vecteur respectif des sommets de K . La fonction vectorielle suivante (voir figure 5.2)

$$\mathbf{B}_{j,K}(x) = \frac{1}{2|K|} (\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_{j-1}) \text{ pour } x \in K$$

est appelée parfois la fonction de base de Rao. Ses propriétés, établies dans la proposition suivante, sont à la base de son utilisation pour décrire les fonctions de base relative à l'espace d'approximation par éléments finis de $H_{\text{div}}(\Gamma)$.

PROPOSITION 5.2. *En adoptant une notation par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3 (par exemple, pour $j = 2$, $j + 1 = 3$ et $j + 2 = 1$), on a*

$$(5.7) \quad \mathbf{B}_{j,K}(x) \cdot \nu_{K'_j} = \frac{1}{|K'_j|}, \quad \forall x \in K'_j$$

et

$$(5.8) \quad \mathbf{B}_{j,K}(x) \cdot \nu_{K'_{j+1}} = 0, \quad \forall x \in K'_{j+1} \text{ et } \mathbf{B}_{j,K}(x) \cdot \nu_{K'_{j+2}} = 0, \quad \forall x \in K'_{j+2}$$

DÉMONSTRATION. Les propriétés (5.8) sont immédiates car $\mathbf{B}_{j,K}(x)$ est respectivement colinéaire à l'arête K'_{j+1} pour $x \in K'_{j+1}$ et à l'arête K'_{j+2} pour $x \in K'_{j+2}$. Notons

par h_j la hauteur relative à l'arête K'_j . L'équation de la droite D_j supportant l'arête K'_j peut s'écrire

$$(5.9) \quad (\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_{j-1}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{K'_j} = h_j \text{ si et seulement si } x \in D_j.$$

La propriété (5.7) suit directement de la formule donnant l'aire d'un triangle $2|K| = h_j |K'_j|$. \square

On peut alors considérer le sous-espace suivant X^h de $H_{\text{div}}(\Gamma)$ formé des \mathbf{J} dans $H_{\text{div}}(\Gamma)$ tels que

$$(5.10) \quad \mathbf{J}|_K = J_{1,K} \mathbf{B}_{1,K} + J_{2,K} \mathbf{B}_{2,K} + J_{3,K} \mathbf{B}_{3,K}$$

Pour $\mathbf{J} \in X^h$, les composantes locales $J_{\ell,K}$ sont simplement les flux sortant de K à travers chaque arête

$$(5.11) \quad J_{\ell,K} = \int_{K'_\ell} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nu}_{K'_\ell} ds$$

Numérotions les arêtes du maillage de 1 à N où N , et fixons une orientation sur chaque arête de sorte à distinguer chaque paire de triangles limités par une arête $K' \equiv L'$ comme un triangle $K^+ = K$ et un triangle $K^- = L$. De cette façon le flux sortant de K^+ à travers l'arête est compté positivement (et celui rentrant dans le triangle K^- est compté positivement aussi). On peut alors repérer chaque \mathbf{J} à l'aide de ses degrés de liberté globaux qu'on organise en un vecteur colonne $[J]$ de longueur N

$$(5.12) \quad [J] = \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_N \end{bmatrix}$$

de sorte que les degrés de liberté globaux $n_{\ell,K}$ et locaux ℓ soient reliés par

$$(5.13) \quad J_{n_{\ell,K}} = \begin{cases} J_{\ell,K}, & \text{si } K = K^+ \\ -J_{\ell,K} & \text{si } K = K^- \end{cases}$$

où nous avons supprimé la référence à l'arête $K'_{n_{\ell,K}}$ dans la notation de K^+ et K^- pour alléger l'écriture.

