INSA TOULOUSE
Département STPI
3ème année MIC

Année 2013-2014

Correction Examen (14/03/2014)
UV Modélisation
Partie - Problèmes inverses

Documents autorisés, barème indicatif.

Exercice 1 - Quelques propriétés élémentaires de la SVD

Dans cet exercice, on considère une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On note sa SVD $A = U\Sigma V^T$ avec $U = [u_1, \cdots, u_m]$ et $V = [v_1, \cdots, v_n]$.

1. Montrer que le nombre de valeurs singulières de A est inférieur ou égal à $\min(m, n)$.
   Correction :
   C'est une question triviale et plein de réponses sont acceptables. Par exemple, le rang de A est nécessairement inférieur à $\min(m, n)$.
2. Dans cette question, on pose
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   On rappelle que la SVD de A est donnée par
   $$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T.$$
   On considère la fonction
   $$\begin{aligned} J : \ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{1}{4}\langle Ax, Ax\rangle \end{aligned}$$
   où $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel. Sur un même schéma, dessiner, les lignes de niveau 1 et 4 de J ainsi que les vecteurs singuliers v_1 et v_2. Pour une matrice A quelconque, comment pouvez retrouver les valeurs singulières en traçant les lignes de niveau de $J(x)$?
   Correction :
   On écrit x dans la base V : $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Ainsi
   $$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{4}\langle U\Sigma V^T x, U\Sigma V^T x\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle \Sigma V^T x, \Sigma V^T x\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left\| \begin{pmatrix} 4\alpha_1 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\ &= 4\alpha_1^2 + \alpha_2^2. \end{aligned}$$
   Ainsi $J(x) = 1 \Leftrightarrow 4\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$. C'est l'équation d'une ellipse (voir figure 1). De façon générale, on peut retrouver les valeurs singulières σ_i et les vecteur singuliers à droite v_i, en tracant un ensemble de niveau 1 de la fonction J. Ca donne une ellipsoide dont les axes principaux sont les vecteurs v_i et dont la racine de la longueur des demi axes correspond aux valeurs singulières. La figure 1 obtenue avec le code joint permettent d'afficher ce résultat.

```
[X,Y]=meshgrid(linspace(-2,2,100),linspace(-2,2,100));
J=1/4*((3*X+Y).^2+(X+3*Y).^2);
contour(X,Y,J,[1 4])
hold on
a=1/sqrt(2);plot([0 a],[0 -a]);
a=1/sqrt(2);plot([0 a],[0 a]);
```

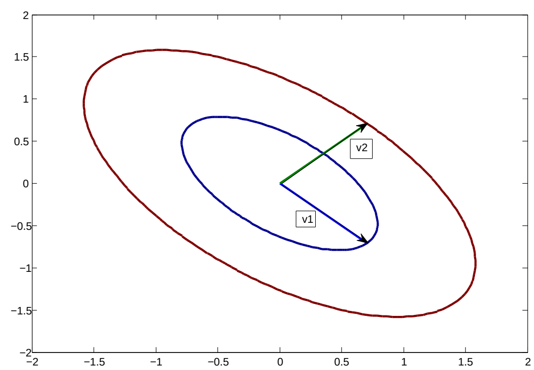

FIGURE 1 – Lignes de niveau et axes principaux. Notes : les axes n'ont pas l'air orthogonaux, mais ils le sont (les axes n'ont pas la même échelle.

3. Montrer que si σ est une valeur singulière de A alors il existe deux vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$ tels que $Av = \sigma u$, $A^*u = \sigma v$ et $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.
   Correction :
   On suppose que σ correspond à la i-ème valeur singulière de A, i.e. $\sigma = \sigma_i$. Ainsi on a $Av_i = \sigma_i u_i$ et $A^*u_i = \sigma_i v_i$. En fait on peut montrer que c'est une condition nécessaire et suffisante pour que σ soit valeur singulière.

