INSA TOULOUSE Année 2015-2016
Département STPI
$3^{\text{ème}}$ année MIC

Correction Examen
UV Des données aux modèles
Partie - Problèmes inverses

I/ Exercices de chauffe

1. *Rappelez au moins deux caractérisations des matrices symétriques définies positives (SDP).*
Correction : Les matrices SDP réelles de taille n sont les matrices symétriques $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ qui satisfont une des quatres conditions suivantes :
– $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
– Toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
– L'application $(x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle$ définit un produit scalaire.
– Il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible (souvent notée $A^{1/2}$ ou $\sqrt{A}$) telle que $A = B^2$.
2. *Soit $J(x) = \langle Ax, x\rangle$ où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice arbitraire. Déterminez $\nabla J(x)$.*
Correction : On a
$$\begin{aligned} J(x+h) &= \langle A(x+h), (x+h)\rangle \\ &= \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle Ah, h\rangle \\ &= J(x) + \langle Ax, h\rangle + \langle h, A^*x\rangle + o(\|h\|_2^2). \end{aligned}$$
Par identification de la partie linéaire en h, on obtient $\nabla J(x) = Ax + A^*x$.
3. *Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice arbitraire. Calculez les valeurs singulières de la matrice B suivante en fonction de celles de A.*
$$B = \begin{pmatrix} 0_{m,m} & A \\ A^* & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$
Correction : On a $B^* = B$, d'où :
$$\begin{aligned} B^*B &= \begin{pmatrix} 0 & U\Sigma V^T \\ V\Sigma^T U & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U\Sigma V^T \\ V\Sigma^T U & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U\Sigma\Sigma^T U^T & 0 \\ 0 & V\Sigma^T\Sigma V^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma\Sigma^T & 0 \\ 0 & \Sigma^T\Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & V^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
La matrix $W = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. Dans la dernière égalité, on a donc obtenu une diagonalisation de B^*B. Les valeurs propres de B^*B se lisent sur la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \Sigma\Sigma^T & 0 \\ 0 & \Sigma^T\Sigma. \end{pmatrix}$ Elles sont égales à σ_k^2, le carré des valeurs singulières de A. Les valeurs singulières de B sont égales à la racine des valeurs propres de B^*B. Donc les valeurs propres de B ordonnées sont donc : $(\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \geq \sigma_n)$.

II/ Problème inverse

On pose
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminez l'image de A.*

   Correction : On a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

2. *Déterminez le rang de A.*

   Correction : On a $\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$, car les deux dernières colonnes sont linéairement dépendantes.

3. *On pose $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. On considère le problème inverse suivant :*

   "Etant donné $b \in F$, trouver $x \in E$ tel que $Ax = b$".

   Est-ce que le problème suivant est bien posé pour des perturbations du second membre dans F ?

   Correction : Non. La solution n'est pas unique car deux colonnes sont linéairement dépendantes.

4. *Est-ce que le problème suivant est bien posé pour des perturbations du second membre dans $\mathbb{R}^4$?*

   Correction : Le problème n'est pas bien posé car pour des perturbations dans $\mathbb{R}^4$, la solution du problème perturbé peut ne pas exister.

III/ Courant-Fischer

Le théorème de Courant-Fischer est un résultat fondamental qui caractérise les valeurs propres d'une matrice symétrique. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et soit S_k l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Comme A est symétrique, elle est diagonalisable et on note $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres. Le théorème de Courant-Fischer est le suivant :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_k = \sup_{V\in S_k} \inf_{x\in V, \|x\|_2=1} \langle Ax, x\rangle. \tag{1}$$

L'équation (1) devient ainsi

$$\lambda_1 = \sup_{V=\mathrm{vect}(x), \|x\|_2=1} \langle Ax, x\rangle. \tag{2}$$

1. *Vérifiez la formule pour $k = 1$.*

   Correction : Si V est un sous-espace de dimension 1, il s'écrit $V = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$ pour un certain $x \neq 0$ de norme 1. Ainsi,

   $$\inf_{x\in V, \|x\|_2=1} \langle Ax, x\rangle = \langle Ax, x\rangle. \tag{3}$$

   et

   $$\sup_{x\in \mathbb{R}^n, \|x\|_2=1} \langle Ax, x\rangle. \tag{4}$$

   qui est une caractérisation des valeurs propres.

2. *Soit $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice arbitraire dont la k-ième valeur singulière est notée σ_k. Montrez que :*

   $$\sigma_k = \sup_{V\in S_k} \inf_{x\in S_k, \|x\|_2=1} \|Mx\|_2.$$

   Correction : On pose

   $$\begin{aligned}\alpha_k = &\sup_{V\in S_k} \inf_{x\in S_k, \|x\|_2=1} \|Mx\|_2^2 \\ &\sup_{V\in S_k} \inf_{x\in S_k, \|x\|_2=1} \langle Mx, Mx\rangle \\ &\sup_{V\in S_k} \inf_{x\in S_k, \|x\|_2=1} \langle M^*Mx, x\rangle.\end{aligned}$$

   La matrice M^*M est une matrice symétrique, donc $\alpha_k = \lambda_k(M^*M) = \sigma_k^2(M)$.