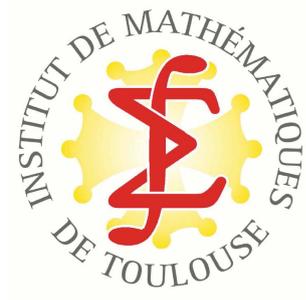


Université
de Toulouse



DERNIÈRE MISE À JOUR : 2015

ÉLÉMENTS D'ANALYSE ET D'OPTIMISATION CONVEXE.

Pierre WEISS

Table des matières

1	Introduction	5
2	Éléments d'analyse convexe	7
2.1	Définitions et propriétés géométriques élémentaires	7
2.2	Opérations sur les fonctions convexes	14
2.3	Continuité et différentiabilité	15
2.4	Théorèmes de séparation	17
2.5	Sous-différentiel	20
2.6	Règles de calcul sous-différentiel	22
2.7	Conjuguée convexe	25
2.8	Opérateurs proximaux	28
2.9	Éléments d'analyse pour l'algorithmie	29
2.9.1	Fonctions à gradient Lipschitz	30
2.9.2	Fonctions fortement convexes	31
2.9.3	Conditionnement d'une fonction	33
3	Théorie de la complexité	35
3.1	Formalisation du problème	35
3.2	Un exemple en optimisation non convexe	36
3.3	Complexité en optimisation convexe différentiable	38
3.4	Complexité en optimisation fortement convexe différentiable	41
3.5	Complexité en optimisation convexe non différentiable	42
4	Méthodes d'optimisation convexe de premier ordre	45
4.1	Méthodes optimales en optimisation convexe différentiable	45
4.1.1	Cas convexe différentiable	45
4.1.2	Cas fortement convexe différentiable	49
4.2	Méthodes optimales en optimisation convexe non différentiable	52
4.3	Les descentes de gradient proximales	54
4.3.1	Descente de gradient proximale	55
4.3.2	Descentes de gradient proximales accélérées	56
4.3.3	Exemples d'application	58
4.4	Dualité pour les problèmes fortement convexes	58

Chapitre 1

Introduction

Dans ce cours, nous nous intéressons essentiellement à la classe des fonctions convexes. Celles-ci apparaissent abondamment dans l'ingénierie et permettent de modéliser de nombreux phénomènes non linéaires (équations de la physique, traitement du signal, théorie des jeux et de l'économie, statistiques...). Elles ont des propriétés remarquables qui permettent d'analyser plus facilement leurs propriétés et aussi de les minimiser efficacement. De nombreux problèmes non convexes irrésolvables peuvent être approchés par des problèmes convexes qui eux sont presque systématiquement minimisés en des temps rapides.

Pour conclure ce cours, nous indiquons quelques références utiles pour aller plus loin. Les livres [3, 7] sont de très bonnes références pour découvrir les nombreux détails de l'analyse convexe en dimension finie. La référence [1] propose est une très bonne introduction à l'analyse convexe dans des espaces de Hilbert. Enfin, indiquons une référence dans les espaces de Banach [8]. Notons que cette référence apporte des informations intéressante même pour des questions d'analyse numérique en dimension finie. Au niveau algorithmique, ce cours est essentiellement inspiré des références [6, 5].

Note importante : ces notes ont été rédigées rapidement sans relecture approfondie. Tous les commentaires sont donc les bienvenus. De plus, la partie finale du cours (points intérieurs et algorithme du simplexe) n'apparaît pas encore ici par manque de temps.

Chapitre 2

Eléments d'analyse convexe

Dans ce chapitre, nous présentons quelques propriétés remarquables des fonctions convexes. Elle permettront de construire des algorithmes de minimisation dans la suite du cours.

Dans toutes ces notes, on se place sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. On le munit d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée au produit scalaire est notée $\|\cdot\|_2$. Elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

2.1 Définitions et propriétés géométriques élémentaires

Une différence importante par rapport aux chapitres précédents est qu'on autorise ici les fonctions à valoir $+\infty$ (mais pas $-\infty$). Ainsi les fonctions considérées dans ce chapitre seront de la forme :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Autoriser les fonctions à valoir $+\infty$ présente l'intérêt de pouvoir représenter les problèmes contraints sous une forme non contrainte. On a en effet :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \inf_{x \in \text{dom}(f)} f(x)$$

où $\text{dom}(f)$ est défini de la façon suivante :

Définition 2.1 (Domaine d'une fonction) *Le domaine d'une fonction f est noté $\text{dom}(f)$. Il est défini par*

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < +\infty\}.$$

Dans toute la suite de ce cours, on supposera (sans le préciser) que nos fonctions n'ont pas un domaine vide : $\text{dom}(f) \neq \emptyset$.

Définition 2.2 (Ensemble convexe) *Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble. Ce dernier est dit convexe si :*

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, \forall \alpha \in [0, 1], \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in X.$$

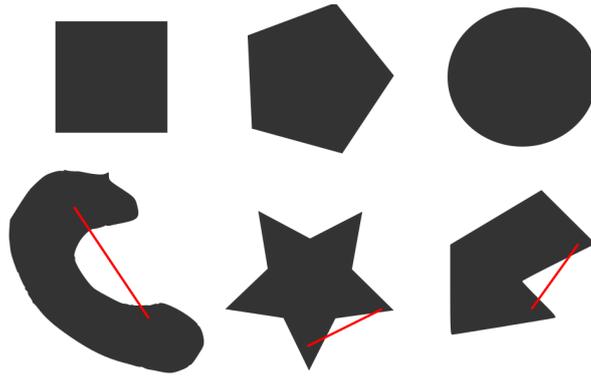


FIGURE 2.1 – En haut : quelques exemples d'ensembles convexes en 2 dimensions. En bas : quelques exemples d'ensembles non convexes (notez qu'il existe des segments dont les extrémités appartiennent à l'ensemble, qui ne sont pas entièrement contenus dans les ensembles).

La définition de la convexité reste identique pour les fonctions à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 2.3 (Fonction convexe) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. f est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in \text{dom}(f) \times \text{dom}(f), \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Cette définition est illustrée sur la figure 2.1. Elle implique que le domaine d'une fonction convexe est convexe (exercice).

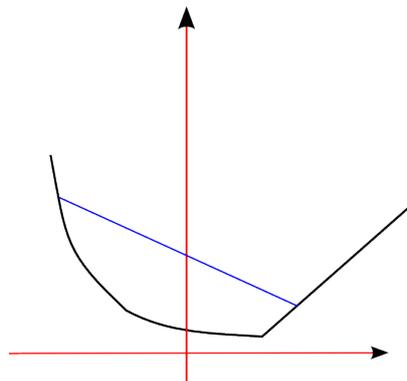


FIGURE 2.2 – Un exemple de fonction convexe. Un segment tracé entre deux points de son graphe reste au dessus du graphe. Notez qu'une fonction convexe peut ne pas être dérivable. On peut cependant montrer qu'elle est dérivable presque partout.

Définition 2.4 (Combinaison convexe) Soient x_1, \dots, x_m , m éléments de \mathbb{R}^n . On dit que x est combinaison convexe de ces points s'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tels que :

- $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \alpha_i \in \mathbb{R}_+$,
- $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$,
- $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$.

Définition 2.5 (Enveloppe convexe) Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble. On appelle enveloppe convexe de X et on note $\text{conv}(X)$ l'ensemble convexe le plus petit contenant X . En dimension finie, c'est aussi l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de X :

$$\text{conv}(X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ pouvant s'écrire } x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \text{ où } x_i \in X, p \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

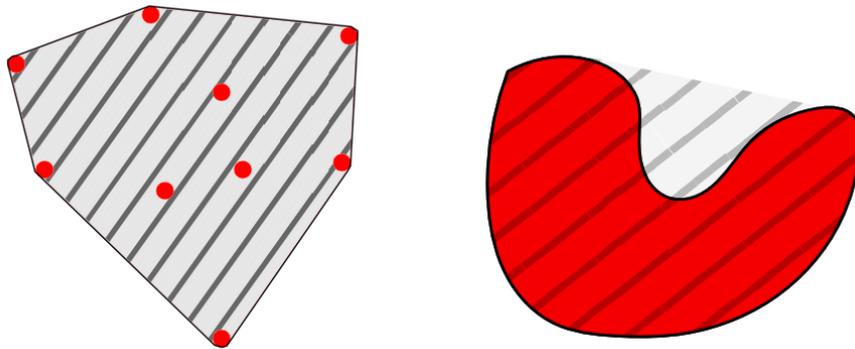


FIGURE 2.3 – Exemples d'enveloppes convexes. A gauche : enveloppe convexe d'un ensemble discret. A droite : enveloppe convexe d'un ensemble continu.

La définition de la convexité permet d'obtenir un lemme souvent utile (notamment en probabilités) :

Lemme 2.1 (Inégalité de Jensen) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction Soient x_1, x_2, \dots, x_m , m points appartenant à $\text{dom}(f)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des coefficients réels positifs tels que $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i)$$

Preuve. Par récurrence, on vérifie d'abord que pour $m = 2$, l'inégalité n'est rien d'autre que la définition de la convexité. Puis on suppose le résultat vrai au rang k et on le montre au rang $k + 1$ en réutilisant l'inégalité de convexité. □

Corollaire 2.1 Soit $x \in \mathbb{R}^n$ une combinaison convexe de x_1, \dots, x_m alors $f(x) \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} f(x_i)$

Preuve.

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i) \leq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} f(x_i).$$

□

Théorème 2.1 Une fonction f est convexe si et seulement si, pour tout $(x, y) \in (\text{dom}(f))^2$ et $\beta \geq 0$ tels que $y + \beta(y - x) \in \text{dom}(f)$, f satisfait :

$$f(y + \beta(y - x)) \geq f(y) + \beta(f(y) - f(x)).$$

Preuve. Soit f une fonction convexe. Notons $\alpha = \frac{\beta}{1+\beta}$ et $u = y + \beta(y - x)$. Alors

$$y = \frac{1}{1+\beta}(u + \beta x) = (1 - \alpha)u + \alpha x.$$

Donc

$$f(y) \leq (1 - \alpha)f(u) + \alpha f(x) = \frac{1}{1+\beta}f(u) + \frac{\beta}{1+\beta}f(x).$$

Réciproquement, supposons que la relation $f(y + \beta(y - x)) \geq f(y) + \beta(f(y) - f(x))$ soit vraie. Soient $(x, y) \in \text{dom}(f)^2$ et $\alpha \in]0, 1]$. On note $\beta = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ et $u = \alpha x + (1 - \alpha)y$. Alors

$$x = \frac{1}{\alpha}(u - (1 - \alpha)y) = u + \beta(u - y).$$

On a donc

$$f(x) \geq f(u) + \beta(f(u) - f(y)) = \frac{1}{\alpha}f(u) - \frac{1-\alpha}{\alpha}f(y).$$

□

Théorème 2.2 f est convexe si et seulement si son épigraphe

$$\text{epi}(f) = \{(x, t) \in \text{dom}(f) \times \mathbb{R}, t \geq f(x)\}$$

est convexe.

Preuve. Si $(x_1, t_1) \in \text{epi}(f)$ et $(x_2, t_2) \in \text{epi}(f)$ alors pour tout $\alpha \in [0, 1]$ on a

$$\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2 \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2).$$

Ainsi, $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \in \text{epi}(f)$.

Réciproquement, si $\text{epi}(f)$ est convexe, alors pour x_1, x_2 dans $\text{dom}(f)$, on a

$$(x_1, f(x_1)) \in \text{epi}(f), (x_2, f(x_2)) \in \text{epi}(f).$$

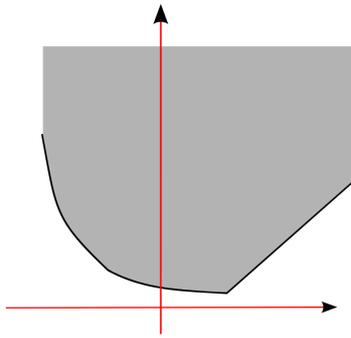


FIGURE 2.4 – L'épigraphe de la fonction est la zone grisée au-dessus du graphe de la fonction (en noir).

Ainsi, $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \in \text{epi}(f)$, soit encore

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

□

Théorème 2.3 *Si f est convexe alors ses ensembles de niveaux*

$$\mathcal{L}_f(\beta) = \{x \in \text{dom}(f), f(x) \leq \beta\}$$

sont soit vides, soit convexes.

Preuve. si x_1 et x_2 appartiennent à $\mathcal{L}_f(\beta)$, alors $\forall \alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \leq \alpha\beta + (1 - \alpha)\beta = \beta.$$

□

Remarque 2.1 *La réciproque est fautive ! Une fonction dont les ensembles de niveaux sont convexes n'est pas convexe en général (exemple en 1D : $f(x) = \sqrt{|x|}$). Une telle fonction est appelée quasi-convexe. Un exemple de fonction quasi-convexe (non convexe) est donné sur la figure 2.1.*

Les fonctions convexes différentiables ont plusieurs caractérisations :

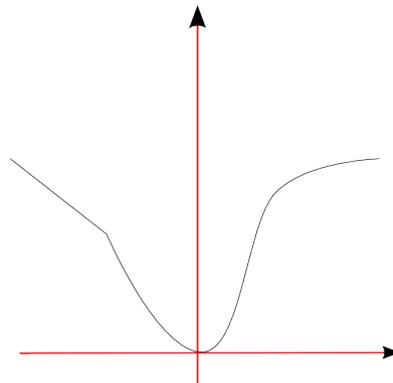


FIGURE 2.5 – Un exemple de fonction quasi-convexe. Ses lignes de niveaux sont des segments (donc des ensembles convexes), mais la fonction n'est pas convexe.

Théorème 2.4 (Caractérisation différentielle de la convexité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) f est convexe.
- (b) Ses hyperplans tangents sont des minorants (voir figure 2.1).

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$

- (c) Le gradient de f est un opérateur monotone :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0.$$

Note : un opérateur $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dit monotone si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle F(y) - F(x), y - x \rangle \geq 0.$$

Cette notion généralise la notion de gradient des fonctions convexes. Elle apparaît abondamment dans les EDP.

Preuve. Nous nous contentons de la preuve $(a) \Leftrightarrow (b)$ et laissons l'équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$ en exercice. On montre d'abord $(a) \Rightarrow (b)$.

Soit $\alpha \in [0, 1]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha(y - x)) - f(x)}{\alpha} = \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

par définition de la dérivée directionnelle. Par convexité de f , on a de plus

$$f(x + \alpha(y - x)) = f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x).$$

Donc

$$\frac{f(x + \alpha(y - x)) - f(x)}{\alpha} \leq f(y) - f(x).$$

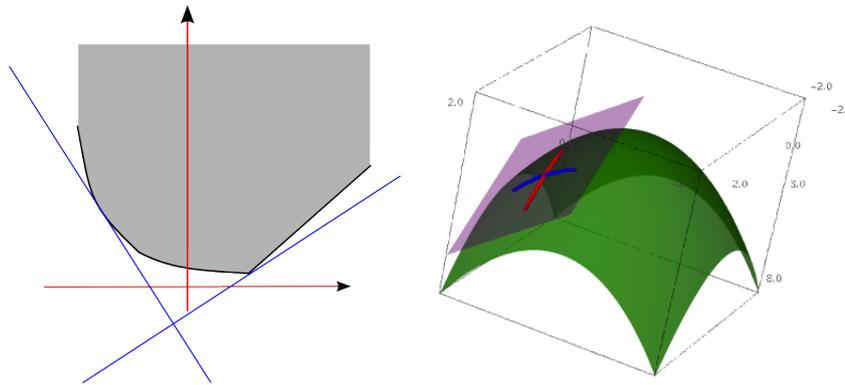


FIGURE 2.6 – Hyperplans tangents d'une fonction convexe (1D) et d'une fonction concave (2D). Notez que l'hyperplan tangent est un minorant pour la fonction convexe et un majorant pour la fonction concave.