Exercice 2 - Moindres carrés régularisés et norme de la solution

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On pose

$$J(x) = \frac{1}{2}\|Ax - z\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2. \tag{1}$$

où $\alpha \geq 0$ et $z \in \mathbb{R}^m$ est une donnée. On considère le problème suivant :

$$\text{Trouver} \quad x(\alpha) \in \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} J(x). \tag{2}$$

1. Calculer $\nabla J(x)$.
   Correction :
   On a $\nabla J(x) = A^T(Ax - z) + \alpha x$.
2. On pose $\alpha > 0$. A quelle(s) condition(s) existe-t-il une solution ? Une solution unique ?
   Correction :
   Il existe toujours une solution unique (fonction coercive, strictement convexe).
3. On pose $\alpha = 0$. A quelle(s) condition(s) existe-t-il une solution ? Une solution unique ?
   Correction :
   Il faut que $ker(A^TA) = \{0\}$.
4. On définit le projecteur sur l'image de A par :

$$P_{Im(A)}(z_0) = \arg\min_{z\in Im(A)} \|z - z_0\|_2.$$

   On suppose que A est une matrice de rang r dont la SVD s'écrit $A = U\Sigma V^T$ où $U = [u_1, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont orthogonales. Donner l'expression de $P_{Im(A)}(z)$ et de $P_{Im(A)^\perp}(z)$ en fonction de $(u_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ et $(v_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$.
   Correction :
   On note $\gamma = Uz$. Dans ce cas, $z = U^T\gamma$ puisque U est orthogonale. On a $Im(A) = vect(u_1, \ldots, u_r)$. Donc $P_{Im(A)}(z) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i u_i$. De même $P_{Im(A)^\perp}(z) = \sum_{i=r+1}^{m} \gamma_i u_i$.
5. Montrer que le problème 2 est équivalent à :

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|Ax - P_{Im(A)}(z)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2.$$

   Correction :
   On a $z = P_{Im(A)}(z) + P_{Im(A)^\perp}(z)$. Donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|Ax - (P_{Im(A)}(z) + P_{Im(A)^\perp}(z))\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\|Ax - P_{Im(A)}(z)\|_2^2 + \|P_{Im(A)^\perp}(z)\|_2^2 + 2\langle Ax - P_{Im(A)}(z), P_{Im(A)^\perp}(z)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\|Ax - P_{Im(A)}(z)\|_2^2 + \|P_{Im(A)^\perp}(z)\|_2^2.
\end{aligned}$$

De plus $\|P_{Im(A)^\perp}(z)\|_2^2$ ne dépend pas de x donc :

$$\begin{aligned}
&\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\arg\min}\,\frac{1}{2}\|Ax-z\|_2^2+\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2\\
&=\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\arg\min}\,\frac{1}{2}\|Ax-P_{Im(A)}(z)\|_2^2+\|P_{Im(A)^\perp}(z)\|_2^2+\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2\\
&=\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\arg\min}\,\frac{1}{2}\|Ax-P_{Im(A)}(z)\|_2^2+\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2.
\end{aligned}$$

6. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que

$$x(\alpha) = V(\Sigma^T\Sigma + \alpha I)^{-1}\Sigma^T U^T z.$$

Correction :
La solution $x(\alpha)$ satisfait $\nabla J(x(\alpha)) = 0$. Donc :

$$x(\alpha) = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T z.$$

Il reste juste à réécrire A avec sa SVD pour conclure.

7. On pose $x(\alpha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\alpha) v_i$ et $z = \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i$. Déterminer les valeurs $\lambda_i(\alpha)$ en fonction de σ_i et γ_i.
Correction :
On a

$$\lambda_i(\alpha) = \frac{\sigma_i\gamma_i}{\sigma_i^2+\alpha}.$$

8. Montrer que $\|\lambda(\alpha)\|_2 \le \frac{|||A|||\cdot\|z\|_2}{\alpha}$.
Correction :
On a

$$\begin{aligned}
|\lambda_i(\alpha)| &\le \left|\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2+\alpha}\right| |\gamma_i|\\
&\le \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_i^2+\alpha}\right| |\gamma_i|\\
&\le \left|\frac{\sigma_1}{\alpha}\right| |\gamma_i|.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $|||A||| = \sigma_1$ et d'écrire :

$$\begin{aligned}
\|\lambda(\alpha)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m (\lambda_i(\alpha))^2\\
&\le \left|\frac{\sigma_1}{\alpha}\right|^2 |\gamma_i|^2\\
&\le \left|\frac{\sigma_1}{\alpha}\right|^2 \|\gamma\|_2^2\\
&\le \left|\frac{|||A|||}{\alpha}\right|^2 \|z\|_2^2.
\end{aligned}$$