INSA de Toulouse - 4GMM **Lundi 12/01/2015**

ANALYSE CONVEXE & OPTIMISATION

Durée approximative : 2h.

Seuls le polycopié et les notes de cours sont autorisés .

Seuls le polycopié et les notes de cours sont autorisés .

Exercice 1. Pour les ensembles X suivants, dites si l'ensemble est convexe et déterminez l'opérateur de projection Π_X par la méthode de votre choix. Déterminer l'opérateur de projection signifie donner son expression $\Pi_X(x)$ pour tout x. Note : pour cet exercice, seul le résultat final comptera, ce n'est donc pas la peine de trop justifier.

1. $X = \{x_0\}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
   Cet ensemble (singleton) est convexe et $\Pi_X(x) = x_0$ pour tout x.
2. $X = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 \leq 1\}$.
   Cet ensemble est un disque (convexe). On a
   $$\Pi_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ \frac{x}{\|x\|_2} & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. $X = \{x \in \mathbb{R}^2, \sqrt{\|x\|_2} \leq 1\}$.
   Cet ensemble est le même que le précédent, tout est donc pareil.
4. $X = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$.
   Cet ensemble est un cercle (donc non convexe). La projection est donnée par :
   $$\Pi_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|_2} & \text{si } x \neq 0 \\ X & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   Notez que la projection n'est pas unique pour $x = 0$. L'unicité n'est vraie que pour les ensembles convexes.

Exercice 2. Sur un schéma dessiner proprement quelques lignes de niveau de la fonction $f(x_1, x_2) = 2|x_1| + x_2^2$.

Correction

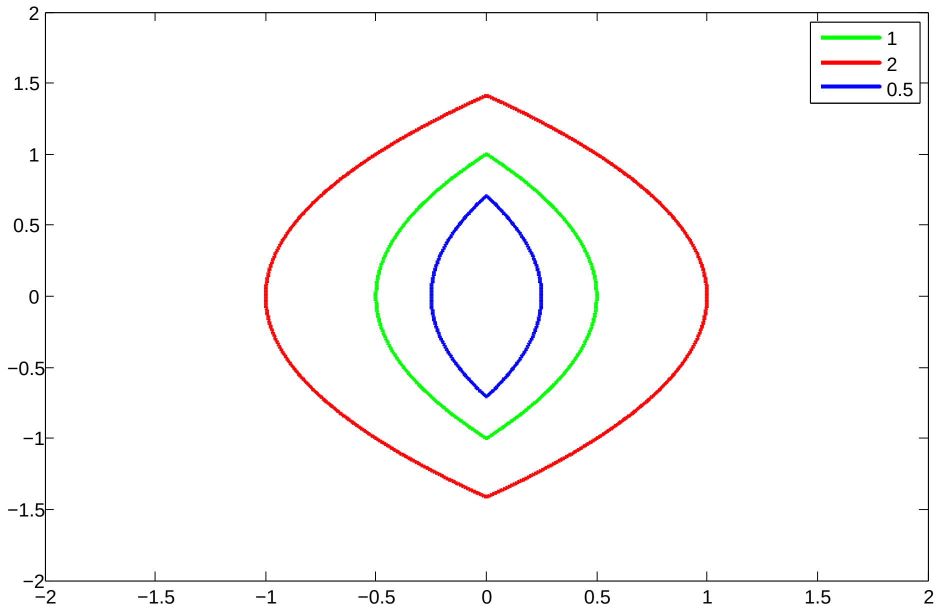

FIGURE 1 – Lignes de niveau de la fonction $f(x_1, x_2) = 2|x_1| + x_2^2$.

Exercice 3. Dans ce problème, on s'intéresse à la gestion numérique d'une contrainte affine. Ce type de contrainte apparaît abondamment dans les milieux industriels et académiques. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathrm{Im}(A)$, $X = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b\}$ et

$$f(x) = \chi_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f en utilisant les outils d'analyse convexe vus en cours. On travaille avec la norme Euclidienne et les produits scalaires usuels notés $\|\cdot\|_2$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respectivement.

Partie I : La première partie de cet examen est destinée à permettre une meilleure compréhension du problème. On commence donc par un exemple simple et on pose $n = 2$, $m = 1$, $A = [1, 0]$, $b = 1$.

