INSA TOULOUSE
Département STPI
$3^{\text{ème}}$ année MIC

Année 2014-2015

Examen (01/06/2015) – 1h30
UV Modélisation
Partie - Problèmes inverses

Documents autorisés, barème indicatif.

Exercice 1 - Convexité et solutions

On s'intéresse au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x).$$

1. Pour commencer, on suppose que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe. Est-ce que ce problème admet toujours une solution ? Si oui, justifier, si non, donner un contre-exemple.
2. Est-ce que lorsqu'une solution existe, ce problème admet une solution unique ? Si oui, justifier, si non, donner un contre-exemple.
3. On suppose maintenant f strictement convexe. Est-ce que ce problème admet toujours une solution ? Si oui, justifier, si non, donner un contre-exemple.
4. Est-ce que ce problème admet une solution unique ? Si oui, justifier, si non, donner un contre-exemple.
5. On pose maintenant $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$ où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Est-ce que f est convexe (ne pas justifier) ?
6. Est-ce que f est strictement convexe ? Justifier en deux mots.
7. Est-ce qu'elle admet un minimiseur ? Justifier en deux mots.
8. Est-ce qu'elle admet un minimiseur unique ? Justifier en deux mots.

Exercice 2 - Pseudo-inverse et projections orthogonales

Note : dans cet exercice, vous pouvez résoudre les questions 4, 5, 6, même si vous n'avez pas répondu aux questions 1, 2 et/ou 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice ayant une SVD de la forme $A = U\Sigma V^T$ où $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont deux matrices orthogonales et $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une matrice de la forme :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \Sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

On note $u_i \in \mathbb{R}^m$ la i-ème colonne de U et $v_i \in \mathbb{R}^n$ la i-ème colonne de V. On rappelle qu'une manière de définir la pseudo-inverse A^+ de A est :

$$A^+ = V\Sigma^+U^T \qquad \text{où} \qquad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix}.$$

1. Soit $P = AA^+$. Montrez que P est une matrice de *projection orthogonale*, c'est-à-dire que $P^2 = P$ (idempotence) et $P^* = P$ (symétrie hermitienne).
2. Le but de cette question est de montrer que l'espace de projection est $Im(A)$. Rappeler comment définir $Im(A)$ en fonction des vecteurs u_i et/ou v_i.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrez que le vecteur $w = x - Px$ est orthogonal à $Im(A)$ et conclure.

4. Nous concluons par une application numérique. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminez une SVD de A.
5. Que vaut $Im(A)$?
6. Vérifiez que $P = AA^{+}$ est bien l'opérateur de projection orthogonale sur $Im(A)$.