# SEME 2012, Toulouse

## Optimisation robuste
## de la forme de la voilure d'un avion

*Sujet proposé par Matthieu Meaux (EADS IW)*

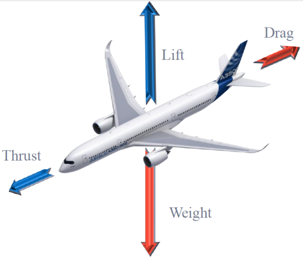
Vincent Baudoui, Thomas Boulier, Sébastien Court,
Léonard Monsaingeon, Riadh Omheni

8 juin 2012

1. Problématique
2. Problème déterministe
   - Méthode de pénalisation
   - Méthode primale-duale
   - Méthode de découplage : LSQMP
   - Méthode de résolution séquentielle : DDE
3. Problème stochastique
   - Méthode de Monte-Carlo
   - Méthode des marges
   - Méthode de linéarisation
4. Bilan

# Motivation

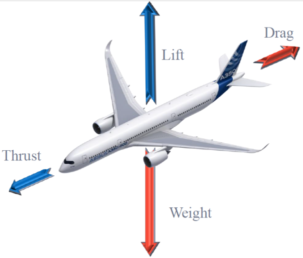
- Optimisation de la forme de la voilure d'un avion




- Basée sur des simulations numériques (2h à 72h de calcul par évaluation de fonction) : le nombre d'évalutions doit être limité !
- Problème multidisciplinaire (couplage aérodynamique/structure par exemple)
- Paramètres incertains (incertitudes de fabrication)

# Motivation

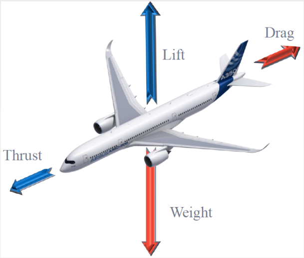
- Optimisation de la forme de la voilure d'un avion




- Basée sur des simulations numériques (2h à 72h de calcul par évaluation de fonction) : le nombre d'évalutions doit être limité !
- Problème multidisciplinaire (couplage aérodynamique/structure par exemple)
- Paramètres incertains (incertitudes de fabrication)

# Motivation

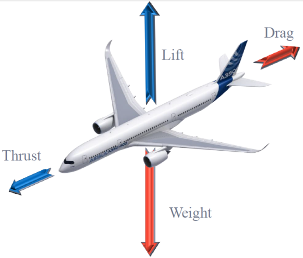
- Optimisation de la forme de la voilure d'un avion




- Basée sur des simulations numériques (2h à 72h de calcul par évaluation de fonction) : le nombre d'évalutions doit être limité !
- Problème multidisciplinaire (couplage aérodynamique/structure par exemple)
- Paramètres incertains (incertitudes de fabrication)

# Motivation

- Optimisation de la forme de la voilure d'un avion




- Basée sur des simulations numériques (2h à 72h de calcul par évaluation de fonction) : le nombre d'évalutions doit être limité !
- Problème multidisciplinaire (couplage aérodynamique/structure par exemple)
- Paramètres incertains (incertitudes de fabrication)

# Le problème support

Minimiser par rapport à $(x_1, z_1, z_2)$ :

$$F = x_1^2 + z_2 + y_1 + e^{-y_2}$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{y_1}{3.16} - 1 & \geq & 0 \\ 1 - \dfrac{y_2}{24} & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x_1 & \leq & 10 \\ -10 & \leq & z_1 & \leq & 10 \\ 0 & \leq & z_2 & \leq & 10 \end{array}$$

Équations de couplage :

- Discipline 1 : $\mathbf{y}_1(x_1, z_1, z_2, y_2) = z_1^2 + x_1 + z_2 - 0,2y_2$
- Discipline 2 : $\mathbf{y}_2(z_1, z_2, y_1) = \sqrt{y_1} + z_1 + z_2$

# Le problème support

Minimiser par rapport à $(x_1, z_1, z_2)$ :

$$F = x_1^2 + z_2 + y_1 + e^{-y_2}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{3.16} - 1 &\geq 0 \\ 1 - \frac{y_2}{24} &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 \leq\ & x_1 \leq 10 \\ -10 \leq\ & z_1 \leq 10 \\ 0 \leq\ & z_2 \leq 10 \end{aligned}$$

Équations de couplage :