En passant à la limite quand $\alpha \rightarrow 0^+$, on obtient l'inégalité annoncée.

Montrons maintenant $(b) \Rightarrow (a)$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(z) + \langle \nabla f(z), x - z \rangle \\ f(y) &\geq f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + \langle \nabla f(z), (1 - \alpha)(x - y) \rangle \\ f(y) &\geq f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + \langle \nabla f(z), \alpha(y - x) \rangle \end{aligned}$$

En multipliant la première inégalité par α , la seconde par $(1 - \alpha)$ puis en additionnant les deux, on obtient l'inégalité de convexité. \square

Les fonctions C^2 convexes peuvent être caractérisées par leur hessienne.

Proposition 2.1 (Caractérisation de second ordre de la convexité)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 . Elle est convexe si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^n, H[f](x) \succeq 0$ (i.e. la hessienne de f est semi-définie positive en tous points).

De façon générale, une fonction convexe peut être très compliquée sur le bord de son domaine. Par exemple, la fonction 2D

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ \phi(x, y) & \text{si } x^2 + y^2 = 1 \text{ avec } \phi(x, y) \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

est convexe. Cependant, son comportement sur le bord peut être arbitrairement complexe. Minimiser de telles fonctions est en général impossible. Cette remarque nous mène à nous restreindre à la classe de fonctions semi-continues inférieurement :

Définition 2.6 Une fonction convexe est dite fermée ou semi-continue inférieurement (s.c.i.) si son épigraphe est un ensemble fermé.

Exemple 2.1.1 La fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ a \geq 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

et illustrée sur la figure 2.1.1 n'est fermée que si $a = 0$.

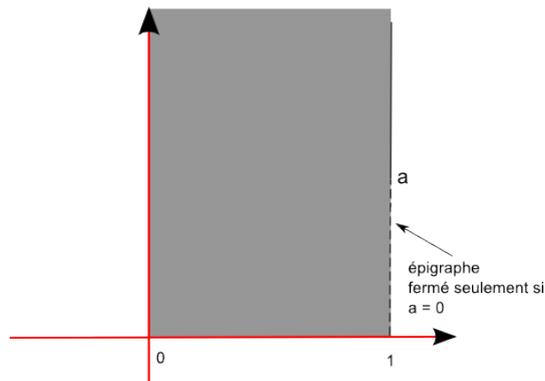


FIGURE 2.7 – Un exemple de fonction convexe dont l'épigraphe est ouvert (voir équation (2.2)). Son épigraphe est fermé seulement si $a = 0$.

Remarque 2.2 On verra plus tard que les fonctions convexes sont continues sur l'intérieur de leur domaine. Toutes les fonctions convexes dont le domaine est \mathbb{R}^n tout entier sont donc continues.

Théorème 2.5 Les ensembles de niveau des fonctions convexes s.c.i. sont fermés.

Exemple 2.1.2 Donnons quelques exemples de fonctions convexes fermées.

1. Les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexes telles que $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^n$ sont fermées. Voir théorème 2.8.
2. Les fonctions linéaires sont convexes et fermées.
3. Les fonctions convexes, différentiables sur \mathbb{R}^n sont convexes et fermées.
4. La fonction $f(x) = \|x\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque est convexe et fermée. En effet, $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \|\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\| \leq \alpha\|x_1\| + (1 - \alpha)\|x_2\|$.
5. La fonction (2.1) n'est convexe et fermée que si $\phi(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.2 Opérations sur les fonctions convexes

Théorème 2.6 Soient f_1 et f_2 deux fonctions convexes s.c.i. et $\beta > 0$. Les fonctions suivantes sont convexes s.c.i. :

1. $f(x) = \beta f_1(x)$.
2. $f(x) = (f_1 + f_2)(x)$ et $\text{dom}(f) = \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$.
3. $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ et $\text{dom}(f) = \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$.

Preuve. Exercice. □

Théorème 2.7 Soit $\phi(y)$, $y \in \mathbb{R}^m$ une fonction convexe s.c.i. Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un opérateur linéaire et $b \in \mathbb{R}^m$. Alors la fonction $f(x) = \phi(Ax + b)$ est convexe s.c.i. et $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax + b \in \text{dom}(\phi)\}$.

Preuve. Soient $(x_1, x_2) \in \text{dom}(f) \times \text{dom}(f)$. On note $y_1 = Ax_1 + b$ et $y_2 = Ax_2 + b$. Alors pour tout $\alpha \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= \phi(\alpha(Ax_1 + b) + (1 - \alpha)(Ax_2 + b)) \\ &\leq \alpha\phi(Ax_1 + b) + (1 - \alpha)\phi(Ax_2 + b) \\ &\leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2). \end{aligned}$$

La fermeture de l'épigraphe est due à la continuité de l'opérateur affine $x \mapsto Ax + b$. □

2.3 Continuité et différentiabilité

Lemme 2.2 Soit f une fonction convexe et $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(f))$. Alors f est majorée localement en x_0 ¹.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ tel que les points $x_0 \pm \epsilon e_i \in \text{int}(\text{dom}(f))$. D'après le corollaire 2.1 on a $\forall x \in \text{conv}(\{x_0 \pm \epsilon e_i\}) = B_\infty(x_0, \epsilon)$, $f(x) \leq \max_{1 \leq i \leq n} f(x_0 \pm \epsilon e_i) < +\infty$. □

Remarque 2.3 Dans ces notes de cours, nous énonçons en général les résultats sur $\text{int}(\text{dom}(f))$. En réalité, la grande majorité des résultats présentés sont valables sur l'intérieur relatif de $\text{dom}(f)$, c'est-à-dire l'intérieur par rapport à la topologie induite sur le plus petit sous-espace affine contenant $\text{dom}(f)$. Par exemple, l'intérieur du simplexe sur \mathbb{R}^n est vide alors que l'intérieur relatif du simplexe est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n, x_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.

Le lemme 2.2 implique la continuité d'une fonction convexe sur l'intérieur de son domaine.

1. Note : elle peut exploser au voisinage du bord. Il suffit par exemple de considérer la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $]0, 1]$ pour s'en convaincre.

Théorème 2.8 Soit f une fonction convexe et $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(f))$. Alors f est continue et localement Lipschitz en x_0 .

Preuve. D'après le lemme (2.2), il existe $M < +\infty$ et $\epsilon > 0$ tels que $f(x) \leq M, \forall x \in B_2(x_0, \epsilon)$. Soit $y \in B_2(x_0, \epsilon)$ et $z \in \partial B_2(x_0, \epsilon)$ un point de la frontière tel que $z = x_0 + \frac{1}{\alpha}(y - x_0)$ avec $\alpha = \frac{1}{\epsilon}\|y - x_0\|_2$. Par construction $\alpha \leq 1$ et $y = \alpha z + (1 - \alpha)x_0$. Par convexité de f on a donc :

$$\begin{aligned} f(y) &\leq (1 - \alpha)f(x_0) + \alpha f(z) \\ &\leq f(x_0) + \alpha(M - f(x_0)) \\ &= f(x_0) + \frac{M - f(x_0)}{\epsilon}\|y - x_0\|_2. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, on considère un point $y \in B_2(x_0, \epsilon)$ et on pose $u = x_0 + \frac{1}{\alpha}(x_0 - y)$. On a $\|u - x_0\|_2 = \epsilon$ et $y = x_0 + \alpha(x_0 - u)$. D'après le théorème 2.1 on a donc :

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x_0) + \alpha(f(x_0) - f(u)) \\ &\geq f(x_0) - \alpha(M - f(x_0)) \\ &= f(x_0) - \frac{M - f(x_0)}{\epsilon}\|y - x_0\|_2. \end{aligned}$$

On a donc $\forall y \in B_2(x_0, \epsilon)$:

$$|f(y) - f(x_0)| \leq \frac{M - f(x_0)}{\epsilon}\|y - x_0\|_2.$$

□

Définition 2.7 (Dérivée directionnelle) Soit $x \in \text{dom}(f)$. On appelle dérivée directionnelle au point x dans la direction p la limite suivante :

$$f'(x, p) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha}(f(x + \alpha p) - f(x)).$$

Si cette limite existe, on dit que $f'(x, p)$ est la dérivée directionnelle de f en x .

Théorème 2.9 Une fonction convexe est différentiable dans toutes les directions sur tous les points de l'intérieur de son domaine.

Preuve. Soit $x \in \text{int}(\text{dom}(f))$. On considère la fonction

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(f(x + \alpha p) - f(x)), \alpha > 0.$$

Soit $\beta \in]0, 1]$ et $\alpha \in]0, \epsilon]$ avec ϵ suffisamment petit pour que $x + \epsilon p \in \text{dom}(f)$. Alors :

$$f(x + \alpha\beta p) = f((1 - \beta)x + \beta(x + \alpha p)) \leq (1 - \beta)f(x) + \beta f(x + \alpha p).$$

Ainsi

$$\phi(\alpha\beta) = \frac{1}{\alpha\beta}(f(x + \alpha\beta p) - f(x_0)) \leq \frac{1}{\alpha}(f(x + \alpha p) - f(x)) = \phi(\alpha).$$

La fonction ϕ est donc décroissante au voisinage de 0^+ . Pour $\gamma > 0$ tel que $x - \gamma p \in \text{dom}(f)$ on a d'après le théorème 2.1 :

$$\phi(\alpha) \geq \frac{1}{\gamma}(f(x) - f(x - \gamma p)).$$

La limite quand $\alpha \rightarrow 0^+$ existe donc. □

Rappelons que la dérivabilité selon toute direction en x n'implique pas nécessairement la différentiabilité de f en x . Le contre-exemple typique est la fonction $x \rightarrow |x|$. Cette fonction est bien dérivable à droite et à gauche de 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Lemme 2.3 *Soit f une fonction convexe et $x \in \text{int}(\text{dom}(f))$. Alors $f'(x, p)$ est une fonction convexe en p , homogène de degré 1. Pour tout $y \in \text{dom}(f)$ on a*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x, y - x). \quad (2.3)$$

Preuve. Démontrons d'abord l'homogénéité. Pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et $\tau > 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x, \tau p) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha}(f(x + \alpha\tau p) - f(x)) \\ &= \tau \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\beta}(f(x + \beta p) - f(x)) = \tau f'(x, p). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \in [0, 1]$ on obtient

$$\begin{aligned} f'(x, \beta p_1 + (1 - \beta)p_2) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha}[f(x + \alpha(\beta p_1 + (1 - \beta)p_2)) - f(x)] \\ &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} \{ \beta[f(x + \alpha p_1) - f(x)] + (1 - \beta)[f(x + \alpha p_2) - f(x)] \} \\ &= \beta f'(x, p_1) + (1 - \beta)f'(x, p_2). \end{aligned}$$

La fonction $f'(x, p)$ est donc convexe en p . Pour finir, soit $\alpha \in]0, 1]$, $y \in \text{dom}(f)$ et $y_\alpha = x + \alpha(y - x)$. D'après le théorème 2.1 on a :

$$f(y) = f(y_\alpha + \frac{1}{\alpha}(1 - \alpha)(y_\alpha - x)) \geq f(y_\alpha) + \frac{1}{\alpha}(1 - \alpha)[f(y_\alpha) - f(x)].$$

On obtient (2.3) en faisant tendre α vers 0^+ . □

2.4 Théorèmes de séparation

Définition 2.8 Soit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. On dit que l'hyperplan

$$\mathcal{H}(g, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle g, x \rangle = \gamma\}, g \neq 0$$

supporte (ou est un hyperplan d'appui) à Q si $\forall x \in Q, \langle g, x \rangle \leq \gamma$. On dit que l'hyperplan $\mathcal{H}(g, \gamma)$ sépare un point x_0 de Q si

$$\langle g, x \rangle \leq \gamma < \langle g, x_0 \rangle \quad (2.4)$$

pour tout $x \in Q$. Lorsque les inégalités dans (2.4) sont strictes, on parle de séparation stricte.

Définition 2.9 (Projection) Soit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'opérateur de projection sur Q est noté π_Q et il est défini pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ par

$$\pi_Q(x_0) = \arg \min_{x \in Q} \|x - x_0\|_2.$$

Théorème 2.10 Si Q est convexe et fermé, il existe une unique projection $\pi_Q(x_0)$.

Preuve. Il suffit de remarquer que $\pi_Q(x_0) = \arg \min_{x \in Q} \frac{1}{2} \|x - x_0\|_2^2$ et que la fonction $\frac{1}{2} \|x - x_0\|_2^2 + \chi_Q(x)$ est strictement convexe. \square

Théorème 2.11 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable et Q un ensemble convexe, fermé de \mathbb{R}^n . Le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est solution du problème de minimisation suivant

$$\min_{x \in Q} f(x) \quad (2.5)$$

si et seulement si

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in Q. \quad (2.6)$$

Preuve. Si l'inégalité (2.6) est vraie, alors

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq f(x^*)$$

pour tout $x \in Q$. Réciproquement, soit x^* une solution de (2.5). Supposons qu'il existe $x \in Q$ tel que

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle < 0.$$

On pose $\phi(\alpha) = f(x^* + \alpha(x - x^*))$, $\alpha \in [0, 1]$. Cette fonction satisfait $\phi(0) = f(x^*)$ et $\phi'(0) = \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle < 0$. Ainsi, pour α suffisamment petit, on a $f(x^* + \alpha(x - x^*)) = \phi(\alpha) < \phi(0) = f(x^*)$, ce qui rentre en contradiction avec l'optimalité de x^* . \square

Corollaire 2.2 Soit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et $x_0 \notin Q$. Alors pour tout $x \in Q$ on a

$$\langle \pi_Q(x_0) - x_0, x - \pi_Q(x_0) \rangle \geq 0. \quad (2.7)$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\pi_Q(x_0) = \arg \min_{x \in Q} \frac{1}{2} \|x - x_0\|_2^2$ et d'appliquer le théorème 2.11. \square

Enfin, on peut donner une sorte d'inégalité triangulaire pour la projection.

Lemme 2.4 Soit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe fermé. Pour tout $x \in Q$ on a

$$\|x - \pi_Q(x_0)\|_2^2 + \|\pi_Q(x_0) - x_0\|_2^2 \leq \|x - x_0\|_2^2.$$

Preuve. D'après (2.7), on a

$$\begin{aligned} \|x - \pi_Q(x_0)\|_2^2 - \|x - x_0\|_2^2 &= \langle x_0 - \pi_Q(x_0), 2x - \pi_Q(x_0) - x_0 \rangle \\ &\leq -\|x_0 - \pi_Q(x_0)\|_2^2 \end{aligned}$$

\square

Théorème 2.12 Soit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe fermé et $x_0 \notin Q$. Alors il existe un hyperplan $\mathcal{H}(g, \gamma)$ qui sépare strictement x_0 de Q . Il suffit par exemple de prendre

$$g = x_0 - \pi_Q(x_0), \quad \gamma = \langle x_0 - \pi_Q(x_0), \pi_Q(x_0) \rangle.$$

Preuve. D'après (2.7), pour tout $x \in Q$, on a

$$\begin{aligned} \langle x_0 - \pi_Q(x_0), x \rangle &\leq \langle x_0 - \pi_Q(x_0), \pi_Q(x_0) \rangle \\ &= \langle x_0 - \pi_Q(x_0), x_0 \rangle - \|x_0 - \pi_Q(x_0)\|_2^2. \end{aligned}$$

\square

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour montrer une version géométrique du théorème de Hahn-Banach.