On doit disposer ainsi d'une table de connectivité des arêtes

$$(5.14) \quad n_{\ell,K} \text{ pour } \ell = 1, 2, 3 \text{ et pour tout } K \in \Gamma$$

qui donne le numéro de l'arête ℓ du triangle K et d'une table de valeurs $\varepsilon_{\ell,K}$, de même longueur, précisant si le triangle K par rapport à l'arête est en position K^+ ou K^- . Ces deux tables permettent d'écrire la relation suivante entre les degrés de liberté globaux et locaux

$$(5.15) \quad J_{n_{\ell,K}} = \varepsilon_{\ell,K} J_{\ell,K}$$

Souvent, on utilise une table de connectivité dite renseignée, permettant de grouper ces deux informations dans un seul tableau $n_{\ell,K}$ en convenant que $n_{\ell,K}$ est un tableau d'entiers avec un signe et que $|n_{\ell,K}|$ donne la table de connectivité des arêtes et le signe de $n_{\ell,K}$ fournit $\varepsilon_{\ell,K}$.

On peut alors discrétiser par cette méthode d'éléments finis, qui s'appelle alors méthode des éléments de frontière, ou BEM pour boundary Element Method suivant la terminologie en langue anglaise, par exemple la EFIE

$$(5.16) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{J} \in X^h, \forall \mathbf{J}' \in X^h, \\ \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \left(-\frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}'(x) + \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{J}'(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x) = -\frac{1}{ikZ} \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' d\Gamma \end{cases}$$

De façon usuelle, cette équation variationnelle se ramène à un système linéaire

$$(5.17) \quad [Z] [J] = [U]$$

2. Eléments sur la mise en oeuvre numérique

2.1. Eléments sur l'assemblage. L'assemblage du second membre se fait comme pour les méthodes d'éléments finis usuelles en faisant attention à la relation (5.15) entre les degrés de liberté locaux et globaux.

L'assemblage de la matrice des coefficients du système est différente. On a maintenant une matrice élémentaire pour chaque couple de triangle K et L

$$(5.18) \quad \begin{bmatrix} J'_{1,K} & J'_{2,K} & J_{3,K} \end{bmatrix} [Z^{[K,L]}] \begin{bmatrix} J_{1,L} \\ J_{2,L} \\ J_{3,L} \end{bmatrix} = \int_K \int_L G(x, y) \left(-\frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}'(x) + \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{J}'(x) \right) d\Gamma_y d\Gamma_x$$

En effet, l'intégrale double sur $\Gamma \times \Gamma$ se décompose de la façon suivante

$$(5.19) \quad \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \left(-\frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}'(x) + \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{J}'(x) \right) d\Gamma_y d\Gamma_x = \sum_{K \in \Gamma} \sum_{L \in \Gamma} \int_K \int_L G(x, y) \left(-\frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}'(x) + \mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{J}'(x) \right) d\Gamma_y d\Gamma_x$$

Il est facile de voir alors que tous les degrés de liberté sont couplés entraînant ainsi que la matrice $[Z]$ est une matrice dense. C'est le prix à payer pour réduire le maillage à un maillage juste de surface. On doit donc faire deux boucles imbriquées, chacune sur les éléments du maillage. Pour chaque couple K et L de triangles de Γ , on calcule la matrice élémentaire et on l'exprime ensuite à l'aide des degrés de liberté globaux grâce à la relation

$$(5.20) \quad \begin{bmatrix} J_{1,L} \\ J_{2,L} \\ J_{3,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,L} & & \\ & \varepsilon_{2,L} & \\ & & \varepsilon_{3,L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{|n_{1,L}|} \\ J_{|n_{2,L}|} \\ J_{|n_{3,L}|} \end{bmatrix}$$

avant de l'assembler dans la matrice totale $[Z]$.