- Discipline 1 : $\mathbf{y}_1(x_1, z_1, z_2, y_2) = z_1^2 + x_1 + z_2 - 0,2y_2$
- Discipline 2 : $\mathbf{y}_2(z_1, z_2, y_1) = \sqrt{y_1} + z_1 + z_2$

# Le problème support

Minimiser par rapport à $(x_1, z_1, z_2)$ :

$$F = x_1^2 + z_2 + y_1 + e^{-y_2}$$

sous les contraintes :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{y_1}{3.16} - 1 & \geq & 0 \\ 1 - \dfrac{y_2}{24} & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x_1 & \leq & 10 \\ -10 & \leq & z_1 & \leq & 10 \\ 0 & \leq & z_2 & \leq & 10 \end{array}$$

Équations de couplage :

- Discipline 1 : $\mathbf{y}_1(x_1, z_1, z_2, y_2) = z_1^2 + x_1 + z_2 - 0,2y_2$
- Discipline 2 : $\mathbf{y}_2(z_1, z_2, y_1) = \sqrt{y_1} + z_1 + z_2$

1. Problématique

2. Problème déterministe
   - Méthode de pénalisation
   - Méthode primale-duale
   - Méthode de découplage : LSQMP
   - Méthode de résolution séquentielle : DDE

3. Problème stochastique
   - Méthode de Monte-Carlo
   - Méthode des marges
   - Méthode de linéarisation

4. Bilan

# Méthode de pénalisation

On minimise la fonctionnelle

$$J(x_1, z_1, z_2, y_1, y_2) = x_1^2 + z_2 + y_1 + e^{-y_2}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(x_1, z_1, z_2, y_2) \\ \mathbf{y}_2(z_1, z_2, y_1) \end{pmatrix}\right\|^2$$

avec $\varepsilon$ petit, par exemple $\varepsilon = 10^{-4}$.
0n choisit $(1, 5, 2, 10, 4)$ comme donnée initiale.
$\Rightarrow$ minimum $F = 3.1834$, atteint pour

$$\begin{aligned} (x_1, z_1, z_2) &= (0, 1.9776, 0) \\ (y_1, y_2) &= (3.16, 3.7553) \end{aligned}$$

- méthode de résolution : SQP
- nombre d'évaluations de la fonction : 361

# Méthode de pénalisation

On minimise la fonctionnelle

$$J(x_1, z_1, z_2, y_1, y_2) = x_1^2 + z_2 + y_1 + e^{-y_2}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(x_1, z_1, z_2, y_2) \\ \mathbf{y}_2(z_1, z_2, y_1) \end{pmatrix} \right\|^2$$

avec $\varepsilon$ petit, par exemple $\varepsilon = 10^{-4}$.

0n choisit $(1, 5, 2, 10, 4)$ comme donnée initiale.

$\Rightarrow$ minimum $F = 3.1834$, atteint pour

$$\begin{aligned} (x_1, z_1, z_2) &= (0, 1.9776, 0) \\ (y_1, y_2) &= (3.16, 3.7553) \end{aligned}$$

- méthode de résolution : SQP
- nombre d'évaluations de la fonction : 361

# Méthode de pénalisation

On minimise la fonctionnelle

$$J(x_1, z_1, z_2, y_1, y_2) = x_1^2 + z_2 + y_1 + e^{-y_2}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(x_1, z_1, z_2, y_2) \\ \mathbf{y}_2(z_1, z_2, y_1) \end{pmatrix} \right\|^2$$

avec $\varepsilon$ petit, par exemple $\varepsilon = 10^{-4}$.
0n choisit $(1, 5, 2, 10, 4)$ comme donnée initiale.
$\Rightarrow$ minimum $F = 3.1834$, atteint pour

$$\begin{aligned} (x_1, z_1, z_2) &= (0, 1.9776, 0) \\ (y_1, y_2) &= (3.16, 3.7553) \end{aligned}$$

- méthode de résolution : SQP
- nombre d'évaluations de la fonction : 361

# Méthode primale-duale

Considérant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & g(x) = 0 \\ & \quad x \geq 0 \end{cases}$$