1. Dessiner l'ensemble X.
2. Dessiner le cône normal $\mathcal{N}_X(x)$ au point $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer la projection $\Pi_X(x)$ du point $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Correction : Le schéma de la figure 2 résume les résultats.

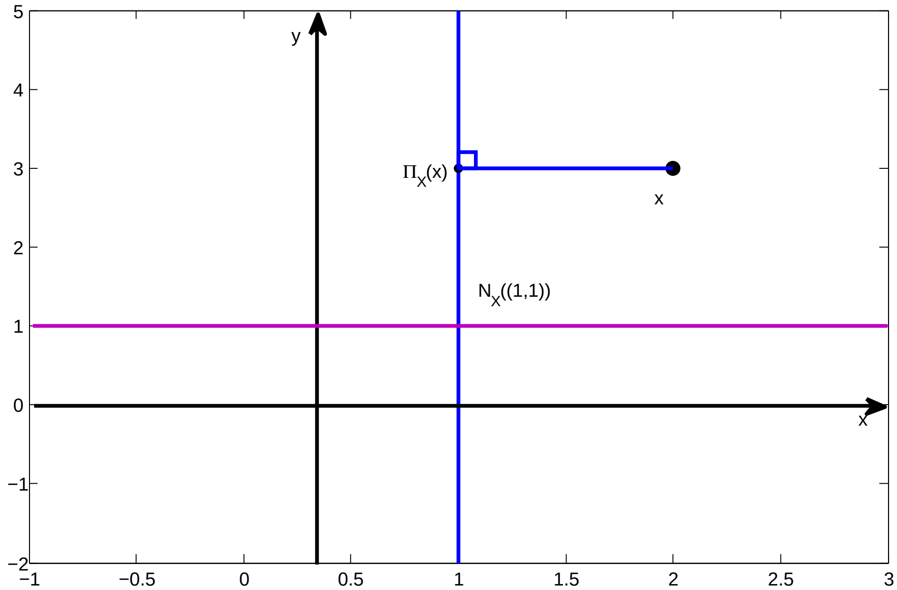

FIGURE 2 – Ensemble X, cône normal $\mathcal{N}_X((1,1))$ et projection $\Pi_X((2,3))$.

Partie II : Dans la deuxième partie de cet examen, on se propose d'étudier le problème d'un point de vue générique. La matrice A est arbitraire avec des lignes linéairement indépendantes et $b \in \mathrm{Im}(A)$.

1. Montrer que f est convexe et fermée.

   Correction : Soit $\lambda \in [0,1]$ et $(x_1, x_2) \in X \times X$. On a $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda A x_1 + (1-\lambda)Ax_2 = b$. L'ensemble X est donc convexe.

   La fermeture est très simple dans l'absolu, mais difficile car les cours de topologie remontent à loin. Je donne ci-dessous une correction pour rafraîchir la mémoire des étudiants qui s'entraineraient pour un examen. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans X qui converge vers x. Il faut montrer que la limite $x \in X$ (c'est une des définitions de la fermeture).

   Comme $x_k \to x$, on a $\|x_k - x\|_\infty \to 0$, donc toutes les composantes de x_k tendent vers celles de x. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On peut écrire $x_k = \sum_{i=1}^n \alpha_k^{(i)} e_i$ et $x = \sum_{i=1}^n \alpha^{(i)} e_i$ avec $\alpha_k^{(i)} \to \alpha^{(i)}$, $\forall i$. En notant $A = (a_1, \ldots, a_n)$, on a donc $Ax_k - Ax = \sum_{i=1}^n (\alpha_k^{(i)} - \alpha^{(i)}) a_i \to 0$. Comme $Ax_k = b$, pour tout k, on en déduit que $Ax = b$, donc $x \in X$.

2. Montrer que $X = \bar{x} + \mathrm{Ker}(A)$ pour un certain $\bar{x}$ qu'on précisera.

   Correction : Soit $\bar{x}$ un point qui satisfait $A\bar{x} = b$ (par exemple A^+b, où A^+ est la pseudo-inverse de A). Soit $Y = \bar{x} + \mathrm{Ker}(A)$. On souhaite montrer que $X = Y$.

   Soit $y \in Y$. On peut donc l'écrire sous la forme $y = \bar{x} + y^0$ où $y \in \mathrm{Ker}(A)$. Ainsi $Ay = A\bar{x} + Ay^0 = b$. Donc $y \in X$.

