INSA TOULOUSE
Département STPI
$3^{\text{ème}}$ année MIC

Année 2010-2011

UV Des données aux modèles
Partie - Problèmes inverses

Mercredi 15 juin 2011 - 14 :00 à 15 :15

Les documents et calculettes sont autorisés. Le reste est interdit.

Le barême entre crochets est donné à titre indicatif.

Dans tout l'examen, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|_2$.

Exercice 1 - SVD de matrices simples (5,5 pts)

Déterminez une SVD des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Une décomposition possible est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Une décomposition possible est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Une décomposition possible est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 - La norme de Frobenius (4,5 pts)

Soit $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice. On rappelle que le produit scalaire canonique sur l'espace des matrices est défini par :
$$\langle A, B \rangle = trace(A^T B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}.$$

1. Montrez que la norme de Frobenius définie par : $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ définit bien une norme sur l'espace $\mathbb{R}^{m \times n}$.
   - On a $\|A\|_F = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j),\ a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
   - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\|\alpha A\|_F = \|\alpha\| \cdot \|A\|_F$ (évident).
   - Enfin, soit, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On a :
$$\begin{aligned} \|A + B\|_F^2 &= \sum_{i,j} (a_{i,j} + b_{i,j})^2 \\ &= \sum_{i,j} a_{i,j}^2 + b_{i,j}^2 + 2a_{i,j} b_{i,j} \\ &= \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 + \sum_{i,j} 2a_{i,j} b_{i,j} \end{aligned}$$

Or $2a_{i,j}b_{i,j} \leq a_{i,j}^2 + b_{i,j}^2$ car $|a-b|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$. Donc $\|A+B\|_F^2 \leq 2(\|A\|_F^2 + \|B\|_F^2) \leq (\|A\|_F + \|B\|_F)^2$ et l'inégalité triangulaire est donc vérifiée.

2. Soit $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ une matrice orthogonale. Montrez que la norme de Frobenius satisfait :

$$\|UA\|_F^2 = \|A\|_F^2,$$

c'est-à-dire qu'elle est invariante aux transformations unitaires.
On a :

$$\begin{aligned}\|UA\|_F^2 &= trace((UA)^T UA) \\ &= trace(A^T U^T UA) \\ &= trace(A^T A) \\ &= \|A\|_F^2\end{aligned}$$

3. De même, montrez que si $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice orthogonale, alors $\|AV\|_F^2 = \|A\|_F$.
On a $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A^T\|_F^2$. Donc :

$$\begin{aligned}\|AV\|_F^2 &= \|(AV)^T\|_F^2 \\ &= \|V^T A^T\|_F^2 \\ &= \|A^T\|_F^2 \quad \text{(car } V^T \text{ est orthogonale)} \\ &= \|A\|_F^2.\end{aligned}$$

4. Déduisez-en une expression de $\|A\|_F$ à partir des valeurs singulières de A.
On a donc : $\|A\|_F^2 = \|U\Sigma V^T\|_F^2 = \|\Sigma\|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$ où r est le rang de A et les σ_i sont ses valeurs singulières.

Exercice 3 - Un opérateur de convolution (5 pts)

Sur l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi,\pi])$, on considère l'opérateur intégral T qui à tout $x \in H$ associe la fonction Tx définie par :

$$(Tx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x(s)ds, \quad t \in [-\pi,\pi].$$

1. Vérifiez que $Tx \in L^2([-\pi,\pi])$.
On a :

$$\begin{aligned}y^2(t) &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x(s)ds\right)^2 \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)^2 x^2(s)ds \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} x^2(s)ds \\ &= \|x\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Donc :

$$\|y\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} y^2(t)dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|x\|_{L^2}^2 dt \leq 2\pi\|x\|_{L^2}^2.$$

Donc y appartient bien à $L^2([-\pi,\pi])$.