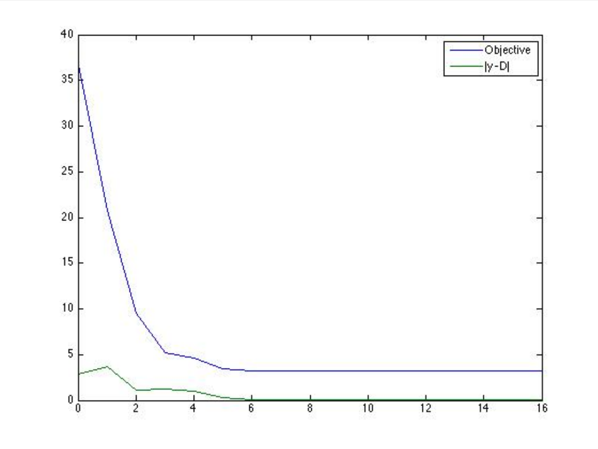
Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x) + \nabla g(x) y - z \\ g(x) \\ x \circ z - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ application de la méthode de Newton

# Méthode primale-duale

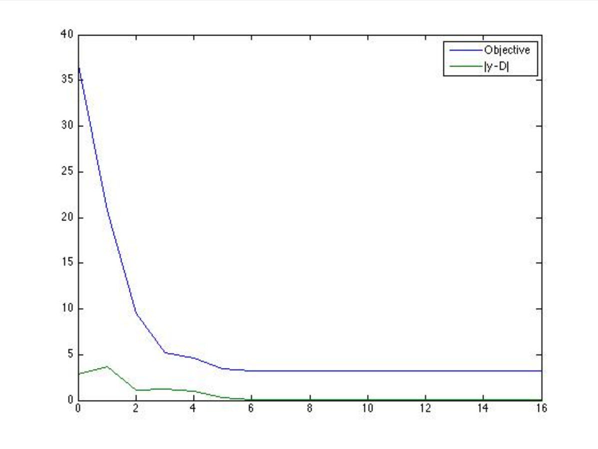
Evolution de $F$ et de l'écart aux contraintes de couplage au cours des itérations :




- Minimum : $F = 3.18339$
- Atteint après 17 évaluations de fonctions

# Méthode primale-duale

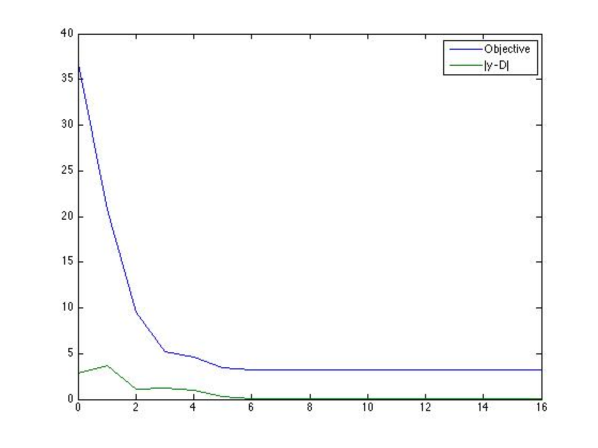
Evolution de $F$ et de l'écart aux contraintes de couplage au cours des itérations :




- Minimum : $F = 3.18339$
- Atteint après 17 évaluations de fonctions

# Méthode primale-duale

Evolution de $F$ et de l'écart aux contraintes de couplage au cours des itérations :




- Minimum : $F = 3.18339$
- Atteint après 17 évaluations de fonctions

# Principe de la méthode LSQMP

- On se donne $(x_1^0, z_1^0, z_2^0, y_1^0, y_2^0)$ arbitraire.
- On note $D^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(x_1^0, z_1^0, z_2^0, y_2^0) \\ \mathbf{y}_2(z_1^0, z_2^0, y_1^0) \end{pmatrix}$.
- On résout :

$$\inf_{x_1, z_1, z_2, y_1, y_2} F(x_1, z_1, z_2, y_1, y_2) + \frac{1}{\varepsilon} \|(y_1, y_2) - D^0\|^2$$

sans les contraintes d'égalité sur les disciplines, avec uniquement :

$$\begin{array}{rcl} \frac{y_1}{3.16} - 1 & \geq & 0 \\ 1 - \frac{y_2}{24} & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x_1 & \leq & 10 \\ -10 & \leq & z_1 & \leq & 10 \\ 0 & \leq & z_2 & \leq & 10 \end{array}$$