Théorème 2.13 Soit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe fermé et $x_0 \in \partial Q$, un point de la frontière de Q . Alors il existe un hyperplan d'appui à Q passant par x_0 . Si cet hyperplan s'écrit $\mathcal{H}(g, \gamma)$, le vecteur g est dit support à Q en x_0 .

Preuve. On considère une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $y_k \notin Q$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = x_0$. On note

$$g_k = \frac{y_k - \pi_Q(y_k)}{\|y_k - \pi_Q(y_k)\|_2} \quad \text{et} \quad \gamma_k = \langle g_k, \pi_Q(y_k) \rangle.$$

D'après le théorème 2.12, on a pour tout $x \in Q$

$$\langle g_k, x \rangle \leq \gamma_k \leq \langle g_k, y_k \rangle. \quad (2.8)$$

De plus, comme $\|g_k\|_2 = 1$ on a :

$$\begin{aligned} |\gamma_k| &= |\langle g_k, \pi_Q(y_k) - x_0 \rangle + \langle g_k, x_0 \rangle| \\ (\text{Lemme 2.4}) &\leq \|\pi_Q(y_k) - x_0\| + \|x_0\| \\ &\leq \|y_k - x_0\| + \|x_0\|. \end{aligned}$$

La suite $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc bornée. Ainsi, on peut extraire une sous-suite de (g_k) telle qu'il existe $g^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k$ et $\gamma^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k$. Il suffit ensuite de prendre la limite en 2.8. \square

2.5 Sous-différentiel

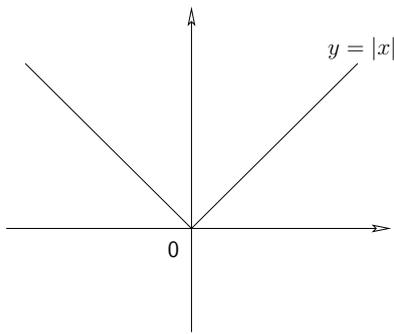
Définition 2.10 (Sous-gradient et sous-différentiel) Soit f une fonction convexe. Un vecteur $\eta \in \mathbb{R}^n$ est appelé sous-gradient de f au point $x_0 \in \text{dom}(f)$ si

$$\forall x \in \text{dom}(f), f(x) \geq f(x_0) + \langle \eta, x - x_0 \rangle. \quad (2.9)$$

L'ensemble de tous les sous-gradients en x_0 est appelé sous-différentiel de f . Il est noté $\partial f(x_0)$.

L'interprétation géométrique du sous-différentiel est la suivante. Il est formé par toutes les directions des hyperplans qui passent par le point $(x, f(x))$ et restent "sous" le graphe de la fonction f . Ces hyperplans sont appelés *hyperplans support* ou *hyperplans d'appui* au graphe de f en x .

Exemple 2.5.1 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$. Calculons les sous-gradients de f en tout point x de \mathbb{R} .



Dans \mathbb{R}^2 , les hyperplans d'appui sont des droites et les sous-gradients associés leurs coefficients directeurs.

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{si } x < 0 \\ \{+1\} & \text{si } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Lemme 2.5 Le sous-différentiel $\partial f(x_0) = \{\eta \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq f(x_0) + \langle \eta, x - x_0 \rangle\}$ est un ensemble convexe fermé.

Preuve. Soient g_1 et g_2 des éléments de $\partial f(x_0)$. On a $\forall y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \langle g_1, y - x \rangle \\ f(y) &\geq f(x) + \langle g_2, y - x \rangle. \end{aligned}$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$. En multipliant la première inégalité par α , la deuxième par $(1 - \alpha)$ et en sommant, on voit que $\alpha g_1 + (1 - \alpha)g_2 \in \partial f(x_0)$. \square

Théorème 2.14 Soit f une fonction convexe s.c.i. et $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(f))$. Alors $\partial f(x_0)$ est une ensemble non vide, convexe, borné.

Preuve. Notons d'abord que le point $(f(x_0), x_0)$ appartient à la frontière de $\text{epi}(f)$. D'après le théorème 2.13, il existe donc un hyperplan d'appui à $\text{epi}(f)$ au point $(f(x_0), x_0)$:

$$-\alpha\tau + \langle d, x \rangle \leq -\alpha f(x_0) + \langle d, x_0 \rangle \quad (2.10)$$

pour tout $(\tau, x) \in \text{epi}(f)$. On peut choisir

$$\|d\|_2^2 + \alpha^2 = 1. \quad (2.11)$$

Puisque pour tout $\tau \geq f(x_0)$ le point (τ, x_0) appartient à $\text{epi}(f)$, on conclut que $\alpha \geq 0$.

D'après le lemme 2.2, il existe $\epsilon > 0$ et $M > 0$ tels que $B_2(x_0, \epsilon) \subseteq \text{dom}(f)$ et

$$f(x) - f(x_0) \leq M\|x - x_0\|$$

pour tout $x \in B_2(x_0, \epsilon)$. Ainsi, d'après (2.10), pour tout x dans cette boule on a

$$\langle d, x - x_0 \rangle \leq \alpha(f(x) - f(x_0)) \leq \alpha M\|x - x_0\|_2.$$

En choisissant $x = x_0 + \epsilon d$ on obtient $\|d\|_2^2 \leq M\alpha\|d\|_2$. En utilisant la condition de normalisation (2.11), on obtient

$$\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{1 + M^2}}.$$

Ainsi, en choisissant $g = d/\alpha$ on obtient pour tout $x \in \text{dom}(f)$

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle.$$

Finalement, si $g \in \partial f(x_0)$ et $g \neq 0$, alors en choisissant $x = x_0 + g/\|g\|_2$ on obtient

$$\epsilon\|g\|_2 = \langle g, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) \leq M\|x - x_0\|_2 = M\epsilon.$$

Ainsi $\partial f(x_0)$ est borné. □

Remarque 2.4 *Le sous-différentiel peut ne pas exister sur le bord du domaine. Par exemple la fonction $f(x) = -\sqrt{x}$ sur \mathbb{R}_+ est convexe et fermée, mais le sous-différentiel n'existe pas en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.*

Le sous-différentiel est central car il permet notamment de caractériser les minimiseurs d'une fonction. On considère le problème suivant :

$$\text{Trouver } x^* \text{ tel que } f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

où f est convexe s.c.i.

Théorème 2.15 x^* est solution du problème ci-dessus si et seulement si $0 \in \partial f(x^*)$.

Preuve. Si $0 \in \partial f(x^*)$, alors $f(x) \geq f(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle \geq f(x^*)$, $\forall x \in \text{dom}(f)$. Réciproquement, si $f(x) \geq f(x^*)$, $\forall x \in \text{dom}(f)$, alors $0 \in \partial f(x^*)$ par définition du sous-différentiel. □

2.6 Règles de calcul sous-différentiel

Lemme 2.6 Soit f une fonction convexe s.c.i. différentiable sur son domaine. Alors $\forall x \in \text{int}(\text{dom}(f)), \partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Lemme 2.7 Soit f une fonction convexe s.c.i. avec $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Soit $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ un opérateur linéaire et $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction $\phi(x) = f(Ax + b)$ est convexe s.c.i. et $\forall x \in \text{int}(\text{dom}(\phi)), \partial \phi(x) = A^T \partial f(Ax + b)$.

Preuve. Exercice. □

Lemme 2.8 Soit $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ où f_1 et f_2 sont convexes s.c.i. sur \mathbb{R}^n et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Alors $\partial f(x) = \alpha_1 \partial f_1(x) + \alpha_2 \partial f_2(x) = \{\eta \in \mathbb{R}^n, \exists (x_1, x_2) \in \partial f_1(x_1) \times \partial f_2(x_2), \eta = x_1 + x_2\}$.

Lemme 2.9 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe fermée et $g : \mathbb{R} \cup +\infty \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ une fonction convexe croissante. Notons $h = g \circ f$. Alors $\forall x \in \text{int}(\text{dom}(f)), \partial h(x) = \{\eta_1 \eta_2, \eta_1 \in \partial g(f(x)), \eta_2 \in \partial f(x)\}$.

Exemple 2.6.1 Soit $f(x) = \|x\|_2, g(t) = \frac{1}{2}t^2$ et $h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$. On peut montrer (exercice) que :

$$\partial f(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{x}{\|x\|_2} \right\} & \text{si } x \neq 0, \\ \{x, \|x\|_2 \leq 1\} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Donc d'après le lemme 2.9 :

$$\partial h(x) = g'(\|x\|_2) \partial f(x) = x, \quad (2.13)$$

et on retrouve le résultat standard.

Lemme 2.10 Soit $(f_i)_{i=1..m}$ un ensemble de fonctions convexes s.c.i. Alors la fonction

$$f(x) = \max_{i=1..m} f_i(x)$$

est aussi convexe s.c.i. de domaine $\text{dom}(f) = \bigcap_{i=1}^m \text{dom}(f_i)$ et $\forall x \in \text{int}(\text{dom}(f)),$ on a :

$$\partial f(x) = \text{conv}(\partial f_i(x), i \in I(x))$$

où $I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\}, f_i(x) = f(x)\}$.

Le lemme suivant se révèle souvent utile pour étudier les fonctions définies comme des suprémums².

2. En réalité, toutes les fonctions convexes peuvent être représentées comme un suprémum en utilisant la transformée de Fenchel. Ce résultat est donc central. Le cours est trop court pour présenter cette théorie.

Lemme 2.11 Soit $\phi(x, y)$ une fonction telle que $\forall y \in \Delta$, la fonction $x \mapsto \phi(x, y)$ est convexe s.c.i. Alors la fonction

$$f(x) = \sup_{y \in \Delta} \phi(x, y)$$

est convexe s.c.i.. De plus, $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists \gamma, \phi(x, y) \leq \gamma, \forall y \in \Delta\}$ et

$$\partial f(x) \supseteq \text{conv}(\partial_x \phi(x, y), y \in I(x), I(x) = \{y, \phi(x, y) = f(x)\}).$$

Définition 2.11 Soit $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, fermé. Soit $x_0 \in \partial Q$. On appelle cône normal à Q en x_0 et on note $N_Q(x_0)$ l'ensemble suivant :

$$N_Q(x_0) = \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in Q\}.$$

Deux exemples de cône normaux sont donnés sur la figure 2.6.

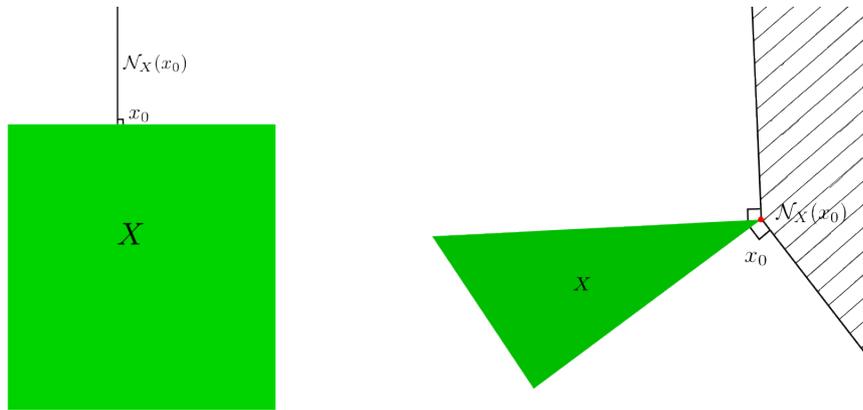


FIGURE 2.8 – Deux exemples de cônes normaux. A gauche : cône normal sur un point régulier de la frontière. A droite : cône normal sur une singularité.

Lemme 2.12 (Sous-différentiel d'une indicatrice) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe fermé. On définit l'indicatrice de X comme :

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le sous-différentiel de χ_X au point $x \in \partial X$ est le cône normal de X en x :

$$\partial \chi_X(x) = N_X(x).$$

Preuve. Exercice. □

Définition 2.12 (Norme duale) Soit $\|\cdot\|_X$ une norme sur \mathbb{R}^n . On appelle norme duale et on note $\|\cdot\|_{X^*}$ la fonction définie par :

$$\|y\|_{X^*} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_X \leq 1} \langle x, y \rangle. \quad (2.14)$$

On peut montrer que la fonction $\|\cdot\|_{X^*}$ définit bien une norme sur \mathbb{R}^n . De plus, par définition, on obtient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_X \|y\|_{X^*}, \quad (2.15)$$

qui généralise les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Hölder.

Exemple 2.6.2 Soit $\|x\|_X = \|x\|_p$ où $\|x\|_p$ est la norme ℓ^p usuelle sur \mathbb{R}^n . Alors, on peut montrer que $\|y\|_{X^*} = \|y\|_q$ avec $1/p + 1/q = 1$. En particulier, la norme ℓ^2 est égale à sa norme duale.

Définition 2.13 (Sous-différentielle d'une norme) Soit $f(x) = \|x\|_X$ où $\|\cdot\|_X$ est une norme arbitraire sur \mathbb{R}^n . Alors :

$$\partial f(x) = \arg \max_{\|y\|_{X^*} \leq 1} \langle x, y \rangle. \quad (2.16)$$

Preuve. Exercice. □

Pour finir ce paragraphe, montrons que les résultats ci-dessus, et en particulier le théorème (2.10), permettent de retrouver les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker.

Théorème 2.16 Soit $(f_i)_{0 \leq i \leq m}$ un ensemble de fonctions convexes différentiables telles qu'il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $f_i(\bar{x}) < 0$, $1 \leq i \leq m$ (condition de Slater). Alors, un point x^* est solution du problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, f_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m} f_0(x) \quad (2.17)$$

si et seulement si il existe des nombres $\lambda_i \geq 0$ tels que :

$$\nabla f_0(x^*) + \sum_{i \in I^*} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0, \quad (2.18)$$

où $I^* = \{i \in \{1, \dots, m\}, f_i(x^*) = 0\}$.

Preuve. Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n, f_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$, l'ensemble admissible. L'idée pour exploiter le théorème (2.10) consiste à réécrire (2.17) sous la forme :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x) \quad \text{où} \quad \phi(x) = \max(f_0(x) - f^*, f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad (2.19)$$

avec $f^* = f(x^*)$. Pour voir que ce problème est équivalent à (2.17), il suffit de se rendre compte que la fonction ϕ satisfait les conditions suivantes :

- ϕ est convexe car elle est définie comme un maximum de fonctions convexes.
- $\phi(x) \geq 0$ pour $x \in X$, car x^* est le minimiseur de f_0 sur X . De plus $\phi(x) = 0$ sur X si et seulement si x est un minimiseur.
- $\phi(x) > 0$ pour $x \notin X$, car dans ce cas, il existe au moins une fonction f_i telle que $f_i(x) > 0$.