   Réciproquement, soit $x \in X$. Le vecteur x peut être décomposé sous la forme $x = \bar{x} + x^0$ où $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Si $x^0 \notin \mathrm{Ker}(A)$, alors $Ax^0 \neq 0$ et $Ax = A\bar{x} + Ax^0 \neq b$. On a donc bien $x^0 \in \mathrm{Ker}(A)$.

3. Soit $x_0 \in X$. En utilisant les remarques précédentes, montrer que
$$\mathcal{N}_X(x_0) = \mathrm{Ker}(A)^{\perp}.$$

Correction : Puisque $x_0 \in X$, il peut être décomposé sous la forme $x_0 = \bar{x} + x_0^{ker}$ avec $x_0^{ker} \in \mathrm{Ker}(A)$. Le cône normal à X est défini par :
$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_X(x_0) &= \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, x - x_0\rangle \leq 0,\ \forall x \in X\} \\
&= \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, \bar{x} + x^{ker} - x_0\rangle \leq 0,\ \forall x^{ker} \in \mathrm{Ker}(A)\} \\
&= \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, \bar{x} + x^{ker} - (\bar{x} + x_0^{ker})\rangle \leq 0,\ \forall x^{ker} \in \mathrm{Ker}(A)\} \\
&= \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, x^{ker} - x_0^{ker}\rangle \leq 0,\ \forall x^{ker} \in \mathrm{Ker}(A)\} \\
&= \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, x\rangle \leq 0,\ \forall x \in \mathrm{Ker}(A)\} \\
&= \mathrm{Ker}(A)^{\perp}.
\end{aligned}$$

Correction : Pour $x_0 \notin X$, on a $\mathcal{N}_X(x_0) = \emptyset$. Pour le montrer, on raisonne comme dans le cas précédent. On remarque d'abord que $x_0 = \bar{x} + x^0$ avec $x^0 \notin \mathrm{Ker}(A)$. On obtient ainsi :
$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_X(x_0) &= \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, x - x_0\rangle \leq 0,\ \forall x \in X\} \\
&= \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, x^{ker} - x^0\rangle \leq 0,\ \forall x^{ker} \in \mathrm{Ker}(A)\} \\
&= \{\eta \in \mathbb{R}^n, \langle \eta, x\rangle \leq 0,\ \forall x \in x^0 + \mathrm{Ker}(A)\}
\end{aligned}$$

L'objectif des questions suivantes est de calculer :
$$x^* = \mathrm{Prox}_f(x_0) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, f(x) + \frac{1}{2}\|x - x_0\|_2^2. \tag{1}$$

4. Que représente x^* géométriquement ?

Correction : On a
$$x^* = \underset{x \in X}{\arg\min}\, \frac{1}{2}\|x - x_0\|_2^2.$$
C'est donc la projection de x_0 sur X.

5. Ecrire les conditions d'optimalité satisfaites par la solution x^* du problème (1).

Correction : En notant $f(x) = \frac{1}{2}\|x - x_0\|_2^2 + \chi_X(x)$ où
$$\chi_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$
les conditions d'optimalité sont $0 \in \partial f(x^*)$. On a $\partial f(x) = \emptyset$ pour $x \notin X$, donc $x^* \in X$. De plus
$$\partial f(x^*) = x^* - x_0 + \mathcal{N}_X(x^*)$$
Les conditions d'optimalité sont donc $0 \in x^* - x_0 + \mathrm{Ker}(A)^{\perp}$ et $x^* \in X$. Ceci signifie bien que x^* est une projection orthogonale (le vecteur $x^* - x_0$ est orthogonal à l'ensemble des contraintes).

6. Montrer que $\mathrm{Ker}(A)^{\perp} = \mathrm{Im}(A^*)$.

Correction : C'est un exercice qui a été fait en 3MIC. C'est là encore pour les remettre les résultats qui me semblent importants en place. Le moyen le plus simple de le démontrer est le suivant. On commence par montrer que $\mathrm{Im}(A^*)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$. En effet :

$$\begin{aligned}
&x \in \mathrm{Im}(A^*)^\perp \\
\Leftrightarrow &\langle x, A^* y\rangle = 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^m \\
\Leftrightarrow &\langle Ax, y\rangle = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}^m \\
\Leftrightarrow &x \in \mathrm{Ker}(A).
\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise le fait que pour tout sous-espaces vectoriels E et F tels que $E = F$, on a $E^\perp = F^\perp$. Ainsi $\mathrm{Im}(A^*) = \mathrm{Im}(A^*)^{\perp\perp} = \mathrm{Ker}(A)^\perp$.