# Principe de la méthode LSQMP

- On se donne $(x_1^0, z_1^0, z_2^0, y_1^0, y_2^0)$ arbitraire.
- On note $D^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(x_1^0, z_1^0, z_2^0, y_2^0) \\ \mathbf{y}_2(z_1^0, z_2^0, y_1^0) \end{pmatrix}$.
- On résout :

$$\inf_{x_1, z_1, z_2, y_1, y_2} F(x_1, z_1, z_2, y_1, y_2) + \frac{1}{\varepsilon} \|(y_1, y_2) - D^0\|^2$$

sans les contraintes d'égalité sur les disciplines, avec uniquement :

$$\begin{array}{rcl} \frac{y_1}{3.16} - 1 & \geq & 0 \\ 1 - \frac{y_2}{24} & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x_1 & \leq & 10 \\ -10 & \leq & z_1 & \leq & 10 \\ 0 & \leq & z_2 & \leq & 10 \end{array}$$

# Principe de la méthode LSQMP

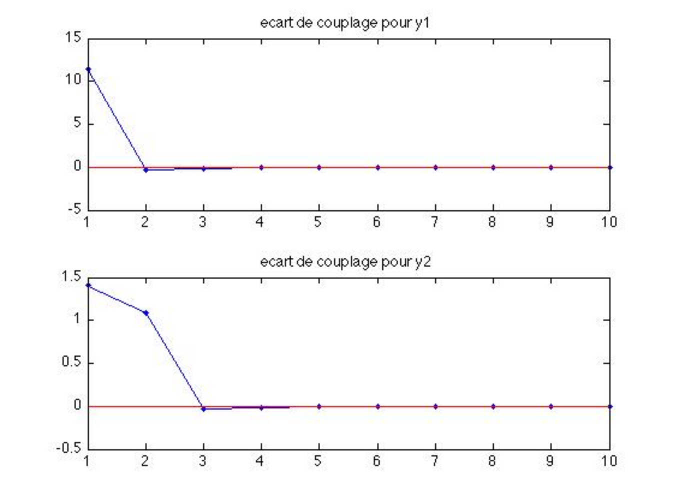
- On se donne $(x_1^0, z_1^0, z_2^0, y_1^0, y_2^0)$ arbitraire.
- On note $D^0 := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(x_1^0, z_1^0, z_2^0, y_2^0) \\ \mathbf{y}_2(z_1^0, z_2^0, y_1^0) \end{pmatrix}$.
- On résout :

$$\inf_{x_1, z_1, z_2, y_1, y_2} F(x_1, z_1, z_2, y_1, y_2) + \frac{1}{\varepsilon} \|(y_1, y_2) - D^0\|^2$$

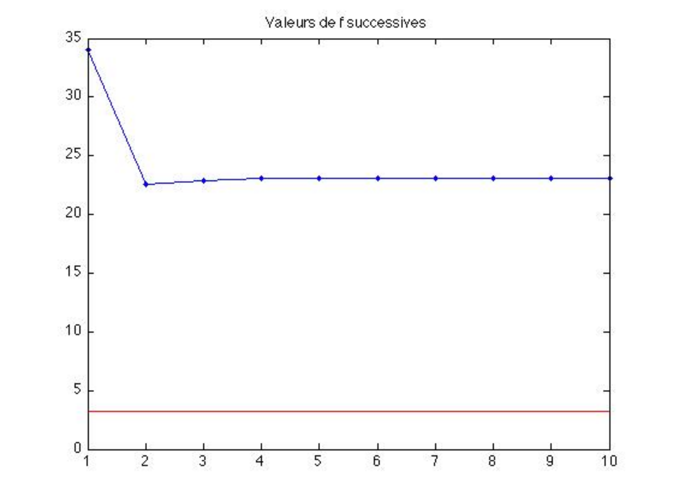
sans les contraintes d'égalité sur les disciplines, avec uniquement :

$$\begin{array}{rcl} \frac{y_1}{3.16} - 1 & \geq & 0 \\ 1 - \frac{y_2}{24} & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} 0 & \leq & x_1 & \leq & 10 \\ -10 & \leq & z_1 & \leq & 10 \\ 0 & \leq & z_2 & \leq & 10 \end{array}$$

# Contraintes vérifiées



# Pas de convergence vers le minimum



# Méthode de résolution séquentielle : DDE

Idée de la méthode :

- On fixe la première discipline $y_1$.
- À $y_1$ fixé, on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_2)$.
- On conserve $y_2$ ainsi obtenu,
- et on procède de même à $y_2$ fixé : on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_1)$.
- Et on itère...

