INSA TOULOUSE
Département STPI
3ème année MIC

Année 2013-2014

Examen (14/03/2014) – 1h
UV Modélisation
Partie - Problèmes inverses

Documents autorisés, barème indicatif.

Exercice 1 - Quelques propriétés élémentaires de la SVD [10 pts]

Dans cet exercice, on considère une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On note sa SVD $A = U\Sigma V^T$ avec $U = [u_1, \cdots, u_m]$ et $V = [v_1, \cdots, v_n]$.

1. Montrer que le nombre de valeurs singulières de A est inférieur ou égal à $\min(m, n)$.
2. Dans cette question, on pose
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
On rappelle que la SVD de A est donnée par
$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T.$$
On considère la fonction
$$\begin{array}{llll} J: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \frac{1}{4}\langle Ax, Ax\rangle \end{array}$$
où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel. Sur un même schéma, dessiner, les lignes de niveau 1 et 2 de J ainsi que les vecteurs singuliers v_1 et v_2. Pour une matrice A quelconque, comment pouvez retrouver les valeurs singulières en traçant les lignes de niveau de $J(x)$?
3. Montrer que si σ est une valeur singulière de A alors il existe deux vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$ tels que $Av = \sigma u$, $A^*u = \sigma v$ et $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

Exercice 2 - Tykhonov et norme de la solution [12 pts]

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On pose $J_\alpha(x) = \frac{1}{2}\|Ax - z\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$ où $\alpha \geq 0$ et $z \in \mathbb{R}^m$ est une donnée. On considère le problème suivant :
$$\text{Trouver} \quad x(\alpha) \in \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} J_\alpha(x). \tag{1}$$

1. Calculer $\nabla J_\alpha(x)$.
2. On pose $\alpha > 0$. A quelle(s) condition(s) existe-t-il une solution ? Une solution unique ?
3. On pose $\alpha = 0$. A quelle(s) condition(s) existe-t-il une solution ? Une solution unique ?
4. On définit le projecteur sur l'image de A par :
$$P_{Im(A)}(z_0) = \arg\min_{z\in Im(A)} \|z - z_0\|_2.$$
On suppose que A est une matrice de rang r dont la SVD s'écrit $A = U\Sigma V^T$ où $U = [u_1, \dots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $V = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont orthogonales. Donner l'expression de $P_{Im(A)}(z)$ et de $P_{Im(A)^\perp}(z)$ en fonction de $(u_i)_{i\in\{1,\dots,m\}}$ et $(v_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$.
5. Montrer que le problème 1 est équivalent à :
$$\text{Trouver} \quad x(\alpha) \in \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|Ax - P_{Im(A)}(z)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2.$$

6. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $x(\alpha) = V(\Sigma^T\Sigma + \alpha I)^{-1}\Sigma^T U^T z$.
7. On pose $x(\alpha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\alpha) v_i$ et $z = \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i$. Déterminer les valeurs $\lambda_i(\alpha)$ en fonction de σ_i et γ_i.
8. Montrer que $\|\lambda(\alpha)\|_2 \leq \frac{|||A|||\cdot\|z\|_2}{\alpha}$.