2. Donnez une majoration de $|||T|||$.
C est un majorant de $|||T|||$ si pour tout $x \in \mathbf{L}^2([-\pi,\pi])$ on a $||Tx||_{L^2} \leq C \cdot \|x\|_{L^2}$. Or on vient de montrer que $||Tx||_{L^2}^2 \leq 2\pi \cdot \|x\|_{L^2}^2$. Donc $|||T||| \leq \sqrt{2\pi}$. Cette majoration est malheureusement moins bonne que celle demandée.

On peut procéder de manière plus fine comme suit. D'après le théorème de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x(s)ds \leq \|\cos(t-\cdot)\|_{L^2}\|x\|_{L^2}.$$

Or $\|\cos(t-\cdot)\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)^2 ds = \frac{\pi}{2}$. Donc $|y(s)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\|x\|_{L^2}$. Et donc :

$$\begin{aligned}
\|y\|_{L^2}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} y^2(t)dt \\
&\leq \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\|x\|_{L^2}^2 dt \\
&\leq \pi^2\|x\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Ce qui donne la majoration plus fine $|||T||| \leq \pi$.

3. Calculez l'adjoint T^* de T.
   On a :

$$\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)x(s)ds\right)y(t)dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)x(s)y(t)ds\right)dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)x(s)y(t)dtds \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)y(t)dt\right)x(s)ds \\
&= \langle x, T^*y\rangle
\end{aligned}$$

   Donc par identification , $(T^*y)(s) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(t-s)y(t)dt$.

Exercice 4 - Moindres carrés généralisés (5,5 pts)

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ une matrice définie positive. Sous cette condition, on rappelle que W peut être diagonalisée, c'est-à-dire mise sous la forme $W = PDP^{-1}$ où P est unitaire et D est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs.

1. A partir de P et D, déterminez une matrice $W^{\frac{1}{2}}$, définie positive, telle que $\left(W^{\frac{1}{2}}\right)^2 = W$. (Note : une telle matrice est appelée racine de W, comme pour les nombres réels).
   On a $W = PDP^{-1} = PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}PD^{\frac{1}{2}}P^{-1}$ où $D^{\frac{1}{2}} = diag(\sqrt{d_i})$ et d_i représente la i-ème coordonnée de la matrice diagonale D.
2. On consière maintenant le problème de moindres carrés généralisé suivant :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\langle(Ax-b), W(Ax-b)\rangle. \tag{1}$$

   Montrez que ce problème est équivalent à :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{1}{2}\|W^{\frac{1}{2}}(Ax-b)\|_2^2.$$

   On a :

$$\begin{aligned}
\langle(Ax-b), W(Ax-b)\rangle &= \langle(Ax-b), W(Ax-b)\rangle \\
&= \langle(Ax-b), W^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}}(Ax-b)\rangle \\
&= \langle W^{\frac{1}{2}}(Ax-b), W^{\frac{1}{2}}(Ax-b)\rangle \\
&= \|W^{\frac{1}{2}}(Ax-b)\|_2^2
\end{aligned}$$

3. Ecrivez les équations normales associées à ce problème (les conditions satisfaites par la solution).
   Les équations normales sont :
   $$A^T W^{\frac{1}{2}} \left(W^{\frac{1}{2}} (Ax - b) \right) = 0.$$

4. On note x_W la solution du problème (1) et x la solution du problème de moindres carrés usuel. Montrez que si $b \in Im(A)$, alors $x_W = x$.
   Si $b \in Im(A)$, alors il existe x tel que $Ax = b$, et donc les solutions des deux problèmes sont identiques. Une autre façon de le voir est de montrer que les normes sont équivalentes :
   $$\lambda_{min}^2 \left(W^{1/2} \right) \|Ax - b\|_2^2 \leq \|W^{1/2}(Ax - b)\|_2^2 \leq \lambda_{max}^2 \left(W^{1/2} \right) \|Ax - b\|_2^2.$$
   Donc $\|Ax - b\|_2 = 0 \Leftrightarrow \|W^{1/2}(Ax - b)\|_2 = 0$. Or les solutions du problème de moindre carrés standard satisfont $\|Ax - b\|_2 = 0$ i.e. $Ax = b$. Celles du moindre carré généralisé le satisfont donc aussi.