# Méthode de résolution séquentielle : DDE

Idée de la méthode :

- On fixe la première discipline $y_1$.
- À $y_1$ fixé, on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_2)$.
- On conserve $y_2$ ainsi obtenu,
- et on procède de même à $y_2$ fixé : on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_1)$.
- Et on itère...

# Méthode de résolution séquentielle : DDE

Idée de la méthode :

- On fixe la première discipline $y_1$.
- À $y_1$ fixé, on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_2)$.
- On conserve $y_2$ ainsi obtenu,
- et on procède de même à $y_2$ fixé : on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_1)$.
- Et on itère...

# Méthode de résolution séquentielle : DDE

Idée de la méthode :

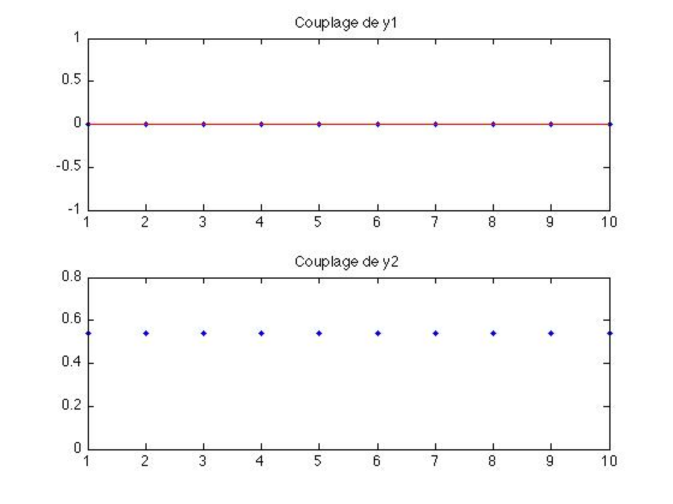
- On fixe la première discipline $y_1$.
- À $y_1$ fixé, on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_2)$.
- On conserve $y_2$ ainsi obtenu,
- et on procède de même à $y_2$ fixé : on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_1)$.
- Et on itère...

# Méthode de résolution séquentielle : DDE

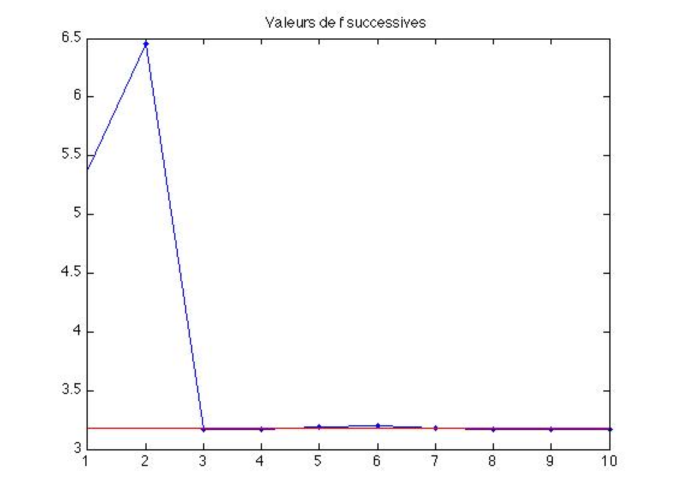
Idée de la méthode :

- On fixe la première discipline $y_1$.
- À $y_1$ fixé, on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_2)$.
- On conserve $y_2$ ainsi obtenu,
- et on procède de même à $y_2$ fixé : on résout le problème d'optimisation sous contraintes qui porte sur $(x_1, z_1, z_2, y_1)$.
- Et on itère...

# Contraintes vérifiées



# Convergence vers le minimum



1. Problématique
2. Problème déterministe
   - Méthode de pénalisation
   - Méthode primale-duale
   - Méthode de découplage : LSQMP
   - Méthode de résolution séquentielle : DDE
3. Problème stochastique
   - Méthode de Monte-Carlo
   - Méthode des marges
   - Méthode de linéarisation
4. Bilan

# Problème stochastique

- Incertitude sur $x_1$ : variable aléatoire $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\sigma = 1$
- Problème d'optimisation stochastique

Au point optimal trouvé précedemment, la première contrainte est violée dans 50% des cas lorsque $x_1$ varie

Problème d'optimisation robuste :

$$\min_{\mu, z_1, z_2} \mathrm{E}[F] \quad s.c. \begin{cases} P\left(G_1 = \dfrac{Y_1}{3.16} - 1 \geq 0\right) \geq 90\% \\ P\left(G_2 = 1 - \dfrac{Y_2}{24} \geq 0\right) \geq 90\% \end{cases}$$