Les conditions d'optimalité de (2.17) sont donc : $x^* \in \partial\phi(x)$. D'après le théorème (2.10), ceci est équivalent à l'existence de réels positifs $(\bar{\lambda}_i)_{0 \leq i \leq m}$ tels que :

$$\bar{\lambda}_0 \nabla f_0(x^*) + \sum_{i \in I^*} \bar{\lambda}_i \nabla f_i(x) = 0 \quad \text{où} \quad \bar{\lambda}_0 + \sum_{i \in I^*} \bar{\lambda}_i = 1. \quad (2.20)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $\bar{\lambda}_0 > 0$. Si $\bar{\lambda}_0 = 0$, alors :

$$\sum_{i \in I^*} \bar{\lambda}_i \nabla f_i(\bar{x}) = 0, \quad (2.21)$$

ce qui contredit la condition de Slater. Donc $\bar{\lambda}_0 > 0$ et il suffit de choisir $\lambda_i = \bar{\lambda}_i / \bar{\lambda}_0$ pour $i \in I^*$. □

2.7 Conjuguée convexe

La fonction conjuguée, aussi appelée transformée de Fenchel ou transformée de Legendre-Fenchel est utilisée pour :

- convexifier une fonction (en calculant la bi-conjuguée, i.e. la conjuguée de la conjuguée).
- calculer le sous-différentiel d'une fonction convexe.
- calculer des problèmes dits "duaux", en optimisation. Ces problèmes apportent souvent beaucoup d'information sur les problèmes "primaux", i.e. ceux que l'on souhaite résoudre.
- passer de la mécanique lagrangienne à la mécanique hamiltonienne,...

Elle a été introduite par Mandelbrojt en 1939 puis précisée et améliorée par Fenchel en 1949. Cette transformée généralise la transformation de Legendre (1787).

Définition 2.14 (Conjuguée convexe) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Sa conjuguée est définie par :

$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle s, x \rangle - f(x). \quad (2.22)$$

L'application $f \mapsto f^*$ est appelée transformation de Legendre-Fenchel. La fonction f^* est appelée conjuguée convexe, transformée de Fenchel ou transformée de Legendre-Fenchel de f .

La notion de transformée de Fenchel est illustrée sur la figure 2.7.

La motivation pour introduire cette transformation est la suivante. On peut définir la convexifiée fermée d'une fonction comme l'enveloppe supérieure de toutes les minorantes

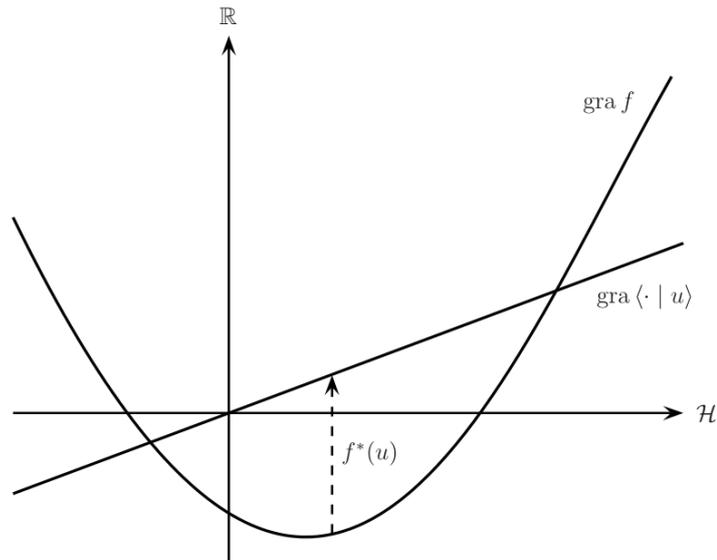


FIGURE 2.9 – $f^*(u)$ est le supremum de la différence signée verticale entre le graphe de f et celui de l'hyperplan défini par la fonction linéaire $\langle \cdot, u \rangle$.

affines de f . Parmi toutes les minorantes affines $x \mapsto \langle s, x \rangle + \alpha$, on ne peut garder que celle qui est la plus haute, c'est-à-dire qui a le plus grand α . Il faut donc déterminer le plus grand α tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle s, x \rangle + \alpha \leq f(x).$$

La plus petite valeur de $-\alpha$ est donnée par

$$f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle s, x \rangle - f(x).$$

Proposition 2.2 *Pour toute fonction f , f^* est convexe, fermée.*

Preuve. L'intersection d'ensembles fermés est fermé. □

Proposition 2.3 *Pour tout $(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:*

$$f(x) + f^*(s) \geq \langle x, s \rangle. \quad (2.23)$$

Preuve. Evident d'après la définition. □

Définition 2.15 (Biconjuguée) *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Sa biconjuguée est définie par :*

$$f^{**}(x) = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} \langle x, s \rangle - f^*(s). \quad (2.24)$$

Théorème 2.17 *La biconjuguée de f est la plus grande fonction convexe fermée inférieure à f . On peut aussi la voir comme la fonction dont l'épigraphe est l'enveloppe convexe fermée de $\text{epi}(f)$.*

Preuve. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ l'ensemble des paires (s, α) qui définissent une fonction affine $x \mapsto \langle s, x \rangle - \alpha$ majorée par f :

$$\begin{aligned} (s, \alpha) \in \Sigma &\Leftrightarrow f(x) \geq \langle s, x \rangle - \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \alpha \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle s, x \rangle - f(x) \\ &\Leftrightarrow \alpha \geq f^*(s), \quad (\text{and } s \in \text{dom}(f^*)). \end{aligned}$$

On obtient donc pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} &\sup_{(s, \alpha) \in \Sigma} \langle s, x \rangle - \alpha \\ &= \sup_{s \in \text{dom}(f^*), -\alpha \leq -f^*(s)} \langle s, x \rangle - \alpha \\ &= \sup_{s \in \text{dom}(f^*)} \langle s, x \rangle - f^*(s) \\ &= f^{**}(x). \end{aligned}$$

D'un point de vue géométrique, les épigraphes des fonctions affines associées à $(s, \alpha) \in \Sigma$ sont les demi-espaces fermés contenant $\text{epi}(f)$. L'épigraphe de leur supremum est l'enveloppe convexe fermée de $\text{epi}(f)$. □

Théorème 2.18 *La biconjuguée de f satisfait $f^{**} = f$ si et seulement si f est convexe fermée.*

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 2.17. □

Exemple 2.7.1 *Voici quelques exemples de conjuguées convexes. Les preuves sont laissées en exercice.*

- Soit $p \in]1, +\infty[$ et q le conjugué de p (i.e. tel que $1/p + 1/q = 1$). Alors $(1/p|\cdot|^p)^* = 1/q|\cdot|^q$.
- Soit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice SDP et $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx \rangle$, alors $f^*(x) = \frac{1}{2}\langle Q^{-1}x, x \rangle$.
- Soit L un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . On considère la fonction :

$$f(x) = \chi_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in L \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.25}$$

Sa conjuguée convexe $f^* = \chi_{L^\perp}$.

- Soit $f(x) = \|x\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque. Alors :

$$f^*(s) = \chi_B(s) \tag{2.26}$$

où $B = \{s \in \mathbb{R}^n, \|s\|^* \leq 1\}$ et où $\|\cdot\|^*$ est la norme duale à $\|\cdot\|$.

Proposition 2.4 Soit f une fonction convexe fermée. On a $\forall (x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$s \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(s). \quad (2.27)$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} s \in \partial f(x) &\Leftrightarrow f^*(s) + f(x) = \langle s, x \rangle \\ &\Leftrightarrow f^*(s) + f^{**}(x) = \langle s, x \rangle \\ &\Leftrightarrow x \in \partial f^*(s). \end{aligned}$$

□

2.8 Opérateurs proximaux

Définition 2.16 (Opérateur proximal) L'opérateur proximal de f est noté Prox_f et il est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\text{Prox}_f(x) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} f(u) + \frac{1}{2} \|u - x\|_2^2. \quad (2.28)$$

Exemple 2.8.1 Voici quelques exemples d'opérateurs proximaux.

- Si $f(x) = 0$, $\text{Prox}_f(x) = x$.
- Si $f(x) = \chi_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$ où $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe fermé, alors $\text{Prox}_f(x)$ est la projection euclidienne de x sur X . En effet :

$$\text{Prox}_f(x) = \arg \min_{u \in X} \|u - x\|_2^2 = P_X(x). \quad (2.29)$$

- Si $f(x) = \alpha \|x\|_1$, Prox_f est un seuillage doux de x :

$$(\text{Prox}_f(x))_i = \begin{cases} x_i - \alpha & \text{si } x_i \geq \alpha \\ 0 & \text{si } |x_i| \leq \alpha \\ x_i + \alpha & \text{si } x_i \leq -\alpha. \end{cases} \quad (2.30)$$

Montrons quelques propriétés utiles de cet opérateur.

Proposition 2.5 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe fermée, $\text{Prox}_f(x)$ existe et est unique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. De plus il est caractérisé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} u &= \text{Prox}_f(x) \\ \Leftrightarrow 0 &\in \partial f(u) + u - x \\ \Leftrightarrow u &= (I_n + \partial f)^{-1}(x). \end{aligned}$$

Proposition 2.6 (Contraction et expansivité) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe fermée. Alors Prox_f est un opérateur fortement non expansif :

$$\langle \text{Prox}_f(x_1) - \text{Prox}_f(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \|\text{Prox}_f(x_1) - \text{Prox}_f(x_2)\|_2^2. \quad (2.31)$$

Il est Lipschitz continu de constante 1 :

$$\|\text{Prox}_f(x_1) - \text{Prox}_f(x_2)\|_2 \leq \|x_1 - x_2\|_2. \quad (2.32)$$

Preuve. On a :

$$x_1 - \text{Prox}_f(x_1) \in \partial f(\text{Prox}_f(x_1)) \quad (2.33)$$

et

$$x_2 - \text{Prox}_f(x_2) \in \partial f(\text{Prox}_f(x_2)) \quad (2.34)$$

or si f est convexe fermée, l'opérateur multivalué ∂f est monotone, ce qui signifie que :

$$\langle \eta_1 - \eta_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0, \quad \forall \eta_1 \in \partial f(\text{Prox}_f(x_1)), \forall \eta_2 \in \partial f(\text{Prox}_f(x_2)). \quad (2.35)$$

(Cette inégalité permet d'exprimer le fait que dans le cas C^2 , la hessienne d'une fonction convexe est semi-définie positive). L'inégalité (2.32) est obtenue en appliquant le théorème de Cauchy-Schwartz. \square

Proposition 2.7 (Identité de Moreau) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe fermée. On a alors :

$$x = \text{Prox}_f(x) + \text{Prox}_{f^*}(x). \quad (2.36)$$

Preuve. On note $u = \text{Prox}_f(x)$ et $v = x - u$. Le vecteur u satisfait $0 \in \partial f(u) + x - u$ soit encore $v \in \partial f(u)$. On a donc $u \in \partial f^*(v)$ soit encore $x - v \in \partial f^*(v)$ ou $v = \text{Prox}_{f^*}(x)$. \square

Exemple 2.8.2 Soit L un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et L^\perp son complément orthogonal. La propriété précédente n'est alors rien d'autre que la décomposition orthogonale :

$$x = P_L(x) + P_{L^\perp}(x). \quad (2.37)$$

2.9 Eléments d'analyse pour l'algorithmie

On pourrait penser qu'une fonction différentiable est plus facile à minimiser qu'une fonction non-différentiable. De même, une fonction strictement convexe pourrait être plus facile à minimiser qu'une fonction simplement convexe (notamment parce qu'elle admet un minimiseur unique). Il n'en est rien. En effet, on peut approcher de façon aussi proche que l'on souhaite une fonction non différentiable par une fonction C^∞ et une fonction convexe par une fonction strictement convexe. Il faut donc introduire des classes de fonctions plus régulières pour développer des algorithmes efficaces. Les deux classes présentées ci-après sont les plus naturelles : les fonctions différentiables à gradient Lipschitz et les fonctions fortement convexes.

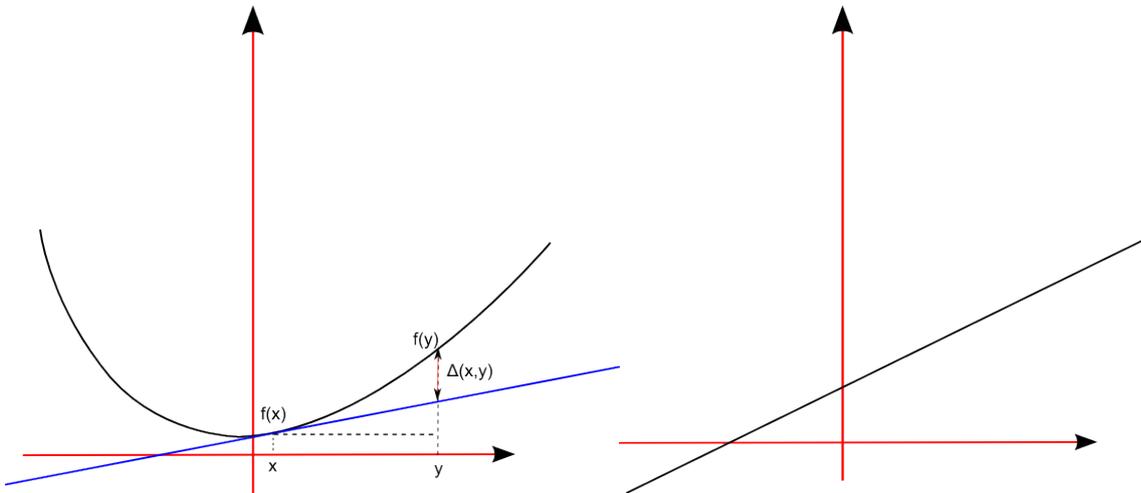


FIGURE 2.10 – Fonction à gradient Lipschitz : le graphe de la courbe ne peut pas s'éloigner trop rapidement de la tangente. Ici $\Delta(x, y) \leq \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$. La fonction affine de droite satisfait $L = 0$ puisque la tangente est identique à la fonction.

2.9.1 Fonctions à gradient Lipschitz

De façon générale, les fonctions différentiables ne sont pas plus faciles à minimiser que les fonctions non différentiables. On peut en effet approcher n'importe quelle fonction, aussi précisément qu'on le souhaite en norme L^∞ , par une fonction C^∞ . La différentiabilité n'est donc pas une propriété assez forte pour permettre de faire des estimations d'erreurs sur les méthodes d'optimisation.

C'est pour cette raison qu'on introduit la classe des fonctions différentiables à gradient Lipschitz. Dans tout ce paragraphe, on considère des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiables à gradient Lipschitz :

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|. \quad (2.38)$$

Ces fonctions ont une propriété essentielle pour la preuve de convergence des méthodes de descente :

Lemme 2.13 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable à gradient L -Lipschitz continu. Elle satisfait :

$$f(y) \leq \underbrace{f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle}_{\text{Approximation linéaire}} + \frac{L}{2} \|y - x\|^2$$

Ce résultat indique que pour les fonctions à gradient Lipschitz, l'estimation linéaire d'une fonction ne peut pas être trop mauvaise.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
 f(y) &= f(x) + \int_{t=0}^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle dt \\
 &= f(x) + \int_{t=0}^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x) + \nabla f(x), y-x \rangle dt \\
 &= f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \int_{t=0}^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), y-x \rangle dt \\
 &\stackrel{(2.38)+\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \int_{t=0}^1 tL\|y-x\|^2 dt \\
 &= f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{L}{2}\|y-x\|^2.
 \end{aligned}$$

□

Les fonctions à gradient Lipschitz peuvent être caractérisées par leur hessienne.