2.2. Calcul des matrices élémentaires. Examinons d'abord comment on peut calculer les matrices élémentaires nécessaires à l'assemblage du second membre. Le calcul de la fonction de radiation $\mathcal{F}(\mathbf{J})$, une fois le système (5.17) résolu peut se faire selon le

même principe. La matrice élémentaire relative à l'assemblage du second membre est donc définie par

$$(5.21) \quad \begin{bmatrix} J'_{1,K} & J'_{2,K} & J'_{3,K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,K} \\ U_{2,K} \\ U_{3,K} \end{bmatrix} = - \int_K \mathbf{E}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{J}'(x) dK(x)$$

où $\mathbf{E}^{\text{inc}}(x)$ est donnée par une expression analytique comme, par exemple, l'expression (2.13) relative à une onde plane donnée au chapitre 2. En exprimant $\mathbf{J}'(x)$ à l'aide des fonctions de base, on se ramène donc à calculer

$$(5.22) \quad U_{j,K} = - \int_K \mathbf{E}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{B}_{j,K}(x) dK_x$$

On approche cette intégrale par une intégration gaussienne avec points intérieurs

$$(5.23) \quad \int_K \varphi(x) dK(x) \approx |K| \sum_{s=1}^{N_G} \omega_s \varphi(x_s)$$

où

$$(5.24) \quad x_s = \xi_{1,s} a_1^K + \xi_{2,s} a_2^K + \xi_{3,s} a_3^K$$

avec $(\xi_{1,s}, \xi_{2,s}, \xi_{3,s} = 1 - \xi_{1,s} - \xi_{2,s})$ les coordonnées barycentriques de x_s et a_1^K , a_2^K et a_3^K les sommets de K .

Le tableau suivant indique les formules les plus utilisées avec leur ordre (degré du polynôme intégré exactement)

Ordre	N_G	Poids	Coordonnées barycentriques
1	1	1	$\xi_{1,s} = 1/3, \xi_{2,s} = 1/3, \xi_{3,s} = 1/3$
2	3	1/3	$\xi_{j,s} = 2/3, \xi_{j+1,s} = 1/6, \xi_{j+2,s} = 1/6$
5	7	9/80 $A = \frac{155+\sqrt{15}}{2400}$ $B = \frac{31}{240} - A$	$\xi_{1,s} = 1/3, \xi_{2,s} = 1/3, \xi_{3,s} = 1/3$ $\xi_{j,s} = a, \xi_{j+1,s} = a, \xi_{j+2,s} = 1 - 2a, a = \frac{6+\sqrt{15}}{21}$ $\xi_{j,s} = b, \xi_{j+1,s} = b, \xi_{j+2,s} = 1 - 2b, b = \frac{4}{7} - a$

On a adopté une notation par permutation circulaire : pour la formule d'ordre 2, par exemple, on a 3 poids tous égaux à 1/3 et trois systèmes de coordonnées barycentriques $(2/3, 1/6, 1/6)$, $(1/6, 2/3, 1/6)$ et $(1/6, 1/6, 2/3)$.

Pour le calcul de la matrice élémentaire relative à la matrice du système, on décompose l'intégrale en deux intégrales successives

$$(5.25) \quad \int_K \int_L \{\dots\} dL_y dK_x = \int_K F^L(x) d(x)$$

avec

$$(5.26) \quad F^L(x) = \int_L \{\dots\} dL_y$$

L'intégrale externe (5.25) est généralement évaluée numériquement. L'intégrale interne est évaluée numériquement si K et L sont distants, i.e. n'ont aucun sommet commun. Elle est évaluée semi-numériquement sinon car alors le noyau comporte une singularité

qui ne peut pas être intégrée numériquement. La procédure d'intégration semi-numérique consiste à décomposer le noyau

$$(5.27) \quad G(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|} + \frac{e^{ik|x-y|} - 1}{4\pi |x - y|}$$

La partie régulière est approchée par un développement de Taylor car x et y sont proches

$$(5.28) \quad \frac{e^{ik|x-y|} - 1}{4\pi |x - y|} \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^M \frac{(ik |x - y|)^{m-1}}{m!}$$

La partie singulière est calculée de façon exacte à l'aide d'une expression analytique.