# Problème stochastique

- Incertitude sur $x_1$ : variable aléatoire $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\sigma = 1$
- Problème d'optimisation stochastique

Au point optimal trouvé précedemment, la première contrainte est violée dans 50% des cas lorsque $x_1$ varie

Problème d'optimisation robuste :

$$\min_{\mu, z_1, z_2} \mathrm{E}[F] \quad s.c. \begin{cases} P\left(G_1 = \dfrac{Y_1}{3.16} - 1 \geq 0\right) \geq 90\% \\ P\left(G_2 = 1 - \dfrac{Y_2}{24} \geq 0\right) \geq 90\% \end{cases}$$

# Méthode de Monte-Carlo

Évaluation de l'incertitude sur $F$ et les contraintes par Monte-Carlo :

- échantillonnage selon la loi de $X_1$
- résolution des équations de couplage pour chaque $x_1$
- calcul de $\mathrm{E}[F]$ et de $P$ avec les échantillons obtenus

Pas de méthode de descente car bruit de Monte-Carlo : algorithme génétique (par exemple)

Solution robuste obtenue :

$$\begin{aligned}
(\mu, z_1, z_2) &= (0.1187, 2.2670, 0.2911) \\
\mathrm{E}[F] &= 5.9096 \\
P\left(G_1 \geq 0\right) &= 94.6\% \\
P\left(G_2 \geq 0\right) &= 99.9\%
\end{aligned}$$

Méthode très coûteuse (plus de 100000 évaluations)

# Méthode des marges

Pour éviter que les contraintes ne soient violées lorsque $x_1$ varie, on ajoute une marge de sécurité $\alpha$

$$\min_{x,z_1,z_2} F \quad s.c. \begin{cases} g_1 = \dfrac{y_1}{3.16} - 1 \geq \alpha \\ g_2 = 1 - \dfrac{y_2}{24} \geq \alpha \end{cases}$$

Solution robuste obtenue pour $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} (x, z_1, z_2) &= (0, 2.2396, 0) \\ \mathrm{E}[F] &= 5.2686 \\ P(G_1 \geq 0) &= 85.8\% \\ P(G_2 \geq 0) &= 99.9\% \end{aligned}$$

Résolution déterministe classique
Marge $\alpha$ fixée a priori

# Méthode de linéarisation

Approximation linéaire de $Y$ par rapport à $X_1$ :
$Y \simeq \mathbf{y}(X_1) + \mathrm{d}\mathbf{y}(X_1)\mathrm{d}X_1$
$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\sigma$ “petit” $\Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}(\mu), \sigma \mathrm{d}\mathbf{y}(X_1))$

$\rightarrow$ calcul analytique de la probabilité de satisfaction des contraintes connaissant $\mathrm{d}\mathbf{y}(X_1)$

De même pour l'objectif : $\mathrm{E}[F(X)] = F(\mu)$

Solution robuste obtenue :

$$\begin{aligned} (x, z_1, z_2) &= (0, 2.3008, 0) \\ \mathrm{E}[F] &= 5.4547 \\ P(G_1 \geq 0) &= 88.6\% \\ P(G_2 \geq 0) &= 99.9\% \end{aligned}$$

Évaluation de la robustesse sans échantillonnage
Résultats approchés selon la linéarité de $F$ et $Y$

1. Problématique
2. Problème déterministe
   - Méthode de pénalisation
   - Méthode primale-duale
   - Méthode de découplage : LSQMP
   - Méthode de résolution séquentielle : DDE
3. Problème stochastique
   - Méthode de Monte-Carlo
   - Méthode des marges
   - Méthode de linéarisation
4. Bilan

# Bilan

## Pour le déterministe

- différentielles) donc très long, mais bonne convergence.
- Deux méthodes "originales"
  - disciplines) mais manque de stabilité (comportement variable en fonction des choix des paramètres) : pour l'instant mal comprise, mais prometteuse.
  - (DDE) traite chaque discipline séparément. Malgré tout la méthode est différentielle donc coûteuse en évaluations.

