INSA TOULOUSE
Département STPI
3ème année MIC

Année 2011-2012

# UV Des données aux modèles
# Partie - Problèmes inverses

*Mercredi 6 juin 2012 - 14 :00 à 15 :30*

*Le cours, les TD et les calculatrices sont autorisés. Le reste est interdit.*

*Le barême entre crochets est donné à titre indicatif.*

Dans tout l'examen, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|$. Les questions précédées de *) sont plus compliquées et ne devraient être résolues que si vous avez une intuition de la marche à suivre. Le barême est donné à titre indicatif et sera probablement relevé...

## Exercice 1 - Problème inverse bien et mal posé (6,5 pts)

Soit $A$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On considère le problème suivant :
$$\text{Trouver } \; x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \; Ax = b \text{ avec } \; b \in \mathbb{R}^3.$$
Est-ce que ce problème est bien posé ? Détaillez votre réponse.
2. On considère maintenant le problème :
$$\text{Trouver } \; x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \; Ax = b \text{ avec } \; b \in E = vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
Est-ce que la solution de ce problème existe ? Est unique ? Est stable pour des perturbations dans $E$ de $b$ ?
3. De façon générale, considérons un problème du type :
$$\text{Trouver } \; x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \; Ax = b \text{ avec } \; b \in E$$
où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$. A quelle condition sur $E$ et sur $A$ ce problème admet-il une solution ?
4. Proposez une décomposition en valeurs singulières de $A$.

## Exercice 2 - Conditionnement et moindres carrés (10,5 pts)

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang $n$ dont une SVD s'écrit $A = U\Sigma V^T$ avec $\Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. Supposons que $x$ minimise $\|Ax - z\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et soit $r = Ax - z$ le résidu correspondant. On perturbe la **matrice** $A$ en $A + \delta A$ et on note $x + \delta x$ la nouvelle solution.

1. Déterminez les équations satisfaites par $x$ et par $x + \delta x$.
2. En utilisant la SVD de $A$, montrer que :
$$\|(A^T A)^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n^2}.$$
3. Montrez que $\|A^T A \delta x\| \geq \sigma_n^2 \|\delta x\|$.
4. *) On pose $\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$ (le conditionnement de $A$). On admet que $\|(A^T A)^{-1} A^T\| = \frac{1}{\sigma_n}$ et que $\|(A + \delta A)^T (A + \delta A)\delta x\| = \|A^T A \delta x\| + O\left(\|\delta A\|^2\right)$. Déduire des questions précédentes la majoration :
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \left( \kappa(A) + \kappa(A)^2 \frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|} \right) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + O(\|\delta A\|^2)$$
5. Que se passe-t-il si A est carrée et inversible ?

## Exercice 3 - Maximum A Posteriori (5,5 pts)

On considère le problème unidimensionnel suivant :

$$y = x + b.$$

Dans cette équation $x \in \mathbb{R}$ est une quantité qu'on souhaite connaître, $y \in \mathbb{R}$ est une quantité mesurée, et $b \in \mathbb{R}$ est un bruit de mesure. On suppose que $x$ et $b$ sont indépendants. Le but de cet exercice est de retrouver $x$ à partir de $y$ par une technique de maximum a posteriori.

1. Si on n'a aucune connaissance a priori de la donnée $x$ et que $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$, quelle est la solution la plus vraisemblable ?
2. On suppose que $b$, $x$ et $y$ sont des variables aléatoires de densités de probabilité gaussiennes respectives :

$$p(b) \propto \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_b^2}\right) \text{ et } p(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

   Déterminez l'estimation $\hat{x}$ au sens du maximum a posteriori de $x$, c'est-à-dire :

$$\hat{x} = \arg\max_{x \in \mathbb{R}} p(x|y).$$

3. Que se passe-t-il si $\sigma_x \to +\infty$ ? Si $\sigma_x \to 0$ ?
4. *) On suppose maintenant que $b$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminez l'estimation $\hat{x}$ au sens du maximum a posteriori de $x$.