INSA TOULOUSE Année 2012-2013
Département STPI
$3^{\text{ème}}$ année MIC

Correction examen
UV Modélisation
Partie - Problèmes inverses

Tout document est interdit.

Exercice 1 - Questions de chauffe

Dans tout cet exercice, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une matrice de rang r. On note une SVD de A sous la forme $U\Sigma V^T$ avec $U = [u_1, \ldots, u_m]$ et $V = [v_1, \cdots, v_n]$. Les valeurs $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ sont les valeurs singulières de A.

1. On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Déterminez une SVD de B.
On peut écrire $B = U\Sigma V^T$ avec
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que si $m \geq n$ et $r = n$, alors $\sigma_n\|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq \sigma_1\|x\|_2$. Quelle minoration peut-on avoir si $r < n$?
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = V\alpha$. On a $\|x\|_2 = \|V\alpha\|_2$ comme V est orthogonale. De plus :
$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &= \|U\Sigma V^T x\|_2 \\ &= \|U\Sigma\alpha\|_2 \\ &= \|\Sigma\alpha\|_2 \\ &\geq \sigma_n\|\alpha\|_2. \end{aligned}$$
Si $r < n$, le seul minorant est 0, car en prenant $x \in ker(A)$, on a $\|Ax\|_2 = 0$.
3. Montrer que si $m = n$ et $r = n$ alors $|||A^{-1}||| = \frac{1}{\sigma_n}$.
Si $r = n$, Σ est inversible et $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$. La plus grande valeur sur la diagonale de Σ^{-1} est $\frac{1}{\sigma_n}$.
4. Soit
$$\begin{array}{llll} J : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \langle x, Wx\rangle \end{array}$$
où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel et $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice.
   - Calculez $\nabla J(x)$.
   On a :
   $$\begin{aligned} J(x+h) &= \langle (x+h), W(x+h)\rangle \\ &= \langle x, Wx\rangle + \langle h, Wx\rangle + \langle x, Wh\rangle + \langle h, Wh\rangle \\ &= J(x) + \langle (W + W^T)x, h\rangle + o(\|h\|_2). \end{aligned}$$
   Donc $\nabla J(x) = (W + W^T)x$.
   - Est-ce que le problème $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} J(x)$ admet toujours une solution ? (Justifier).
   Non. Par exemple, si $n = 1$ et $W = -1$, $J(x) = -x^2$ qui tend vers $-\infty$ en $-\infty$. Il n'y a donc pas de minimiseur sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - Pseudo-inverse (le problème)

1. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et tout $t \neq 0$ suffisamment petit, les matrices $tI_n + A^*A$ et $tI_m + AA^*$ sont inversibles.
   Soit $A = U\Sigma V^T$ avec
   $$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On a :
   $$tI_n + A^*A = V(\Sigma^T\Sigma + tI_n)V^T.$$
   La matrice $(\Sigma^T\Sigma + tI_n)$ est diagonale et contient uniquement des valeurs non nulles sur sa diagonale dès que $|t| < \sigma_r^2$ où σ_r est la plus petite valeur singulière de A.
   Donc $tI_n + A^*A$ est inversible pour $|t| < \sigma_r^2$. Le même raisonnement fonctionne aussi pour la matrice $tI_m + AA^*$.
2. En déduire que
   $$A^\dagger = \lim_{t\to 0}(tI_n + A^*A)^{-1}A^* = \lim_{t\to 0} A^*(tI_m + AA^*)^{-1}.$$
   La pseudo-inverse de A est la matrice
   $$A^\dagger = VSU^T$$
   où
   $$S = \begin{pmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On a :
   $$\begin{aligned} &(tI_n + A^*A)^{-1}A^* \\ &= V(\Sigma^T\Sigma + tI_n)^{-1}V^TV\Sigma U^T \\ &= V(\Sigma^T\Sigma + tI_n)^{-1}\Sigma U^T. \end{aligned}$$
   On pose $\tilde{S}(t) = (\Sigma^T\Sigma + tI_n)^{-1}\Sigma$. Les valeurs diagonales de $\tilde{S}(t)$ sont :
   $$\tilde{s}_i(t) = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + t} & \text{si } \; i \le r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Et donc
   $$\lim_{t\to 0} \tilde{s}_i(t) = \begin{cases} \sigma_i^{-1} & \text{si } \; i \le r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Donc $\lim\limits_{t\to 0} \tilde{S}(t) = S$ ce qui montre la première égalité. La preuve de la dernière égalité peut être faite avec un raisonnement similaire.

Exercice 3 - Influence de la norme (question jugeote)

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ avec $b_1 \ge b_2 \ge b_3$. Soit $p \in [1, +\infty]$. On veut résoudre le problème de minimisation
$$\min_{x\in\mathbb{R}} \|Ax - b\|_p.$$
Ce n'est pas un problème de moindre carré puisqu'on a remplacé la norme l^2 par une norme l^p.

1. Calculer la solution x pour $p \in \{1, 2, \infty\}$.
   - Cas $p = \infty$. On cherche $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} \max(|x - b_1|, |x - b_2|, |x - b_3|)$. La solution est $x_\infty = \frac{b_1+b_3}{2}$ (la preuve est graphique).
   - Cas $p = 2$. On cherche $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} (x - b_1)^2 + (x - b_2)^2 + (x - b_3)^2$. En dérivant et en annulant la dérivée, on trouve la solution $x_2 = \frac{b_1+b_2+b_3}{3}$ (la moyenne).

– Cas $p = 1$. On cherche $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = |x - b_1| + |x - b_2| + |x - b_3|$. Il est clair que $x \in [b_3, b_1]$. Si $x \in]b_3, b_2[$, $f(x) = b_1 - x + b_2 - x + x - b_3$. Donc $f'(x) = -1$. De même si $x \in]b_2, b_3[$, $f'(x) = 1$. Donc f atteint son minimum en $x_1 = b_2$. Notez que b_2 est la valeur médiane de l'ensemble $\{b_1, b_2, b_3\}$.

2. Que se passe-t'il si $b_1 \to +\infty$? Ce résultat montre la robustesse de la norme l^1 aux points aberrants.
   Quelque soit la valeur de b_1, la solution du problème l^1 est constante et vaut b_2. La norme l^1 est donc robuste aux point aberrants.