# Bilan

Pour le déterministe

- Méthodes classiques : coûteuses en évaluation des fonctions disciplines (descente gradient, méthodes différentielles) donc très long, mais bonne convergence.
- Deux méthodes "originales"
  - (LSQMP) est très peu coûteuse en termes d'évaluations (non différentielle par rapport aux disciplines) mais manque de stabilité (comportement variable en fonction des choix des paramètres) ; pour l'instant mal comprise, mais prometteuse.
  - (DDE) traite chaque discipline séparément. Malgré tout la méthode est différentielle donc coûteuse en évaluations.

# Bilan

Pour le déterministe

- Méthodes classiques : coûteuses en évaluation des fonctions disciplines (descente gradient, méthodes différentielles) donc très long, mais bonne convergence.
- Deux méthodes "originales"
  - (LSQMP) est très peu coûteuse en termes d'évaluations (non différentielle par rapport aux disciplines) mais manque de stabilité (comportement variable en fonction des choix des paramètres) ; pour l'instant mal comprise, mais prometteuse.
  - (DDE) traite chaque discipline séparément. Malgré tout la méthode est différentielle donc coûteuse en évaluations.

# Bilan

Pour le déterministe

- Méthodes classiques : coûteuses en évaluation des fonctions disciplines (descente gradient, méthodes différentielles) donc très long, mais bonne convergence.
- Deux méthodes “originales”
  - (LSQMP) est très peu coûteuse en termes d’évaluations (non différentielle par rapport aux disciplines) mais manque de stabilité (comportement variable en fonction des choix des paramètres) ; pour l’instant mal comprise, mais prometteuse.
  - (DDE) traite chaque discipline séparément. Malgré tout la méthode est différentielle donc coûteuse en évaluations.

# Bilan

Pour le déterministe

- Méthodes classiques : coûteuses en évaluation des fonctions disciplines (descente gradient, méthodes différentielles) donc très long, mais bonne convergence.
- Deux méthodes "originales"
  - (LSQMP) est très peu coûteuse en termes d'évaluations (non différentielle par rapport aux disciplines) mais manque de stabilité (comportement variable en fonction des choix des paramètres) ; pour l'instant mal comprise, mais prometteuse.
  - (DDE) traite chaque discipline séparément. Malgré tout la méthode est différentielle donc coûteuse en évaluations.

# Bilan

## Pour le stochastique (optimisation robuste)

- [illegible] très coûteuses [illegible] Monte-Carlo).
- [illegible] marges [illegible] pour obtenir la robustesse. Assez efficace, quantitatif a posteriori (tatonnement).
- Méthode de linéarisation : optimisation robuste, quantitative a priori, traitement déterministe d'un problème stochastique. Pertinente uniquement pour incertitudes avec "faible" variance. Influence de la non-linéarité ? Lien avec les indices de Sobol ?

# Bilan

Pour le stochastique (optimisation robuste)

- Méthodes empiriques : très coûteuses en évaluation des fonctions disciplines (tirage statistique, Monte-Carlo).
- Méthode de marges « à l'ingénieur » : choix des marges arbitraire pour obtenir la robustesse. Assez efficace, quantitatif a posteriori (tatonnement).
- Méthode de linéarisation : optimisation robuste, quantitative a priori, traitement déterministe d'un problème stochastique. Pertinente uniquement pour incertitudes avec "faible" variance. Influence de la non-linéarité ? Lien avec les indices de Sobol ?

# Bilan

Pour le stochastique (optimisation robuste)

- Méthodes empiriques : très coûteuses en évaluation des fonctions disciplines (tirage statistique, Monte-Carlo).
- Méthode de marges « à l'ingénieur » : choix des marges arbitraire pour obtenir la robustesse. Assez efficace, quantitatif a posteriori (tatonnement).
- Méthode de linéarisation : optimisation robuste, quantitative a priori, traitement déterministe d'un problème stochastique. Pertinente uniquement pour incertitudes avec "faible" variance. Influence de la non-linéarité ? Lien avec les indices de Sobol ?

# Bilan

Pour le stochastique (optimisation robuste)

- Méthodes empiriques : très coûteuses en évaluation des fonctions disciplines (tirage statistique, Monte-Carlo).
- Méthode de marges « à l'ingénieur » : choix des marges arbitraire pour obtenir la robustesse. Assez efficace, quantitatif a posteriori (tatonnement).
- Méthode de linéarisation : optimisation robuste, quantitative a priori, traitement déterministe d'un problème stochastique. Pertinente uniquement pour incertitudes avec "faible" variance. Influence de la non-linéarité ? Lien avec les indices de Sobol ?