Couplage éléments finis-équations intégrales

Dans ce chapitre nous considérons le cas où l'obstacle est constitué d'un corps conducteur parfait recouvert d'un diélectrique non homogène. Le problème ne peut pas alors être résolu en utilisant uniquement une formulation par équations intégrales car cette dernière ne peut pas être appliquée lorsque les équations sont à coefficients variables comme celles qui caractérisent ici le fait que le diélectrique est non homogène. Après avoir établi une formulation variationnelle permettant une résolution par éléments finis dans la zone occupée par le diélectrique non homogène et par équation intégrale à l'extérieur de l'obstacle, nous décrivons la discrétisation effective du problème obtenu.

1. Le problème de diffraction

1.1. Le problème aux limites. Nous reprenons les notations du chapitre 3 où la surface fermée Σ entoure le domaine borné D^- et le sépare du domaine non borné D^+ . Le corps métallique, qu'on suppose être un conducteur parfait, est entouré par une surface fermée Γ contenue dans D^- . Le domaine Ω , limité par Γ et Σ , décrit la zone remplie de diélectrique dont la permittivité électrique et la perméabilité magnétique relative sont données respectivement par les fonctions dans $L^\infty(\Omega)$: ε et μ vérifiant donc

$$(6.1) \quad \Re\varepsilon, \Re\mu \geq 1 \text{ et } \Im\varepsilon, \Im\mu \geq 0 \text{ p. p. dans } \Omega.$$

On prolonge ε et μ par 1 dans D^+ pour décrire par un seul ensemble d'équations aux dérivées partielles le problème vérifié par le champ total \mathbf{E} et \mathbf{H} dans $\Omega \cup D^+$. Si \mathbf{E}^{inc} et \mathbf{H}^{inc} sont respectivement le champ électrique et magnétique relatifs à une onde plane incidente à l'obstacle constitué du métal parfaitement conducteur recouvert de la couche diélectrique ci-dessus, le problème aux limites vérifié par le champ total est le suivant :

$$(6.2) \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ikZ\mu\mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + ikZ^{-1}\varepsilon\mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega \cup D^+ \\ \mathbf{E}_T = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \mathbf{E}_T^\Omega = \mathbf{E}_T^+ \text{ et } \mathbf{H}_T^\Omega = \mathbf{H}_T^+ \text{ sur } \Sigma \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| (Z(\mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \times x/|x| - (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}})) = 0 \end{cases}$$

De façon analogue aux chapitres précédents, nous avons noté par \mathbf{E}_T^+ et \mathbf{H}_T^+ les traces du champ électromagnétique à partir des valeurs qu'il prend dans D^+ et par \mathbf{E}_T^Ω et \mathbf{H}_T^Ω celles obtenues à partir de Ω .

1.2. Formulation variationnelle. Considérons un champ test \mathbf{E}' défini et régulier dans $\bar{\Omega}$ destiné ainsi à fournir une équation variationnelle dont l'inconnue principale est \mathbf{E} et un couplage avec d'autres inconnues qui seront précisées dans la suite. En prenant

le produit scalaire de \mathbf{E}' avec le premier membre de l'équation d'Ampère-Maxwell et en intégrant dans Ω , il vient

$$(6.3) \quad \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}' dx + ikZ^{-1} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' dx = 0.$$

La formule de Green donne alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}' dx &= \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}' - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}') dx \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}' dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{E}' dx + \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}' dx \\ &= \int_{\Gamma \cup \Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{E}' dS + \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}' dx \end{aligned}$$

où \mathbf{n} est la normale sur Γ et Σ orientée vers l'extérieur de Ω . Sachant que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{E}' = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}'_{\text{T}}$ et en imposant à \mathbf{E}' de vérifier la condition de type Dirichlet vérifiée par \mathbf{E} sur Γ

$$(6.4) \quad \mathbf{E}'_{\text{T}} = 0 \text{ sur } \Gamma$$

la relation (6.3) s'écrit alors

$$(6.5) \quad \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}' dx + ikZ^{-1} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' dx + \int_{\Sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\Omega} \cdot \mathbf{E}' dS = 0.$$

