INSA TOULOUSE
Département STPI
3ème année MIC

Année 2012-2013

Examen – 10h15 - 11h30
UV Modélisation
Partie - Problèmes inverses

Documents autorisés, barème indicatif.

Exercice 1 - Quelques réflexions pour se chauffer [10 pts]

Dans tout cet exercice, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une matrice de rang r. On note une SVD de A sous la forme $U\Sigma V^T$ avec $U = [u_1, \ldots, u_m]$ et $V = [v_1, \cdots, v_n]$. Les valeurs $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ sont les valeurs singulières de A.

1. On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Déterminez une SVD de B.
2. Montrer que si $m = n$ et $r = n$ alors $|||A^{-1}||| = \frac{1}{\sigma_n}$.
3. Montrer que si $m \geq n$ et $r = n$, alors $\sigma_n\|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq \sigma_1\|x\|_2$. Quelle minoration peut-on avoir si $r < n$?
4. Soit
$$\begin{array}{rccc} J: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \langle x, Wx\rangle \end{array}$$
où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel et $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice.
   – Calculez $\nabla J(x)$.
   – Est-ce que le problème $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} J(x)$ admet toujours une solution ? (Justifier).

Exercice 2 - Pseudo-inverse [8 pts]

1. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et tout $t \neq 0$ suffisamment petit, les matrices $tI_n + A^*A$ et $tI_m + AA^*$ sont inversibles.
2. En déduire que
$$A^\dagger = \lim_{t\to 0}(tI_n + A^*A)^{-1}A^* = \lim_{t\to 0} A^*(tI_m + AA^*)^{-1}.$$
(Montrez une des deux inégalités seulement, à moins que vous ayez du temps).

Exercice 3 - Influence de la norme [5pts]

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ avec $b_1 \geq b_2 \geq b_3$. Soit $p \in [1, +\infty]$. On veut résoudre le problème de minimisation
$$\min_{x\in\mathbb{R}} \|Ax - b\|_p.$$
Ce n'est pas un problème de moindre carré puisqu'on a remplacé la norme l^2 par une norme l^p.

1. Calculer la solution x pour $p \in \{1, 2, \infty\}$ (N'hésitez pas à faire des dessins).
2. Que se passe-t'il si $b_1 \to +\infty$? Ce résultat montre la robustesse de la norme l^1 aux points aberrants pour la résolution des problèmes inverses.