Lemme 2.14 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^2 , convexe à gradient L Lipschitz si et seulement si :

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\min}(H[f](x)) &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \text{ (convexité)} \\
 \lambda_{\max}(H[f](x)) &\leq L, \forall x \in \mathbb{R}^n. \text{ (gradient Lipschitz)}.
 \end{aligned}$$

On finit ce paragraphe par quelques exemples :

— La fonction $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$ est convexe à gradient Lipschitz de constante $L = \lambda_{\max}(A^*A)$. On a en effet $\nabla f(x) = A^*(Ax - b)$. Donc

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| = \|A^*A(x - y)\| \leq \lambda_{\max}(A^*A)\|x - y\|.$$

- La fonction $f(x) = -\log(x)$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* , mais son gradient n'est pas Lipschitz. En effet, $f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0, \forall x > 0$, mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = +\infty$.
- La fonction $f(x) = \exp(x)$ est convexe sur \mathbb{R} , mais son gradient n'est pas Lipschitz. Par contre sur tout intervalle borné du type $[a, b]$, on a $f''(x) \leq \exp(b)$.

2.9.2 Fonctions fortement convexes

On a vu dans le théorème 3.3, équation (3.2) qu'il est impossible de dire quelque chose sur la distance au minimiseur pour des algorithmes de premier ordre sous la simple hypothèse qu'on minimise une fonction à gradient Lipschitz. Une classe de fonctions sur laquelle on peut dire plus de choses est la classe des fonctions fortement convexes.

Définition 2.17 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite fortement convexe s'il existe $\mu > 0$ tel que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall \eta \in \partial f(x)$ on aie :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \eta, y-x \rangle + \frac{\mu}{2}\|y-x\|^2. \tag{2.39}$$

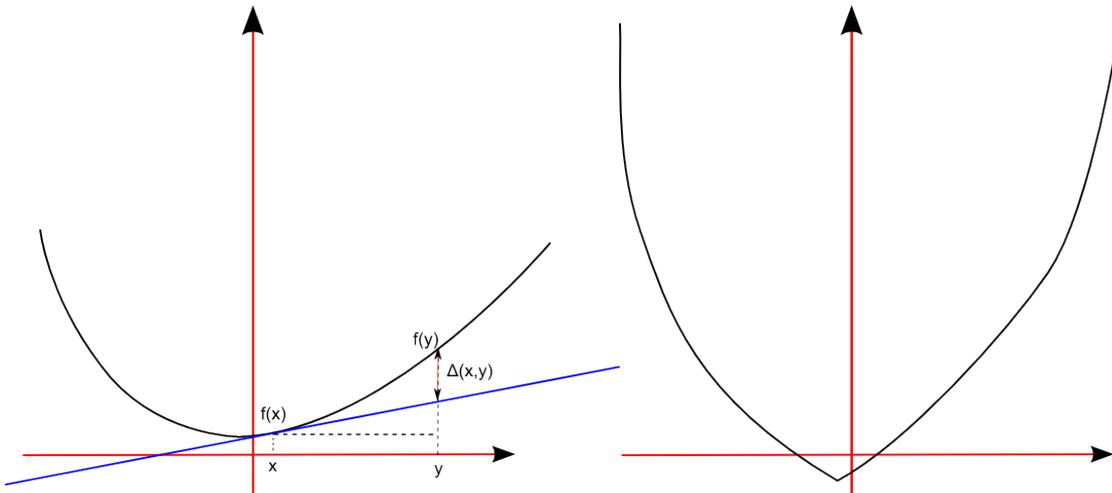


FIGURE 2.11 – Fonctions fortement convexes. Le graphe de la courbe s'éloigne rapidement de la tangente : $\Delta(x, y) \geq \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$. Notez qu'une fonction fortement convexe peut être non-différentiable et à domaine borné (voir figure de droite).

Notez que le signe dans l'inégalité (2.39) est juste inversé par rapport aux fonctions différentiables à gradient Lipschitz. La forte convexité indique donc que le graphe de la courbe s'éloigne suffisamment rapidement de la tangente.

Proposition 2.8 *Une fonction fortement convexe est strictement convexe, elle admet donc un minimiseur unique.*

Note : par contre, une fonction strictement convexe n'est pas forcément fortement convexe (exemple : $f(x) = -\log(x)$).

Preuve. Il suffit de voir que l'équation (2.39) implique que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, x \neq y$:

$$f(y) > f(x) + \langle \eta, y - x \rangle$$

qui est une inégalité de stricte convexité. □

Les fonctions fortement convexes de classes C^2 sont caractérisées par leur hessienne.

Proposition 2.9 *Une fonction C^2 est μ -fortement convexe si et seulement si*

$$\lambda_{\min}(H[f](x)) \geq \mu, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Exercice de TD. □

La proposition suivante est un des éléments qui permet d'obtenir des taux de convergence en norme :

Proposition 2.10 Soit f une fonction μ -fortement convexe qui admet pour minimiseur x^* . Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x) \geq f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x - x^*\|^2.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité (2.39) en $x = x^*$. Ainsi $0 \in \partial f(x)$. \square

Proposition 2.11 Soient f_1 et f_2 deux fonctions convexes de paramètres de forte convexité respectifs $\mu_1 \geq 0$ et $\mu_2 \geq 0$ ^a. Soient α et β deux réels positifs. Alors la fonction $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ est μ -fortement convexe avec $\mu \geq \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$.

a. Notez que ces fonctions sont simplement convexes si $\mu_i = 0$.

Preuve. On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f_1(y) &\geq f_1(x) + \langle \eta_1, y - x \rangle + \frac{\mu_1}{2} \|y - x\|^2 \\ f_2(y) &\geq f_2(x) + \langle \eta_2, y - x \rangle + \frac{\mu_2}{2} \|y - x\|^2 \end{aligned}$$

Il suffit donc de multiplier ces deux inégalités par α et β puis de les additionner. \square

Pour finir donnons quelques exemples de fonctions fortement convexes :

- La fonction $f(x) = \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2$ est 1 fortement convexe.
- La fonction $f(x) = g(x) + \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2$ où g est convexe est 1 fortement convexe.
- La fonction $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$ est fortement convexe si A est de rang plein. Sa constante de forte convexité est alors égale à $\lambda_{\min}(A^*A)$.
- La fonction $f(x) = -\log(x)$ n'est pas fortement convexe sur \mathbb{R}_+^* . Par contre, elle l'est sur tout intervalles $[a, b]$, $0 < a < b$. Sa constante de forte convexité est alors égale à $\frac{1}{b^2}$.

2.9.3 Conditionnement d'une fonction

Les notions de constante de Lipschitz du gradient et de paramètre de forte convexité généralisent la notion de plus grande et plus petite valeur singulière d'une matrice, comme le montrent les propositions 2.14 et 2.9. Elles permettent de définir une notion de conditionnement d'une fonction.

Définition 2.18 Soit f une fonction μ -fortement convexe, différentiable, telle que ∇f est L -Lipschitz. Le conditionnement de f est défini par la quantité :

$$Q_f = \frac{L}{\mu}$$

Le conditionnement apparaît dans les taux de convergence de toutes les méthodes de premier ordre, de la même façon qu'en algèbre linéaire.

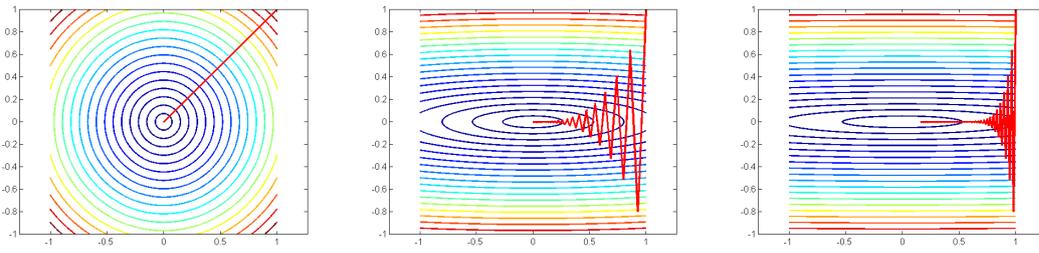


FIGURE 2.12 – Lignes de niveau de la fonction f_α pour $\alpha \in \{1, 5, 10\}$. La courbe rouge indique la trajectoire d'une descente de gradient. Plus le conditionnement α est élevé, plus les courbes de niveau sont allongées et plus la méthode de descente de gradient oscille.

Pour toute fonction f , on a $\mu \leq L$ (pour s'en convaincre comparer les inégalités (2.39) et (2.13) d'où :

$$Q_f \in [1, +\infty]$$

. Le conditionnement est infini dès lors que la fonction f est non différentiable ou non fortement convexe. De façon assez générale, les problèmes mal conditionnés tels que $Q_f \gg 1$ sont plus difficile à résoudre que les problèmes bien conditionnés. La figure 2.12 montre les lignes de niveau de la fonction :

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2} \|D_\alpha x\|_2^2$$

avec

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et $\alpha \geq 1$. La hessienne de f_α est D_α et le conditionnement est donc $Q_{f_\alpha} = \alpha$. Plus α est grand, plus les lignes de niveaux sont resserrées. Une méthode de gradient a alors tendance à converger lentement en oscillant dans la "vallée" qui mène au minimiseur.

Chapitre 3

Théorie de la complexité

Les problèmes d'optimisation apparaissent dans presque tous les domaines de l'ingénierie. Par exemple, la majorité des équations de la physique découlent d'un principe d'énergie minimale. Les EDP, les EDO, les problèmes d'algèbre linéaire la théorie des jeux peuvent souvent être formulés comme un problème d'optimisation.

Le fait que l'optimisation apparaisse de façon si massive et modélise autant de phénomènes complexes permet de conjecturer la proposition suivante :

La majorité des problèmes d'optimisation ne peuvent pas être résolus.

Dans ce chapitre, nous allons montrer cette conjecture et dégager des classes de problèmes spéciales qui sont résolubles et pour lesquelles on peut déterminer des méthodes optimales.

3.1 Formalisation du problème

Pour formaliser la théorie de la complexité, on a besoin de définir quelques objets :

- \mathcal{M} : une classe de méthodes de résolution (exemple : les méthodes qui n'utilisent que le gradient).
- \mathcal{P} : un problème de la classe \mathcal{F} (exemple : minimiser $f(x) = x^2$).
- \mathcal{O} : un oracle qui donne des informations sur le problème \mathcal{P} (exemple : on lui donne un point, il renvoie la dérivée de la fonction en ce point).
- τ_ϵ : un critère d'arrêt (exemple : la distance au minimiseur est inférieure à ϵ).
- Σ : un modèle de problème. Cet objet regroupe toutes les informations connues du problème. Par exemple, on peut savoir qu'on minimise une fonction différentiable, à gradient Lipschitz.
- \mathcal{F} : une classe de problèmes. Cette classe est définie comme le triplet $(\Sigma, \mathcal{O}, \tau_\epsilon)$.

Une méthode \mathcal{M} est construite de la façon suivante :

Algorithm 1: Un schéma d'optimisation générique**Input:** ϵ : la précision désirée. x_0 : un point de départ.**Output:** \bar{x} : une solution de précision ϵ .**begin** $k = 0$; $I_{-1} = \emptyset$ (l'ensemble des informations collectées est vide).**while** τ_ϵ n'est pas vérifié **do**Appeler l'oracle \mathcal{O} au point x_k $I_k = I_{k-1} \cup (x_k, \mathcal{O}(x_k))$ Appliquer les règles spécifiques à \mathcal{M} pour générer x_{k+1}

Définition 3.1 La complexité analytique est le nombre d'appels à l'oracle effectués pour que l'algorithme s'arrête.

Définition 3.2 La complexité arithmétique est le nombre d'opérations arithmétiques (additions, multiplications,...) effectués pour que l'algorithme s'arrête.

Dans ce cours, on s'intéressera à trois types d'oracles :

- l'oracle d'ordre 0 : il renvoie $f(x)$.
- l'oracle d'ordre 1 : il renvoie $f(x)$ et $\nabla f(x)$.
- l'oracle d'ordre 2 : il renvoie $f(x)$, $\nabla f(x)$ et $H[f](x)$.

3.2 Un exemple en optimisation non convexe

Notre premier objectif dans ce chapitre est de démontrer la conjecture concernant l'irrésolvabilité d'un problème d'optimisation en général. On considère la classe de problèmes \mathcal{F} suivante :

$$\min_{x \in B_n} f(x) \tag{3.1}$$

où

- $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n, x(i) \in [0, 1]\} = [0, 1]^n$.
- f est une fonction Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|_\infty, \forall (x, y) \in B_n \times B_n$.

Cette classe de problème semble relativement simple : on veut minimiser une fonction régulière sur un petit domaine.

On considère la méthode d'optimisation $G(p)$ suivante :

1. Définir $(p + 1)^n$ points espacés régulièrement sur $[0, 1]^n$ (un maillage cartésien).
2. Evaluer f en chacun de ces points ($(p + 1)^n$ appels à l'oracle).
3. Renvoyer la paire $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ où $f(\bar{x})$ est minimale.

Théorème 3.1 Soit f^* la solution de (3.1), alors $|f(x^*) - f(\bar{x})| \leq \frac{L}{2^p}$.

Preuve. Pour tout $x \in B_n$, il existe $x_{k(x)}$, un point de la grille cartésienne tel que $\|x - x_{k(x)}\|_\infty \leq \frac{1}{2p}$. Comme f est L -Lipschitz sur B_n , on a pour tout $x \in B_n$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_{k(x)}) - L\|x - x_{k(x)}\|_\infty \\ &\geq f(\bar{x}) - L\|x - x_{k(x)}\|_\infty \\ &\geq f(\bar{x}) - \frac{L}{2p}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = x^*$, le minimiseur, on obtient $f(\bar{x}) - f(x^*) \leq \frac{L}{2p}$. \square

Corollaire 3.1 *La complexité analytique de la classe de problèmes considérée est inférieure à $(\lceil \frac{L}{2\epsilon} \rceil + 1)^n$.*¹

Preuve. En prenant $p = \lceil \frac{L}{2\epsilon} \rceil$, on s'assure que $f(\bar{x}) - f(x^*) \leq \epsilon$ et on a du évaluer f en $(p + 1)^n$ points. \square

On vient donc de trouver un majorant de la complexité analytique de la classe de problèmes considérée. Peut-on trouver de meilleures méthodes ? Le théorème suivant répond à cette question par la négative.

Théorème 3.2 *Pour $\epsilon \leq \frac{L}{2}$, la complexité analytique des méthodes d'ordre 0 est supérieure à $(\lfloor \frac{L}{2\epsilon} \rfloor)^n$*

Preuve. L'idée est de construire une fonction "résistante" à l'oracle, c'est-à-dire, une fonction qui donne un minimum d'information à chaque appel. Par exemple, la méthode peut être appliquée et indiquer $f(x_k) = 0$ en tous les points x_k testés. Or, si on fait un nombre d'appels $N \leq p^n$ avec $p = \lfloor \frac{L}{2\epsilon} \rfloor$, il existe un point \hat{x} tel que $\forall k, \|x_k - \hat{x}\|_\infty \geq \frac{1}{2p}$, c'est-à-dire un point qui est loin (au sens l^∞) de tous les points évalués. La fonction f que l'on souhaite minimiser peut décroître sur l'intervalle $[x_k, \hat{x}]$ d'un facteur $\frac{L}{2p}$. On aurait donc $f(x_k) - f(\hat{x}) \geq \frac{L}{2p} \geq \epsilon$. \square

En conclusion, la méthode $G(p)$ définie plus haut est optimale ! Pour la classe de problèmes considérée, on ne peut pas trouver de méthode plus efficace. Voyons maintenant en quoi ce résultat confirme la conjecture.