On utilise alors l'équation de Lenz-Faraday pour exprimer \mathbf{H} à l'aide de \mathbf{E} dans Ω et la condition de raccord des traces tangentielles sur Σ , $\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\Omega} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{+}$, pour obtenir l'équation qui va être résolue par éléments finis

$$(6.6) \quad \frac{1}{ikZ} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E}' dx + ikZ^{-1} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' dx + \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}' dS = 0.$$

Nous avons noté par

$$(6.7) \quad \mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{+}$$

le courant électrique équivalent sur Σ permettant avec le courant magnétique

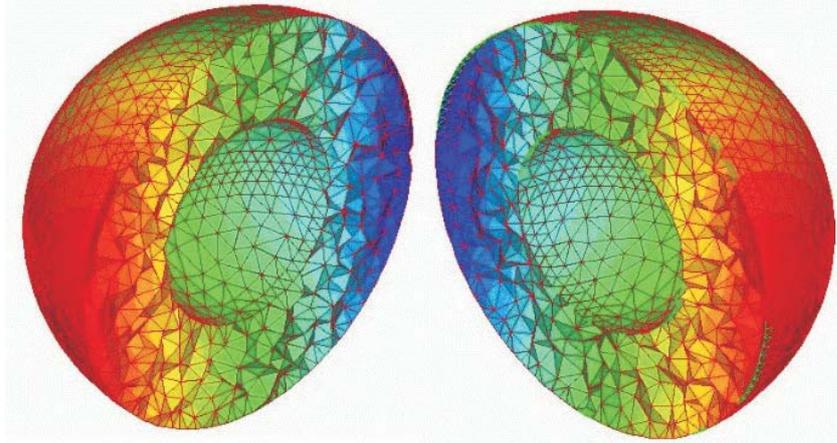
$$(6.8) \quad \mathbf{M} = \mathbf{E}^{+} \times \mathbf{n} = \mathbf{E}^{\Omega} \times \mathbf{n}$$

de reconstituer le champ électromagnétique dans D^{+} à l'aide de la formule de Stratton-Chu (voir chapitre 2). En utilisant l'équation EFIE comme équation sur \mathbf{J} couplée à l'inconnue \mathbf{E} dans Ω par (6.8), on obtient alors le système

$$(6.9) \quad \begin{cases} \frac{1}{ikZ} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E}' dx + ikZ^{-1} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' dx + \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}' dS = 0 \\ \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{E}_{\text{T}}^{\Omega} \cdot \mathbf{J}' dS + \int_{\Sigma} K (\mathbf{E}^{\Omega} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{J}' dS + \int_{\Sigma} T \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' dS = - \int_{\Sigma} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' dS \end{cases}$$

2. Le problème couplé éléments finis- équations intégrales

2.1. Éléments finis $H(\text{rot}, \Omega)$. On utilise un maillage \mathcal{T}_Ω^h en tétraèdres de Ω .



Vue éclatée du maillage en tétraèdres de la coque entre deux sphère

Ce maillage induit un maillage \mathcal{T}_Σ^h en triangles de Σ . On discrétise \mathbf{J} et \mathbf{J}' par la méthode d'éléments de surface donnée au chapitre précédent.

Pour discrétiser \mathbf{E} et \mathbf{E}' , on ne peut pas utiliser une méthode d'éléments finis \mathbb{P}_1 -continue comme pour la résolution d'un problème d'élasticité par exemple. Le procédé numérique résultant est généralement non convergent. Il faut utiliser la méthode d'élément fini de Nédélec suivante :

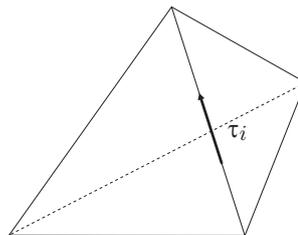
- **Élément géométrique** : tétraèdre T .
- **Fonctions de forme** : les vecteurs de la forme

$$(6.10) \quad \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2 x_3 - \beta_3 x_2 \\ \beta_3 x_1 - \beta_1 x_3 \\ \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1 \end{bmatrix}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ et β_3 six constantes complexes. C'est un espace vectoriel complexe de dimension 6.

