INSA TOULOUSE
Département STPI
3ème année MIC

Année 2011-2012

CORRECTION
UV Des données aux modèles
Partie - Problèmes inverses

Mercredi 6 juin 2012 - 14 :00 à 15 :30
Le cours, les TD et les calculatrices sont autorisés. Le reste est interdit.
Le barême entre crochets est donné à titre indicatif.

Dans tout l'examen, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$. Les questions précédées de *) sont plus compliquées et ne devraient être résolues que si vous avez une intuition de la marche à suivre. Le barême est donné à titre indicatif et sera probablement relevé...

Exercice 1 - Problème inverse bien et mal posé (6,5 pts)

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *On considère le problème suivant :*

$$\textit{Trouver } x \in \mathbb{R}^2 \textit{ tel que } Ax = b \textit{ avec } b \in \mathbb{R}^3.$$

Est-ce que ce problème est bien posé ? Détaillez votre réponse.
Ce problème n'est pas bien posé, car il peut ne pas exister de solution. Par exemple le vecteur $[1,1,2]^T$ n'appartient pas à l'image de A.

2. *On considère maintenant le problème :*

$$\textit{Trouver } x \in \mathbb{R}^2 \textit{ tel que } Ax = b \textit{ avec } b \in E = vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Est-ce que la solution de ce problème existe ? Est unique ? Est stable pour des perturbations dans E de b ?
Le fait de restreindre b à E (l'image de A) rend le problème bien posé. En effet pour tout b de la forme $b = \alpha[1,0,1]^T + \beta[0,1,0]^T$, la seule solution à ce problème est $x = [\alpha,\beta]^T$. Elle est stable. En effet, si on perturbe b en $\tilde{b} = (\alpha+\delta\alpha)[1,0,1]^T + (\beta+\delta\beta)[0,1,0]^T$, la solution perturbée est $\tilde{x} = [\alpha+\delta\alpha, \beta+\delta\beta]^T$. On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} \|\tilde{b} - b\|^2 &= \|[\delta\alpha, \delta\beta, \delta\alpha]\|^2 \\ &= 2(\delta\alpha)^2 + (\delta\beta)^2 \\ &\geq (\delta\alpha)^2 + (\delta\beta)^2 \\ &= \|\tilde{x} - x\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|\tilde{x} - x\| \leq \|\tilde{b} - b\|$ et on a bien $\|\tilde{x} - x\| \to 0$ si $\|\tilde{b} - b\| \to 0$.

3. *De façon générale, considérons un problème du type :*

$$\textit{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que } Ax = b \textit{ avec } b \in E$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$. A quelle condition sur E et sur A ce problème admet-il une solution ?
Il suffit que $E \subseteq Im(A)$.

4. *Proposez une décomposition en valeurs singulières de A.*

   Une décomposition possible est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (Utiliser le fait que $Im(A) = vect(u_1, u_2)$ pour trouver U, compléter la base avec un vecteur orthogonal aux deux autres, normaliser les colonnes, le reste suit).

Exercice 2 - Conditionnement et moindres carrés (10,5 pts)

*Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice de rang n dont une SVD s'écrit $A = U\Sigma V^T$ avec $\Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. Supposons que x minimise $\|Ax - b\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et soit $r = Ax - b$ le résidu correspondant. On perturbe la **matrice** A en $A + \delta A$ et on note $x + \delta x$ la nouvelle solution.*

1. *Déterminez les équations satisfaites par x et par $x + \delta x$.*

   x satisfait
$$A^T(Ax - b) = 0.$$
   $(x + \delta x)$ satisfait
$$(A + \delta A^T)((A + \delta A)(x + \delta x) - b) = 0.$$

2. *En utilisant la SVD de A, montrer que :*
$$\|(A^TA)^{-1}A^T\| = \frac{1}{\sigma_n}$$
   et que :
$$\|(A^TA)^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n^2}.$$
   On a
$$\begin{aligned} \|(A^TA)^{-1}x\| &= \|V(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^Tx\| \\ &= \|(\Sigma^T\Sigma)^{-1}V^Tx\| \\ &\overset{y=V^Tx}{=} \|(\Sigma^T\Sigma)^{-1}y\| \end{aligned}$$
   Donc
$$\begin{aligned} \|(A^TA)^{-1}\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(A^TA)^{-1}x\| \\ &= \sup_{\|y\|=1} \|(\Sigma^T\Sigma)^{-1}y\| \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2}. \end{aligned}$$
   On procède de même pour $\|(A^TA)^{-1}A^T\|$.