Exemple 3.2.1 *On choisit $L = 2$ (des fonctions régulières), $n = 10$ (une petite dimension), $\epsilon = 0,01$ (une précision modérée) et une machine capable de faire 10^6 appels à l'oracle par seconde (une machine raisonnable). Le calcul de la complexité analytique indique qu'il faut environ 10^{20} appels à l'oracle, soit 312500 ans de calcul sur une machine moderne pour effectuer ce calcul.*

Notons que les problèmes de combinatoire NP-complets ont souvent une complexité en 2^n qui est bien inférieure à celle de notre problème.

1. La notation $\lceil \cdot \rceil$ indique l'entier supérieur le plus proche. La notation $\lfloor \cdot \rfloor$ indique l'entier inférieur le plus proche.

On pourrait espérer qu'ajouter de la régularité aux fonctions permette d'améliorer la situation. On pourrait par exemple considérer la classe des fonctions différentiables à gradient Lipschitz. Malheureusement, la situation ne s'arrange pas, et la complexité analytique de ces problèmes reste du même ordre de grandeur. Il est donc impossible de résoudre des problèmes d'optimisation quelconques et ce quelque soit leur régularité. C'est la raison principale pour laquelle on va se restreindre à des classes plus petites. En optimisation continue, la seule classe raisonnable aujourd'hui semble être la classe des problèmes convexes pour laquelle on va proposer quelques algorithmes optimaux.

3.3 Complexité en optimisation convexe différentiable

Dans cette partie, on s'intéresse aux méthodes de premier ordre appliquées à la classe de problèmes suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

où

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, différentiable.
- ∇f est Lipschitz de constante $L : \|\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$.

On considère pour résoudre ce problème les méthodes \mathcal{M} de premier ordre définies par :

$$x_k \in x_0 + \text{vect}(\nabla f(x_0), \dots, \nabla f(x_{k-1})), \quad k \geq 1.$$

Cette classe de méthodes est assez vaste : elle inclut par exemple les descentes de gradient ou les méthodes de type gradient conjugué pour les problèmes quadratiques.

On se propose d'abord de déterminer la complexité analytique de cette classe de problèmes. L'idée est de trouver une fonction pathologique pour ces méthodes qui va permettre d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Pour tout k , $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une fonction f , différentiable, à gradient L -Lipschitz telle que pour toute méthode de premier ordre de la classe \mathcal{M} , ont ait :*

$$f(x_k) - f(x^*) \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|^2}{32(k+1)^2}.$$

$$\|x_k - x^*\|^2 \geq \frac{1}{8}\|x_0 - x_k\|^2. \quad (3.2)$$

Avant de passer à la preuve de ce théorème, on peut analyser ses conséquences :

- Il est très courant aujourd'hui de devoir résoudre des problèmes d'optimisation en très grande dimension ($n > 10^6$ variables). La condition $k \leq \frac{n-1}{2}$ ne revêt donc pas d'importance particulière, car dans ces situations, on ne peut pas se permettre de faire autant d'itérations.

- Une conséquence déplaisante liée à la deuxième inégalité est qu'en général, on ne peut rien dire sur la distance au minimiseur. Au bout d'un nombre d'itérations de l'ordre de la taille du problème, il est possible qu'on n'ait réduit la distance au minimiseur que d'un facteur $\sqrt{8}$!
- Lorsqu'on minimise une fonction différentiable à l'aide d'une descente de gradient, les taux de convergence sont en général sous-linéaires : on ne peut pas espérer obtenir des solutions très précises. On verra par la suite que la situation s'améliore pour des classes de fonctions plus restreintes : les fonctions fortement convexes.
- Le taux de convergence optimal en $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ n'est pas trop mauvais : au bout de 10 itérations, on peut faire décroître la fonction d'un facteur 100 et au bout de 100 itérations, d'un facteur 10000 en utilisant les schémas d'optimisation optimaux vus par la suite.

Preuve. L'idée est d'exhiber une fonction pathologique qui va assurer que la méthode se comporte mal. On définit une fonction f_k comme suit :

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{4} (\langle A_k x, x \rangle - x(1)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $x(i)$ représente le i -ème élément du vecteur x et

$$A_k = \begin{pmatrix} M_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k,n-k} \end{pmatrix}$$

avec

$$M_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A_k a une structure assez familière : les k premières lignes correspondent à une discrétisation du laplacien en $1D$. C'est donc un problème qu'on peut vraiment rencontrer en analyse numérique.

Étudions la fonction f_k de plus près. La solution du problème de minimisation de f_k est caractérisée par $\nabla f(x_k) = 0$, c'est-à-dire :

$$A_k x - e_1 = 0 \quad \text{où} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système linéaire peut être résolu explicitement. On peut vérifier que le minimiseur s'écrit :

$$x_k^*(i) = \begin{cases} 1 - \frac{i}{k+1} & \text{si } i \in \{1, \dots, k\} \\ 0 & \text{si } k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

satisfait

$$f_k(x_k^*) = \frac{L}{8} \left(-1 + \frac{1}{k+1} \right). \quad (3.4)$$

et

$$\begin{aligned} \|x_k^*\|^2 &= \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{i}{k+1} \right)^2 \\ &\leq \frac{k+1}{3}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

où la dernière inégalité est obtenue en développant le carré et en vérifiant que $\sum_{i=1}^k i^2 \leq \frac{(k+3)^2}{3}$.

La remarque centrale pour comprendre pourquoi cette fonction est si pathologique est la suivante :

Lemme 3.1 *Soit $1 \leq p \leq n$, alors*

$$\text{vect}(\nabla f_p(x_0), \dots, \nabla f_p(x_{k-1})) \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$$

où

$$\mathbb{R}^{k,n} = \{x \in \mathbb{R}^n, x(i) = 0, \forall i \in \{k+1, \dots, n\}\}$$

et où la suite (x_k) est générée par une méthode de premier ordre.

Preuve. On remarque que $\nabla f(x_0) = \frac{-L}{4}e_1$, puis on procède par récurrence sur k en utilisant le fait que A est tri-diagonale. \square

Ainsi, au bout de k itérations, toute méthode de premier ordre partant du point x_0 restera bloquée sur un sous-espace vectoriel composé des k premiers vecteurs de la base canonique. On peut maintenant finir la preuve du théorème comme suit. Premièrement, on peut supposer que $x_0 = 0$ quitte à faire un changement de variable. On fixe k et on applique une méthode de premier ordre à la fonction $f = f_{2k+1}$. Ainsi $f^* = f_{2k+1}^*$ et $x^* = x_{2k+1}^*$. On a de plus :

$$f(x_k) = f_{2k+1}(x_k) = f_k(x_k) \geq f_k^*.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{f(x_k) - f^*}{\|x_0 - x^*\|^2} &\geq \frac{f_k - f^*}{\|x_0 - x^*\|^2} \\ &\geq \frac{\frac{L}{8} \left(-1 + \frac{1}{k+1} + 1 - \frac{1}{2k+2} \right)}{\frac{1}{3}(2k+2)} \\ &= \frac{3}{32} \frac{L}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité est obtenue grâce à (3.4). De plus

$$\begin{aligned} \|x_k - x^*\|_2^2 &\geq \sum_{i=k+1}^{2k+1} x_{2k+1}^*(i)^2 \\ &\geq \frac{1}{8} \|x_0 - x^*\|^2 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité en minorant la série partielle des $x_{2k+1}^*(i)^2$. \square

3.4 Complexité en optimisation fortement convexe différentiable

La complexité de la minimisation de fonctions différentiables, fortement convexes est nettement plus réjouissante comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.4 *Pour tout k , $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une fonction f , μ -fortement convexe, différentiable, à gradient L -Lipschitz telle que pour toute méthode de premier ordre de la classe \mathcal{M} , ont ait :*

$$\|x_k - x^*\|^2 \geq \left(\frac{\sqrt{Q_f} - 1}{\sqrt{Q_f} + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|^2. \quad (3.6)$$

$$f(x_k) - f(x^*) \geq \frac{\mu}{2} \left(\frac{\sqrt{Q_f} - 1}{\sqrt{Q_f} + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|^2. \quad (3.7)$$

Preuve. L'idée est à nouveau d'exhiber la fonction la pire au monde pour les méthodes de premier ordre. La preuve se fait en trois étapes :

1. On définit une fonction pathologique et on montre qu'elle est μ fortement convexe et a un gradient L Lipschitz.
2. On trouve le minimiseur explicite de cette fonction.
3. On utilise le fait qu'au bout de k itérations, toute méthode de premier ordre reste sur un espace vectoriel de dimension k pour estimer la distance au minimiseur.

1) On peut faire la preuve dans \mathbb{R}^n , mais par souci de simplicité, on se place plutôt dans l^2 , l'ensemble des suites $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, telles que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_k^2 < +\infty$. On choisit $\mu > 0$ et $L \geq \mu$ et on considère la fonction :

$$f_{\mu,L} = \frac{L - \mu}{8} \left(x(1)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (x(i) - x(i+1))^2 - 2x(1) \right) + \frac{\mu}{2} \|x\|^2.$$

En notant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$H[f]_{\mu,L}(x) = \frac{L - \mu}{8} A + \mu Id.$$

La matrice A est symétrique à diagonale dominante, elle est donc semi-définie positive et

on a $\lambda_{\min}(H[f_{\mu,L}](x)) \geq \mu$. De plus, $\lambda_{\max}(H[f_{\mu,L}](x)) \leq L$. En effet :

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= (2x(1) - x(2))^2 + \sum_{i=2}^{+\infty} (-x(i-1) + 2x(i) - x(i+1))^2 \\ &\leq (2x(1) - x(2))^2 + \sum_{i=2}^{+\infty} 2x(i-1)^2 + 4x(i)^2 + 2x(i+1)^2 \\ &\leq 8\|x\|^2 \end{aligned}$$

d'où $\lambda_{\max}(A) \leq 8$ et $\lambda_{\max}(\frac{L-\mu}{8}A + \mu I) \leq L$. Donc f est μ -fortement convexe et a un gradient L -Lispchitz.

2) On a $\nabla f_{\mu,L}(x) = \left(\frac{L-\mu}{4}A + \mu Id\right)x = e_1$. Les conditions d'optimalité peuvent donc être écrites :

$$\left(A + \frac{4}{Q_f - 1}\right)x = e_1$$

soit encore :

$$\begin{aligned} 2\frac{Q_f+1}{Q_f-1}x(1) - x(2) &= 1 \\ x(k+1) - 2\frac{Q_f+1}{Q_f-1}x(k) + x(k+1) &= 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son polynôme caractéristique :

$$q^2 - 2\frac{Q_f+1}{Q_f-1}q + 1 = 0$$

s'annule pour $q = \frac{\sqrt{Q_f-1}}{\sqrt{Q_f+1}}$. Ainsi la suite (3.8) satisfait :

$$x^*(k) = q^k.$$

3) On a vu dans la preuve du théorème précédent, qu'au bout de k itérations, toute méthode de premier ordre partant de $x_0 = 0$ satisfait $x^k \in \mathbb{R}^{k,n}$, c'est-à-dire que $x_k(i) = 0, \forall i \geq k+1$. Ainsi :

$$\|x_k - x^*\|^2 \geq \sum_{i=k+1}^{\infty} x^*(i)^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} q^{2i} = \frac{q^{2k+1}}{1-q^2}.$$

Finalement, on remarque que $\|x_0 - x^*\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{2i} = \frac{q^2}{1-q^2}$. Donc $\|x_k - x^*\|^2 \geq q^{2k}\|x_0 - x^*\|^2$.

Notons que la fonction la pire au monde est construite à partir d'un laplacien discret qui apparaît très fréquemment en analyse numérique. \square

3.5 Complexité en optimisation convexe non différentiable

Dans cette partie, on s'intéresse aux méthodes de premier ordre appliquées à la classe de problèmes suivante :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{3.9}$$

où

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.
- f est Lipschitz de constante de Lipschitz L sur une boule $B = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x^*\| \leq R\}$.

On note x^* le minimiseur du problème (3.9). En utilisant un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent, on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 3.5 *Pour toute méthode du premier ordre telle que :*

$$x_{k+1} \in \text{vect}(g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_k))$$

où $x_0 \in B$ et $g(x_i) \in \partial f(x_i)$, il existe une fonction f telle que :

$$f(x_k) - f(x^*) \geq \frac{LR}{2 + 2\sqrt{k+1}}.$$

$$\|x_k - x^*\|^2 \geq \frac{1}{8} \|x_0 - x_k\|^2.$$

Ce théorème a plusieurs conséquences désagréables :

- Cette fois-ci, si on souhaite réduire $f(x_k) - f(x^*)$ d'un facteur modeste tel que 100, il va exister des fonctions pathologiques pour lesquelles il faudra 10000 itérations. Un si grand nombre est impossible en grande dimension.
- On ne peut toujours rien dire sur la distance au minimiseur.

En conclusion : *les méthodes de sous-gradient ne doivent être utilisées que pour obtenir des solutions de précision très modérée pour des problèmes de grande taille.* On présentera une méthode optimale dans le chapitre suivant.

Notons qu'il existe de nombreuses méthodes plus efficaces de minimisation pour certaines classes de fonctions non-différentiables.

- On en verra une portant sur le TP d'échantillonnage compressif reposant sur les opérateurs proximaux.
- En petite dimension (jusqu'à $10^4 - 10^5$ variables), il existe des méthodes plus efficaces de résolution reposant essentiellement sur la notion de plan coupant [4]. Celles-ci ne fonctionnent pas sur le principe $x_{k+1} \in \text{vect}(g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_k))$, mais utilisent les sous-gradients de façon non linéaire.

Chapitre 4

Méthodes d'optimisation convexe de premier ordre

Dans ce chapitre, nous présentons des méthodes d'optimisation adaptées au cas où les fonctions à minimiser sont convexes. Ce cadre est à peu près le seul pour lequel on peut donner des résultats de convergence vers un minimum global. Les résultats de convergence donnés sont cependant valables aussi pour des fonctions non convexes, au voisinage des minimiseurs. En effet, au voisinage d'un minimiseur, une fonction est localement convexe. Par exemple les fonctions C^2 ont une hessienne demi-définie positive.

Dans la partie précédente, nous avons déterminé des bornes majorant l'efficacité des méthodes d'optimisation convexe reposant sur des combinaisons linéaires de gradients ou de sous-gradients. Notre objectif dans cette partie, est de présenter des méthodes optimales, dans le sens où elles atteignent ces bornes.

4.1 Méthodes optimales en optimisation convexe différentiable

4.1.1 Cas convexe différentiable

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la minimisation de fonctions convexes, différentiables à gradient Lipschitz de constante L .

Descente de gradient à pas fixe

La méthode de descente de gradient à pas fixe est probablement la méthode d'optimisation la plus simple à laquelle on puisse penser. Le théorème suivant résume ses propriétés de convergence.