- **Degrés de liberté** : les circulations le long des arêtes du tétraèdre. Le choix d'un vecteur unitaire $\boldsymbol{\tau}_i$ ($i = 1, \dots, 6$) sur chaque arête détermine le sens où cette circulation est comptée positivement

$$(6.11) \quad \ell_i(\mathbf{E}) = \int_{S_i} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}_i ds \quad (i = 1, \dots, 4)$$



Pour montrer que le système précédent est un élément fini, conforme pour l'opérateur "rotationnel", nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 6.1. *Soient D une droite de \mathbb{R}^3 de cosinus directeurs donnés par le vecteur unitaire $\boldsymbol{\tau}$ et un champ de vecteurs \mathbf{V} de la forme (6.10). Alors, $\mathbf{V}(x) \cdot \boldsymbol{\tau}$ est constant sur D .*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in D$ fixé. En utilisant les équations paramétriques de la droite D , on remarque d'abord que

$$x \in D \text{ si et seulement si } \mathbf{r}(x) = \mathbf{r}(a) + t\boldsymbol{\tau} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$x_i = a_i + t\tau_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(x) \cdot \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{r}(a) + t\boldsymbol{\tau})) \cdot \boldsymbol{\tau} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}(a) \cdot \boldsymbol{\tau} = \text{Cste} \end{aligned}$$

□

THÉORÈME 6.1. *Le triplet donné par un tétraèdre T , les fonctions de forme (6.10) et les degrés de liberté (6.11) est un élément fini. Il est conforme dans le sens suivant : si les degrés de liberté relatifs à une face sont nuls alors la trace tangentielle sur cette face est nulle.*

DÉMONSTRATION. Soit \mathbf{V} un champ de vecteurs de la forme (6.10) dont tous les degrés de liberté (6.11) sont nuls. Comme $\mathbf{V}(x) \cdot \boldsymbol{\tau}_i$ est constant sur chaque arête i du tétraèdre T , il s'ensuit que $\mathbf{V}(a_j) \cdot \boldsymbol{\tau}_i = 0$ pour tout sommet a_j et tout vecteur $\boldsymbol{\tau}_i$ colinéaire à une arête ayant pour sommet a_j . Ces $\boldsymbol{\tau}_i$ formant une famille libre de 3 vecteurs, il s'ensuit que $\mathbf{V}(a_j) = 0$. Chaque composante de \mathbf{V} étant un polynôme de degré ≤ 1 , il s'ensuit que $\mathbf{V} = 0$.

Notons par S_i, S_j et S_k les arêtes d'une face F de T , par \mathbf{n} la normale unitaire à F orientée vers l'extérieur de T et par \mathbf{r}_0 le centre de gravité de F . On écrit alors pour $x \in F$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{V}(x) &= \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}_0) + \mathbf{n} \times [\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_0)] \\ &= \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}_0) + (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_0)) \boldsymbol{\beta} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}_0) - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

Le champ de vecteurs sur F est donc dans l'espace engendré par les fonctions de base $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j, \mathbf{B}_k$ de l'espace de Raviart-Thomas introduit au chapitre précédent. Il en résulte que

$$\mathbf{n} \times \mathbf{V}(x) = \sum_{p=i,j,k} \left(\int_{S_p} \mathbf{n} \times \mathbf{V}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_p \, dS_p \right) \mathbf{B}_p(x)$$

où $\boldsymbol{\nu}_i, \boldsymbol{\nu}_j, \boldsymbol{\nu}_k$ sont les normales respectives aux arêtes S_i, S_j et S_k dans le plan de F et orientées vers l'extérieur de F . On a sur l'arête S_p ($p = i, j, k$)

$$\mathbf{n} \times \mathbf{V}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_p = \boldsymbol{\nu}_p \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}(x) = \varepsilon_p \boldsymbol{\tau}_p \cdot \mathbf{V}(x) \text{ pour } x \in S_p$$

avec $\varepsilon_p = \pm 1$. Il s'ensuit que

$$(6.12) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{V}(x) = \sum_{p=i,j,k} \varepsilon_p \ell_p(\mathbf{V}) \mathbf{B}_p(x)$$