3. *Montrez que $\|A^TA\delta x\| \geq \sigma_n^2\|\delta x\|$.*

   On procède de la même façon que la question précédente :
$$\|A^TA\delta x\| = \|(\Sigma^T\Sigma)V^T\delta x\| \geq \sigma_n^2\|V^T\delta x\| = \sigma_n^2\|\delta x\|.$$

4. **) On pose $\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$ (le conditionnement de A). Déduire des questions précédentes la majoration :*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \left(\kappa(A) + \kappa(A)^2 \frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|}\right) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + O(\|\delta A\|^2)$$

On a :

$$\begin{aligned} 0 &= (A + \delta A^T)((A + \delta A)(x + \delta x) - b) \\ &= (A + \delta A)^T (A + \delta A)\delta x + (A + \delta A)^T \delta A x + (\delta A)^T r. \end{aligned}$$

Donc

$$\|(A + \delta A)^T (A + \delta A)\delta x\| = \|(A + \delta A)^T \delta A x + (\delta A)^T r\|.$$

Or $\|(A + \delta A)^T (A + \delta A)\delta x\| = \|A^T A \delta x\| + O\left(\|\delta A\|^2\right) \geq \sigma_n^2 \|\delta x\| + O\left(\|\delta A\|^2\right)$.
De plus

$$\begin{aligned} \|(A + \delta A)^T \delta A x + (\delta A)^T r\| &\leq \|(A + \delta A)^T \delta A x\| + \|(\delta A)^T r\| \\ &\leq \|A\|\|\delta A\|\|x\| + \|\delta A\|\|r\| + O(\|\delta A\|^2). \end{aligned}$$

En regroupant ces deux inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 \|\delta x\| + O\left(\|\delta A\|^2\right) &\leq \|A\|\|\delta A\|\|x\| + \|\delta A\|\|r\| + O(\|\delta A\|^2) \\ &= \sigma_1 \|\delta A\|\|x\| + \|\delta A\|\|r\| + O(\|\delta A\|^2) \end{aligned}$$

Il suffit de diviser chaque coté de l'in{egalité par $\sigma_n^2 \|x\|$ pour obtenir le résultat attendu.
Il est clair qu'on n'attendait pas une réponse complète mais plutôt une démarche générale pour arriver à la solution.

5. *Que se passe-t-il si A est carrée et inversible ?*
On a $r = 0$. L'inégalité se simplifie donc en :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + O(\|\delta A\|^2).$$

Cette inégalité justifie l'intérêt du conditionnement puisqu'elle donne l'erreur relative sur la solution pour une erreur relative donnée sur la matrice.

Exercice 3 - Maximum A Posteriori (5,5 pts)

On considère le problème unidimensionnel suivant :

$$y = x + b.$$

Dans cette équation $x \in \mathbb{R}$ est une quantité qu'on souhaite connaître, $y \in \mathbb{R}$ est une quantité mesurée, et $b \in \mathbb{R}$ est un bruit de mesure. On suppose que x et b sont indépendants. Le but de cet exercice est de retrouver x à partir de y par une technique de maximum a posteriori.

1. *Si on n'a aucune connaissance a priori de la donnée x et que $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$, quelle est la solution la plus vraisemblable ?*
La solution la plus vraisemblable est $\hat{x} = y$.

2. *On suppose que les densités de probabilité de b et x sont des gaussiennes de densité respectives :*

$$p(b) \propto \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_b^2}\right) \;\; et \;\; p(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Déterminez l'estimation $\hat{x}$ au sens du maximum a posteriori de x, c'est-à-dire :

$$\hat{x} = \arg\max_{x \in \mathbb{R}} p(x|y).$$

En reprenant le développement proposé en cours, on a :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \arg\max_{x\in\mathbb{R}} p(x|y) \\ &= \arg\min_{x\in\mathbb{R}} -\log p(y|x) - \log p(x).\end{aligned}$$

On a $p(y|x) = p(x+b|x) \propto \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_b^2}\right)$. Donc $\hat{x}$ est $\hat{x} = \arg\min_{x\in\mathbb{R}} \frac{(y-x)}{2\sigma_b^2} + \frac{(x_a)}{2\sigma_x^2}$. Soit encore après annulation de la dérivée à :

$$\hat{x} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_b^2}} \left(\frac{y}{\sigma_b^2} + \frac{a}{\sigma_x^2}\right).$$

3. *Que se passe-t-il si $\sigma_x \to +\infty$? Si $\sigma_x \to 0$?*

   Si $\sigma_x \to +\infty$, on retrouve $\hat{x} = y$. C'est normal, car dans ce cas l'a priori sur la donnée est très faible, et on préfère croire la mesure. Si $\sigma_x \to 0$, on trouve $\hat{x} = a$. Dans ce cas, l'a priori qu'on met sur la donnée est très fort, et on préfère poser $\hat{x} = a$, même si la mesure semble dire que $x = y$.

4. *On suppose maintenant que b est une loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminez l'estimation $\hat{x}$ au sens du maximum a posteriori de x.*

   Dans ce cas, le problème à résoudre devient :

$$\arg\min_{0\leq y-x\leq 1} \frac{1}{2\sigma_x^2}\|x-a\|^2.$$

   La solution est donnée par :

$$\hat{x} = \begin{cases} a & \text{si } \ a \in [y-1, y] \\ y-1 & \text{si } \ a < y-1 \\ y & \text{si } \ a > y \end{cases}$$

   On voit que cette solution ne dépend pas de la variance σ_x^2 contrairement à un bruit gaussien.