Théorème 4.1 *La descente de gradient à pas fixe :*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\nabla f(x_k)}{L}$$

est une méthode sous-optimale, elle assure que :

$$f(x_k) - f^* = O\left(\frac{L\|x_0 - x^*\|^2}{k}\right)$$

Avant de passer à la preuve de ce théorème, on peut formuler plusieurs remarques :

- Il est un peu tôt pour affirmer que ce taux de convergence est sous-optimal. On a montré dans le théorème (3.3) qu'on ne pouvait pas faire mieux qu'un taux de convergence en $O\left(\frac{L\|x_0 - x^*\|^2}{k^2}\right)$, mais on n'a pas encore montré qu'on pouvait atteindre ce taux. On le montrera en exhibant une méthode optimale (voir Théorème 4.2).
- Le choix du pas de descente en $\frac{1}{L}$ peut paraître arbitraire à première vue. On peut cependant montrer que la descente de gradient converge pour un pas de descente compris dans l'intervalle $]0, \frac{2}{L}[$. De plus ce choix a une très bonne justification qui apparaît dans la preuve et il peut être considéré comme optimal.
- Les techniques de recherche linéaires de type pas optimal ou Wolfe ne peuvent pas améliorer la situation. En effet, la descente de gradient sans mémoire, qui utilise *uniquement* le gradient à l'itération courante, ont au mieux un taux de convergence en $O\left(\frac{1}{k}\right)$.

On passe maintenant à la preuve du théorème 4.1.

Preuve. Les fonctions différentiables à gradient L -Lipschitz satisfont (voir lemme 2.13) :

$$f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|^2$$

En posant $x_{k+1} = x_k - \tau \nabla f(x_k)$ et en choisissant $y = x_{k+1}$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &\leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &= f(x_k) - \tau \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L\tau^2}{2} \|\nabla f(x_k)\|^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pour trouver le pas τ , il est naturel de chercher à minimiser (4.1) par rapport à τ . On obtient facilement $\tau = \frac{1}{L}$. Avec ce choix on a :

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{2L}. \quad (4.2)$$

On note $\Delta_k = f(x_k) - f^*$. L'inégalité de convexité sur f assure que :

$$f(x^*) \geq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Delta_k &\leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|\nabla f(x_k)\| \cdot \|x_k - x^*\| \\ &\leq \|\nabla f(x_k)\| \cdot M\end{aligned}\tag{4.3}$$

Dans la dernière inégalité la constante M est le diamètre d'une boule de centre x^* contenant toute la suite (x_k) . On laisse la démonstration que la suite est bornée (et donc que $M < +\infty$) en exercice.

En combinant (4.2) et (4.3) on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_{k+1} &\leq \Delta_k - \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{2L} \\ &\leq \Delta_k - \frac{\Delta_k^2}{2LM^2}.\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta_{k+1}} &\geq \frac{1}{\Delta_k \left(1 - \frac{\Delta_k}{2LM^2}\right)} \\ &\geq \frac{1}{\Delta_k} \left(1 + \frac{\Delta_k}{2LM^2}\right).\end{aligned}$$

Finalement, en sommant ces inégalités de $k = 0$ à $k = N - 1$, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta_N} \geq \frac{1}{\Delta_0} + \frac{N}{2LM^2}$$

soit encore :

$$\Delta_N \leq O\left(\frac{2LM^2(\Delta_0 + 1)}{\Delta_0 N + 2LM^2}\right).$$

□

Descentes de gradient accélérées

On a vu que pour toutes les méthodes de premier ordre, il existe des fonctions pathologiques telles que $f(x_k) - f^* \geq O\left(\frac{L}{k^2}\right)$. On peut se demander s'il existe des méthodes optimales qui convergent en $O\left(\frac{L}{k^2}\right)$. La réponse est oui, elle a été donnée en 1987 par Y. Nesterov [REF]. C'est un sujet de recherche actif en ce moment et de nombreuses extensions à des cas plus complexes ont été proposées récemment.

L'idée - similaire aux méthodes de gradient conjugué linéaire - est de définir x_{k+1} comme un élément de $\text{vect}(\nabla f(x_0), \dots, \nabla f(x_k))$ plutôt que de n'utiliser que le gradient à l'itération courante. L'intuition derrière ce choix est que le gradient d'une fonction convexe apporte une information globale sur la topologie de la fonction et ne doit pas être considéré simplement comme une direction de descente locale.

Les premiers schémas optimaux sont dus à Boris Polyak qui a proposé une classe de méthodes appelée “Heavy ball” (balle lourde). Un problème important des descentes de gradient est qu’elles ont tendance à produire des directions de descentes orthogonales. Cet effet se voit sur la figure 2.12. L’intuition des méthodes heavy ball est de laisser tomber une boule sur le graphe de la fonction et de la soumettre à son poids en considérant en plus les forces de friction.

Ceci peut être réalisé en considérant l’EDO suivante :

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta \nabla f(x) = 0$$

où α et β sont des réels positifs.

Une discrétisation de cette EDO peut s’écrire sous la forme :

$$\frac{-x_{k+1} + 2x_k - x_{k-1}}{\Delta t} + \alpha \frac{(x_{k+1} - x_k)}{\Delta t} + \beta \nabla f(x_k) = 0$$

Soit encore - en autorisant les paramètres α et β à varier au cours des itérations :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) + \beta_k (x_k - x_{k-1}) \quad (4.4)$$

On obtient ainsi une classe de méthodes d’optimisation qui doivent permettre de réduire les oscillations de la figure 2.12. Notons que la direction de descente est cette fois de la forme $\alpha_k \nabla f(x_k) - \beta_k (x_k - x_{k-1})$ et qu’en développant le terme $x_k - x_{k-1}$, on va retrouver des éléments de $\text{vect}(\nabla f(x_0), \dots, \nabla f(x_k))$ tout entier.

Le choix optimal des paramètres α et β ainsi que le taux de convergence de cette méthode est résumé dans le théorème suivant :

Théorème 4.2 *L’algorithme suivant :*

Algorithm 2: Une descente de gradient accélérée dans le cas convexe, différentiable.

Input:

N : un nombre d’itération.

x_0 : un point de départ.

Output:

x_N : une solution approchée.

begin

$t_1 = 1 ; y_1 = x_0.$

for k allant de 0 à N **do**

$x_k = y_k - \frac{\nabla f(y_k)}{L}.$

$y_{k+1} = x_k + \left(\frac{k-1}{k+2}\right) (x_k - x_{k-1})$

assure que :

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \frac{L \|x^0 - x^*\|^2}{k^2}.$$

C’est un taux de convergence optimal.

Nous ne proposons pas de preuve ici car elle est longue et complexe. Nous référons le lecteur intéressé à la référence [5] ou [2].

Finissons ce paragraphe par quelques remarques :

- La complexité de cette méthode vient compléter le théorème (3.3) : la complexité de la classe des fonctions convexe différentiables est bien en $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
- Cette méthode est donc optimale pour cette classe de fonctions, dans le sens où elle se comporte au mieux uniformément sur toute la classe. Notons cependant que pour des problèmes particuliers, il est possible que d'autres méthodes aient un meilleur comportement. Par exemple, on verra plus tard que les simples descentes de gradients exploitent automatiquement la forte convexité des fonctions, tandis qu'il faut modifier les descentes de gradient accélérées. Ainsi une simple descente de gradient peut être plus efficace que la méthode ci-dessus pour certains problèmes.
- Il est en général possible d'obtenir de meilleurs taux de convergence en utilisant des outils ou propriétés plus fines des fonctions à minimiser. Par la suite, on expliquera rapidement les techniques liées à la forte convexité ainsi que certaines méthodes de préconditionnement. On verra aussi que cette méthode se généralise à des cas non différentiables en TP.

4.1.2 Cas fortement convexe différentiable

On considère maintenant le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{4.5}$$

où :

1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe différentiable.
2. f est μ -fortement convexe.
3. ∇f est L -Lipschitz.

D'après la proposition 2.10, les taux de convergence obtenus dans le cas différentiable (théorèmes 4.1 et 4.2) permettent directement d'obtenir un taux de convergence en norme. Cependant quand une fonction est à la fois différentiable et fortement convexe, on peut obtenir des taux de convergence linéaires, qui sont bien meilleurs asymptotiquement que les taux sous-linéaires vus jusqu'à présent.

Théorème 4.3 Soit f une fonction satisfaisant les hypothèses 1-3 ci-dessus. Alors la descente de gradient :

$$x_{k+1} = x_k - \tau \nabla f(x_k)$$

avec $\tau = \frac{2}{\mu+L}$ assure que :

$$\|x_k - x^*\| \leq \left(\frac{Q_f - 1}{Q_f + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|.$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{L}{2} \left(\frac{Q_f - 1}{Q_f + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|^2$$

où $Q_f = \frac{L}{\mu}$ est le conditionnement de f .

Preuve. [A FAIRE] □

Encore une fois, la descente de gradient est sous-optimale et on peut définir des méthodes plus efficaces. Une telle méthode est proposée ci-dessous :

Algorithm 3: Une descente de gradient accélérée dans le cas fortement convexe.

Input:

N : un nombre d'itération.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$: un point de départ.

Output:

x_N : une solution approchée.

begin

$y_0 = x_0$.

for k allant de 0 à N **do**

$x_{k+1} = y_k - \frac{\nabla f(y_k)}{L}$.

$y_{k+1} = x_{k+1} + \left(\frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} \right) (x_{k+1} - x_k)$

Le théorème suivant résume ses propriétés :

Théorème 4.4 Soit f une fonction μ -fortement convexe à gradient L -Lipschitz. Alors l'algorithme ci-dessus assure que :

$$\|x_k - x^*\| \leq \left(\frac{\sqrt{Q_f} - 1}{\sqrt{Q_f} + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|.$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{L}{2} \left(\frac{\sqrt{Q_f} - 1}{\sqrt{Q_f} + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|^2$$

où $Q_f = \frac{L}{\mu}$ est le conditionnement de f .

Preuve. Pour simplifier l'analyse, on se place dans le cas où f est C^2 , ce qui permet de se ramener à l'analyse des valeurs propres d'une hessienne. Cette hypothèse peut être

contournée par un raisonnement un peu plus complexe. L'idée de la preuve consiste à analyser $\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \|x_k - x^*\|^2$, à la place de $\|x_k - x^*\|^2$. La fonction $\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \|x_k - x^*\|^2$ est appelée fonction de Lyapunov car elle décroît au fil des itérations. On considère la récurrence :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) + \beta_k (x_k - x_{k-1})$$

qui correspond à la discrétisation de l'équation différentielle (4.4). On a :

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} x_{k+1} - x^* \\ x_k - x^* \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) + \beta_k (x_k - x_{k-1}) - x^* \\ x_k - x^* \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - x^* \\ x_{k-1} - x^* \end{bmatrix} - \alpha_k \begin{bmatrix} \nabla f(x_k) \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k H[f](z) & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \right\|^2 \cdot \left\| \begin{bmatrix} x_k - x^* \\ x_{k-1} - x^* \end{bmatrix} \right\|^2 \end{aligned}$$

Puis on cherche les pas α_k et β_k de manière à obtenir le meilleur taux de convergence. On cherche donc à résoudre :

$$\min_{\alpha_k, \beta_k} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k H[f](z) & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \right\| \quad (4.6)$$

Evaluons

$$M = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k H[f](z) & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \right\|.$$

Comme $H[f](z)$ est semi-définie positive, on peut écrire $H[f](z) = U^* \Sigma U$ où U est unitaire et $\Sigma = \text{diag}((\sigma_i)_{i=1..n})$ est diagonale à coefficients positifs. On a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k H[f](z) & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \right\| &= \left\| \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k \Sigma & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \max_{i \in 1, \dots, n} \left\| \begin{bmatrix} 1 + \beta_k - \alpha_k \sigma_i & -\beta_k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

De plus par hypothèse, on a $\sigma_i \geq \mu$ et $\sigma_i \leq L$. Le polynôme caractéristique des matrices 2×2 dans la dernière équation s'écrit :

$$\rho^2 - \rho(1 + \beta_k - \alpha_k \sigma_i) + \beta_k$$

et ses racines sont

$$\frac{1 + \beta_k - \alpha_k \sigma_i \pm \sqrt{(1 + \beta_k - \alpha_k \sigma_i)^2 - 4\beta_k}}{2}.$$

Dans le cas où $\beta_k \geq (1 - \sqrt{\alpha_k \sigma_i})$,

et

$$\alpha_k = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{l})^2}.$$

On obtient :

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} (1 + \beta_k)I - \alpha_k \nabla^2 f(z) & -\beta_k I \\ I & 0 \end{bmatrix} \right\| \leq \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right).$$

□

4.2 Méthodes optimales en optimisation convexe non différentiable

Dans cette partie, on s'intéresse aux méthodes de premier ordre appliquées à la classe de problèmes suivante :

$$\min_{x \in X \subset \mathbb{R}^n} f(x) \quad (4.7)$$

où

- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe, borné¹.
- f est Lipschitz de constante L sur X .

On note x^* un minimiseur du problème (4.7). Notons que ce problème n'a pas de raison particulière d'admettre un minimiseur unique.

Contrairement au cas différentiable où les simples descentes de gradients étaient sous-optimales, on va voir que les descentes de sous-gradient sont optimales au sens où elles permettent d'atteindre le taux en $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ du théorème 3.5.

Algorithm 4: Descente de sous-gradient projeté (cas convexe, non différentiable).

Input:

N : un nombre d'itérations.

$x_0 \in X$: un point de départ.

$(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$: une suite de pas telle que

- $h_k > 0$. - $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = 0$ - $\sum_{k=0}^{\infty} h_k = +\infty$.

Output:

x_N : une solution approchée.

begin

for k allant de 0 à N **do**

 Trouver $\eta_k \in \partial f(x_k)$

$x_{k+1} = \Pi_X \left(x_k - h_k \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \right)$.

1. Cette dernière hypothèse n'est pas nécessaire, mais simplifie la preuve de convergence

Avant d'analyser les propriétés de convergence de cet algorithme, expliquons ses spécificités :

- On a utilisé ici l'opérateur de projection sur X , Π_X . Lorsque le problème n'est pas contraint, on peut toujours utiliser l'algorithme $x_{k+1} = x_k - h_k \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}$ qui a les mêmes propriétés de convergence.
- Le sous-gradient est ici normalisé, contrairement à la descente de gradient. Il est facile de comprendre l'intérêt de cette normalisation de façon géométrique. Dans le cas différentiable, le gradient tend vers 0 lorsqu'on se rapproche du minimiseur. Dans le cas non différentiable, ce n'est pas le cas. Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ satisfait $\partial f(x) = \text{signe}(x)$ pour $x \neq 0$. Le sous-gradient est donc de norme 1 même très près du minimiseur.
- Les deux conditions $\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{\infty} h_k = +\infty$ indiquent que les pas doivent tendre vers 0, mais pas trop rapidement. Par exemple, une décroissance en $O\left(\frac{1}{k}\right)$ est trop rapide car la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. Par contre une décroissance en $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ satisfait les deux conditions. On verra par la suite que ce choix est optimal. Si la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne tendait pas vers 0, on observerait dans beaucoup de cas des oscillations autour du minimum et pas de convergence. Par exemple, il est facile de voir que la méthode de descente de sous-gradient à pas constant ne converge pas si on l'applique à la fonction $f(x) = |x|$.