Si donc $\ell_i(\mathbf{V}) = \ell_j(\mathbf{V}) = \ell_k(\mathbf{V}) = 0$, on obtient que $\mathbf{n} \times \mathbf{V}(x)$ pour tout $x \in F$. \square

REMARQUE 6.1. *La formule (6.12) montre comment les degrés de liberté de $\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ sur Σ s'obtiennent à partir de ceux de \mathbf{E} .*

2.2. Le système linéaire à résoudre. On discrétise \mathbf{E} et \mathbf{E}' dans Ω par la méthode d'éléments finis $H(\text{rot}, \Omega)$ précédente en identifiant les degrés de liberté relatifs à une même arête. Il faut faire attention au fait que cette identification nécessite de fixer un sens sur l'arête. La condition de conducteur parfait se traduit simplement par le fait que les degrés de liberté relatifs à une arête sur Γ sont fixés à 0. On ordonne les degrés de liberté qui restent en un vecteur $[E_I]$ relatif aux arêtes qui ne sont pas sur Σ et un vecteur $[E_\Sigma]$ relatifs aux arêtes sur Σ . Après élimination des lignes et des colonnes correspondant aux degrés de liberté fixés à zéro, on écrit de façon matricielle la forme bilinéaire

$$\frac{1}{ikZ} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E}' dx + ikZ^{-1} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' dx = \begin{bmatrix} [E_I]^\top & [E_\Sigma]^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_{II}] & [A_{I\Sigma}] \\ [A_{\Sigma I}] & [A_{\Sigma\Sigma}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_I] \\ [E_\Sigma] \end{bmatrix}$$

On note de même

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}' dS &= [E_\Sigma]^\top [M_\Sigma] [J] \\ \int_{\Sigma} K (\mathbf{E}^\Omega \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{J}' dS &= [J]^\top [K] [E_\Sigma] \\ \int_{\Sigma} T \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}' dS &= [J]^\top [T] [J] \\ \int_{\Sigma} \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}' dS &= [J]^\top [E^{\text{inc}}] \end{aligned}$$

Le système à résoudre est donc

$$\begin{bmatrix} [A_{II}] & [A_{I\Sigma}] & 0 \\ [A_{\Sigma I}] & [A_{\Sigma\Sigma}] & [M_\Sigma] \\ 0 & \frac{1}{2} [M_\Sigma]^\top + [K] & [T] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_I] \\ [E_\Sigma] \\ [J] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -[E^{\text{inc}}] \end{bmatrix}$$

La caractéristique principale de ce système tient au fait qu'il contient des blocs creux $[A_{II}]$, $[A_{I\Sigma}]$, $[A_{\Sigma I}]$, $[A_{\Sigma\Sigma}]$ et $[M_\Sigma]$ couplés à des blocs pleins $\frac{1}{2} [M_\Sigma]^\top + [K]$ et $[T]$. Ceci engendre de sérieuses difficultés lorsqu'on veut utiliser une plateforme multi-processeurs pour faire une résolution par calculs parallèle. Une des façons de procéder est d'utiliser la librairie MUMPS pour éliminer $[E_I]$ à l'aide d'un complément de Schur (élimination de Gauss par bloc) et de faire la résolution du système plein relatifs aux degrés de liberté sur Σ : $[E_\Sigma]$ et $[J]$ à l'aide de la librairie LAPACK.