7. En déduire que les conditions d'optimalité peuvent se réécrire

$$\begin{cases} x^* - x_0 = A^* y \\ A(x_0 + A^* y) = b \end{cases}$$

Correction : D'après les questions précédentes, les conditions d'optimalité sont $x \in X$ et $x^* - x_0 \in \mathrm{Ker}(A)^\perp$. Comme $\mathrm{Ker}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^*)$, on peut écrire $x^* - x_0 = A^* y$ pour un certain $y \in \mathbb{R}^m$. La condition $x \in X$ signifie que $Ax = b$, soit encore $A(x_0 + A^* y) = b$.

8. En déduire que $x^* = x_0 + A^*(AA^*)^{-1}(b - Ax_0)$.

Correction : L'équation $A(x_0 + A^* y) = b$ implique que $y = (AA^*)^{-1}(b - Ax_0)$. Il suffit de l'injecter dans l'égalité $x^* - x_0 = A^* y$ pour obtenir le résultat annoncé.

9. Justifier pourquoi AA^* peut-être inversée.

Correction : La matrice AA^* peut être inversée car on a supposé que les lignes de A sont linéairement indépendantes. La matrice AA^* est donc de rang plein.

Note : la matrice $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$ n'est rien d'autre que la pseudo-inverse de A. Le point x^* aurait aussi pu être trouvé en utilisant des techniques d'algèbre linéaire.

Partie III : Nous nous intéressons maintenant à un problème d'optimisation pratique. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe différentiable avec un gradient L-Lipschitz.

1. Ecrire un algorithme efficace pour résoudre le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b} g(x).$$

Correction : On peut utiliser un algorithme de gradient projeté, ou mieux, un algorithme de gradient projeté accéléré. Le premier s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
&x_0 \in X \\
&x_{k+1} = \pi_X(x_k - \tau \nabla g(x_k)).
\end{aligned}$$

On peut choisir $\tau = \frac{1}{L}$.
Avec un algorithme accéléré :

$$\begin{aligned}
&y_0 \in X \\
&x_k = \pi_X(y_k - \tau \nabla g(y_k)) \\
&y_k = x_k + \frac{k-1}{k+2}(x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}$$

2. Quelle garanties théoriques de convergence pouvez-vous donner à cet algorithme ?

   Correction : Dans la descente de gradient projeté, le taux de convergence est de type $g(x_k) - g(x^*) = \mathcal{O}\left(\frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{k}\right)$.

   Pour la descente accélérée, $g(x_k) - g(x^*) = \mathcal{O}\left(\frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{k^2}\right)$. Dans les deux cas, rien ne peut être dit sur la distance au minimiseur.

3. On suppose maintenant que g est μ-fortement convexe à gradient L-Lipschitz. Décrire un algorithme de minimisation.
4. Quelles garanties théoriques de convergence pouvez-vous donner ?

   Correction : Les mêmes algorithmes peuvent être utilisés avec au moins les mêmes garanties. Cependant, la forte convexité permet d'obtenir des taux linéaires bien plus satisfaisants.
   Par exemple, l'algorithme de descente de gradient projeté avec $\tau = \frac{2}{\mu + L}$ assure que

$$\|x_k - x^*\|_2^2 = \mathcal{O}\left(\left(\frac{Q_g - 1}{Q_g + 1}\right)^k \|x_0 - x^*\|_2\right)$$

   et

$$g(x_k) - g(x^*) = \mathcal{O}\left(\frac{L}{2}\left(\frac{Q_g - 1}{Q_g + 1}\right)^k \|x_0 - x^*\|_2\right)$$

   avec $Q_g = \frac{\mu}{L}$.
   Pour la descente de gradient projetée accélérée, on obtient la même chose en remplaçant $\left(\frac{Q_g - 1}{Q_g + 1}\right)$ par $\left(\frac{\sqrt{Q_g} - 1}{\sqrt{Q_g} + 1}\right)$ dans les expressions ci-dessus. Notez que cette fois-ci on peut contrôler la distance au minimiseur.