Théorème 4.5 On note $f_k^* = \min_{k \in \{0, \dots, k\}} f(x_k)$ et R le diamètre de l'ensemble X .

Alors :

$$f_k^* - f^* \leq L \frac{R^2 + \sum_{i=0}^k h_i^2}{2 \sum_{i=0}^k h_i}.$$

En particulier si $h_k = \frac{R}{\sqrt{N+1}}$, on a un taux "optimal" et :

$$f_k^* - f^* \leq \frac{LR}{\sqrt{N+1}}.$$

Notons que le taux est optimal au sens où la borne dans le théorème (3.3) est atteinte.

Preuve. On commence par montrer que le fait que f soit Lipschitz implique que les sous-gradients de f sont bornés. On a $\forall (x, y) \in X^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$$

or par définition du sous-différentiel :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \eta, y - x \rangle$$

où $\eta \in \partial f(x)$. En combinant ces deux inégalités, on obtient :

$$|\langle \eta, y - x \rangle| \leq L\|x - y\|, \quad \forall y \in X.$$

En particulier pour $y = \eta + x$, on obtient $\|\eta\| \leq L$. Les sous-gradients ont donc une norme majorée par L .

Contrairement aux descentes de gradient, la preuve de convergence ne repose pas ici sur la décroissance monotone de la fonction coût, mais sur le fait que la distance au minimiseur diminue. On a :

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - h_k \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}\|^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + h_k^2 - 2h_k \langle x_k - x^*, \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \rangle.\end{aligned}$$

Or $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle \eta_k, x^* - x_k \rangle$ (par définition du sous-gradient). Donc

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 + h_k^2 - 2 \frac{h_k}{\|\eta_k\|} (f(x_k) - f(x^*)).$$

En sommant de $k = 0$ à N et en utilisant le fait que $\|\eta\| \leq L$ on obtient :

$$\|x_{N+1} - x^*\|^2 \leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^N h_k^2 - \frac{2h_k}{L} (f(x_k) - f(x^*))$$

D'où :

$$\begin{aligned}2 \sum_{k=0}^N \frac{h_k}{L} (f(x_k) - f(x^*)) &\leq -\|x_{N+1} - x^*\|^2 + \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^N h_k^2 \\ &\leq R^2 + \sum_{k=0}^N h_k^2.\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure :

$$\min_{k \in \{0, \dots, N\}} f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{R^2 + \sum_{k=0}^N h_k^2}{2 \sum_{k=0}^N \frac{h_k}{L}}.$$

□

4.3 Les descentes de gradient proximales

Dans cette partie, on considère le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = g(x) + h(x) \quad (4.8)$$

où :

— $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, différentiable de gradient L Lipschitz :

$$\|\nabla g(x_1) - \nabla g(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (4.9)$$

— $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe, fermée.

On suppose que ce problème admet au moins une solution et on note X^* l'ensemble (convexe fermé) des minimiseurs. Les conditions d'optimalité de ce problème sont :

$$\begin{aligned}0 &\in \partial h(x) + \nabla g(x) \\ \Leftrightarrow x - t \nabla g(x) &\in t \partial h(x) + x, \quad \forall t \geq 0 \\ \Leftrightarrow x &\in (t \partial h + I_n)^{-1}(x - t \nabla g(x)) \\ \Leftrightarrow x &\in \text{Prox}_{th}(x - t \nabla g(x)).\end{aligned}$$

4.3.1 Descente de gradient proximale

Cette caractérisation des solutions en terme de point fixe de l'opérateur $F : x \mapsto \text{Prox}_{th}(x - t\nabla g(x))$ donne envie d'appliquer le schéma itératif suivant :

Définition 4.1 (Descente de gradient proximale)

$$x_{k+1} = \text{Prox}_{th}(x_k - t\nabla g(x_k)). \quad (4.10)$$

Malheureusement, F n'est pas contractante en général, mais seulement non expansive. Les preuves de convergence linéaires qui reposent sur des itérées de contractions ne fonctionnent donc pas pour analyser ce schéma. De façon générale, on obtient tout de même des résultats de convergence sous-linéaire :

Théorème 4.6 *Le schéma de descente (4.10) assure que $f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{k}$ pour $t = \frac{1}{L}$.*

Pour démontrer ce théorème on commence par réécrire l'itération (4.10) sous la forme :

$$x_{k+1} = x_k - tG_t(x) \quad (4.11)$$

avec

$$G_t(x) = \frac{1}{t}(x - \text{Prox}_{th}(x - t\nabla g(x))). \quad (4.12)$$

La fonction $G_t(x)$ peut être interprétée comme une direction de descente au point x . Notons que $G_t(x) = 0 \Leftrightarrow x \in X^*$ et que

$$G_t(x) \in \nabla g(x) + \partial h(x - tG_t(x)). \quad (4.13)$$

On a aussi besoin des lemmes suivant :

Lemme 4.1 *La fonction g satisfait les inégalités suivantes :*

$$g(x_2) \geq g(x_1) + \langle \nabla g(x_1), x_2 - x_1 \rangle \quad (\text{convexité}) \quad (4.14)$$

$$g(x_2) \leq g(x_1) + \langle \nabla g(x_1), x_2 - x_1 \rangle + \frac{L}{2}\|x_2 - x_1\|_2^2 \quad (\text{gradient Lipschitz}). \quad (4.15)$$

Lemme 4.2 (Inégalité globale) *Pour $t \in]0, \frac{1}{L}]$, et pour tout $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a :*

$$f(x - tG_t(x)) \leq f(z) + \langle G_t(x), x - z \rangle - \frac{t}{2}\|G_t(x)\|_2^2. \quad (4.16)$$

Preuve. On pose $v = G_t(x) - \nabla g(x)$. On a :

$$\begin{aligned} & f(x - G_t(x)) \\ & \leq g(x) - t\langle \nabla g(x), G_t(x) \rangle + \frac{t}{2}\|G_t(x)\|_2^2 + h(x - tG_t(x)) \\ & \leq g(z) + \langle \nabla g(x), x - z \rangle - t\langle \nabla g(x), G_t(x) \rangle + \frac{t}{2}\|G_t(x)\|_2^2 \\ & \quad + h(z) + \langle v, x - z - tG_t(x) \rangle \\ & \leq g(z) + h(z) + \langle G_t(x), x - z \rangle - \frac{t}{2}\|G_t(x)\|_2^2. \end{aligned}$$

Le passage de la première ligne à la deuxième est liée à la convexité de g et de h et au fait que $v \in \partial h(x - tG_t(x))$. \square Ce lemme est important car en notant $x^+ = x - tG_t(x)$:

— en prenant $z = x$, on voit que la méthode est une méthode de descente :

$$f(x^+) \leq f(x) - \frac{t}{2} \|G_t(x)\|_2^2. \quad (4.17)$$

— en prenant $z = x^*$, on voit que la distance au minimiseur décroît² :

$$0 \leq f(x^+) - f^* \quad (4.18)$$

$$\leq \langle G_t(x), x - x^* \rangle - \frac{t}{2} \|G_t(x)\|_2^2 \quad (4.19)$$

$$= \frac{1}{2t} \left(\|x - x^*\|_2^2 - \|x - x^* - tG_t(x)\|_2^2 \right) \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{2t} \left(\|x - x^*\|_2^2 - \|x^+ - x^*\|_2^2 \right). \quad (4.21)$$

Pour conclure, il suffit de poser $x^+ = x_{k+1}$ et $x = x_k$ dans l'inégalité (4.21) et de sommer les inégalités de 1 à k :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^k f(x_i) - f^* \\ &\leq \frac{1}{2t} \sum_{i=1}^k \left(\|x_{i-1} - x^*\|_2^2 - \|x_i - x^*\|_2^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2t} \left(\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2t} \|x_0 - x^*\|_2^2. \end{aligned}$$

Comme la suite $(f(x_k))$ est décroissante, on obtient finalement :

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(x_i) - f(x^*) \leq \frac{1}{2kt} \|x_0 - x^*\|. \quad (4.22)$$

4.3.2 Descentes de gradient proximales accélérées

On peut montrer que le schéma précédent est sous-optimal (voir notes de cours envoyées) et l'accélérer. Nous présentons maintenant une version accélérée du schéma précédent et montrons qu'elle converge en $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Définition 4.2 (Descente de gradient proximale accélérée)

0/ Choisir $x_0 \in \text{dom}(h)$ et $y_0 = x_0$.

1/ $x_k = \text{Prox}_{th}(y_k - t\nabla g(y_k))$

2/ $y_k = x_k + \frac{k-1}{k+2}(x_k - x_{k-1})$.

2. cette étape de démonstration est très commune pour démontrer des taux de convergence sous-linéaires.

Les avantages principaux du schéma précédent sont sa faible complexité numérique ainsi que son bon comportement de convergence résumé dans le théorème suivant :

Théorème 4.7 *La descente de gradient proximale accélérée assure que :*

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{(k+1)^2}. \quad (4.23)$$

Preuve. On pose $v_0 = x_0$, $\theta_k = \frac{2}{k+1}$ et $v_k = x_{k-1} + \frac{1}{\theta_k}(x_k - x_{k-1})$. Ainsi, on a :

$$y_k = (1 - \theta_{k+1})x_k + \theta_{k+1}v_k \quad (4.24)$$

avec

$$\begin{aligned} v_k &= x_{k-1} + \frac{1}{\theta_k}(y_{k-1} - tG_t(y_k) - x_{k-1}) \\ &= v_{k-1} - \frac{t}{\theta_k}G_t(y_{k-1}). \end{aligned}$$

Finalement, on remarque que $\frac{(1-\theta_k)}{\theta_k^2} \leq \frac{1}{\theta_{k-1}^2}$.

L'idée de la preuve repose essentiellement sur l'inégalité (4.16) avec $z = x$ et $z = x^*$ et en faisant une combinaison convexe. On pose $x = x_i$, $x^+ = x_i$, $y = y_{i-1}$, $v = v_{i-1}$, $v^+ = v_i$ et $\theta = \theta_i$. On a :

$$\begin{aligned} f(x^+) &\leq (1 - \theta)f(x) + \theta f^* + \langle G_t(y), y - (1 - \theta)x - \theta x^* \rangle - \frac{t}{2}\|G_t(x)\|_2^2 \\ &= (1 - \theta)f(x) + \theta f^* + \langle G_t(y), v - x^* \rangle - \frac{t}{2}\|G_t(y)\|_2^2 \\ &= (1 - \theta)f(x) + \theta f^* + \frac{\theta^2}{2t} \left(\|v - x^*\|_2^2 - \|v - x^* - \frac{t}{\theta}G_t(y)\|_2^2 \right) \\ &= (1 - \theta)f(x) + (\theta - 1)f^* + f^* + \frac{\theta^2}{2t} \left(\|v - x^*\|_2^2 - \|v^+ - x^*\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Cette inégalité permet d'obtenir :

$$\frac{1}{\theta_i^2}(f(x_i) - f(x^*)) + \frac{1}{2t}\|v_i - x^*\|_2^2 \leq \frac{1 - \theta_i}{\theta_i^2}(f(x_{i-1}) - f^*) + \frac{1}{2t}\|v_{i-1} - x^*\|_2^2. \quad (4.25)$$

En prenant $t = \frac{1}{L}$ et en utilisant le fait que $\frac{1-\theta_i}{\theta_i^2} \leq \frac{1}{\theta_{i-1}^2}$ par récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta_k^2}(f(x_k) - f^*) + \frac{1}{2t}\|v_k - x^*\|_2^2 \\ &\leq \frac{1 - \theta_1}{\theta_1^2}(f(x_0) - f^*) + \frac{1}{2t}\|v_0 - x^*\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2t}\|x_0 - x^*\|_2^2. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient donc :

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{\theta_k^2}{2t} \|x_0 - x^*\|_2^2 = \frac{2}{(k+1)^2 t} \|x_0 - x^*\|_2^2. \quad (4.26)$$

□

4.3.3 Exemples d'application

[Montrer comment appliquer le schéma sur un pb l1 l2.]

4.4 Dualité pour les problèmes fortement convexes

Dans cette partie, nous nous intéressons au problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P(x) = g(Ax) + h(x) \quad (4.27)$$

où :

- $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe fermée.
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une application linéaire.
- $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction fortement convexe, de paramètre de forte convexité σ .

L'algorithme présenté précédemment ne peut pas être appliqué en général car aucune des fonctions $g \circ A$ et g ne sont supposées différentiables. De plus, même si h l'était, il est en général impossible d'obtenir une formule explicite de l'application $\text{Prox}_{g \circ A}$. Pour introduire le prochain algorithme, nous présentons d'abord deux résultats importants d'analyse convexe.

Théorème 4.8 (Dualité de Fenchel-Rockafellar) Soient f et g deux fonctions convexes fermées et $A \in \mathbb{R}^m \times n$ une transformée linéaire telles que

$$A(\text{ri}(\text{dom}(h))) \cap (\text{ri}(\text{dom}(g))) \neq \emptyset. \quad (4.28)$$

Alors :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(Ax) + h(x) = - \inf_{y \in \mathbb{R}^m} g^*(y) + h^*(-A^*y). \quad (4.29)$$

Le problème de gauche est appelé problème primal et celui de droite est appelé problème dual.

Les conditions d'optimalité du problème primal-dual (4.29) sont :

Théorème 4.9

$$y^* \in \partial g(Ax^*) \quad (4.30)$$

$$x^* \in \partial h^*(-A^*y^*). \quad (4.31)$$

Pour finir donnons un résultat :

Théorème 4.10 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe fermée. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- f est différentiable à gradient L -Lipschitz.
- f^* est fortement convexe de module $\frac{1}{L}$.

Ce théorème et l'inclusion (4.31) motive l'utilisation de l'algorithme suivant pour résoudre (4.27) :

Définition 4.3 (Descente de gradient duale) Générer une suite minimisante (y_k) (par exemple les descentes proximales ou les descentes proximales accélérées) pour le problème suivant :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} D(y) = g^*(y) + h^*(-A^*y). \quad (4.32)$$

Définir la suite :

$$x_k = \nabla h^*(-A^*y_k^*). \quad (4.33)$$

Le théorème suivant permet d'obtenir des garanties théoriques sur la rapidité de convergence :

Théorème 4.11 L'algorithme précédent assure que :

$$\|x_k - x^*\|_2^2 \leq \frac{2}{\sigma} (d(y_k) - d(y^*)). \quad (4.34)$$

En particulier, si une descente de gradient proximale accélérée est utilisée pour minimiser D , on obtient :

$$\|x_k - x^*\|_2^2 \leq \frac{2\|A\|^2 \|y_0 - y^*\|_2^2}{\sigma^2 (k+1)^2}. \quad (4.35)$$

Bibliographie

- [1] H. H. Bauschke and P. L. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] A. Beck and M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM journal on imaging sciences*, 2(1) :183–202, 2009.
- [3] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms I : fundamentals*, volume 305. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] K. C. Kiwiel. Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization. *Mathematical programming*, 46(1-3) :105–122, 1990.
- [5] Y. Nesterov. *Introductory lectures on convex optimization*, volume 87. Springer Science & Business Media, 2004.
- [6] Y. Nesterov. Gradient methods for minimizing composite functions. *Mathematical Programming*, 140(1) :125–161, 2013.
- [7] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton university press, 2015.
- [8] C. Zalinescu. *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific, 2002.