Vendredi 14 janvier 2011, 10h45

Examen d'Analyse I - Durée: 1h30 (2h pour les tiers-temps).

Les questions précédées d'une étoile sont celles qui demandent de rester zen.
(Barême donné à titre indicatif.)

Exercice 1 (5 points. Identification de méthode.)

Pour chacun des problèmes suivants, dites de façon télégraphique si le problème est convexe, différentiable et indiquez quelle méthode vous envisageriez d'utiliser pour le résoudre :

1. $\min_{x\in\mathbb{R}^{1000}} \|Ax-b\|_2^2$, où A est une matrice et b un vecteur.
2. $\min_{x\in\mathbb{R}^{1000}} \sqrt{\|Ax-b\|_2^2}$, où A est une matrice et b un vecteur.
3. $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n x_i$.
4. $\min_{x\in\mathbb{R}^{1000}} \|Ax-b\|_2^2 + \|x\|_1$, où A est une matrice et b un vecteur.
5. $\min_{x\in\mathbb{R}^2, \|x\|_\infty \leq 1} f(x)$, où f est une fonction de constante de Lipschitz égale à 1.
6. $\min_{x\in\mathbb{R}^{1000}, \|x\|_\infty \leq 1} f(x)$, où f est une fonction de constante de Lipschitz égale à 1.
7. $\min_{x\in\mathbb{R}^{1000}, x\geq 1, Ax+b\leq 0} \langle c, x\rangle$, où A est un opérateur linéaire et b et c des vecteurs.

Exercice 2 (5 points. Calcul.)

Dans cet exercice, on cherche une courbe $\mathcal{C}$ qui minimise une certaine énergie [1]. On peut définir $\mathcal{C}$ à partir d'une fonction paramétrée :

$$\phi : \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \phi(t) \end{array}$$

On impose de plus que ϕ définisse une courbe fermée et lisse en ajoutant les contraintes $\phi \in C^2([0,1])^2$, $\phi(0) = \phi(1)$, $\phi'(0) = \phi'(1)$. On peut alors écrire $\mathcal{C} = \{x = \phi(t), t \in [0,1]\}$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. On souhaite trouver la courbe $\mathcal{C}$ qui minimise :

$$F(\phi) = \underbrace{\int_{t\in[0,1]} f(\phi(t))}_{G(\phi)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{t\in[0,1]} |\phi'(t)|^2 dt}_{H(\phi)}.$$

Dans le but de définir un algorithme numérique répondez aux questions suivantes :

1. Calculez $\nabla G(\phi)$. (Faites le calcul de façon formelle, sans trop vous soucier du $o(\|h\|)$.)

[1] C'est un problème qui apparait par exemple dans le design de structures mécaniques de type ailes d'avions.

2. *) Calculez $\nabla H(\phi)$.(Une intégration par parties peut servir.)

Exercice 3 (8 points, Descente de gradient avec erreurs)

Dans cet exercice, on s'intéresse au comportement de la descente de gradient dans le cas où celui-ci est calculé de façon imprécise. On souhaite résoudre :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

en utilisant l'itération :

$$x^{k+1} = x^k - \tau(\nabla f(x^k) + e^k).$$

On suppose que :

- $f(x) = \frac{1}{2}\langle x - x^*, Q(x - x^*)\rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel.
- Q est une matrice carrée, symétrique, définie positive, de plus petite valeur propre m et de plus grande valeur propre M.
- e^k représente l'erreur. On suppose qu'elle est bornée : $\|e^k\| \leq \delta$ où $\|\cdot\|$ représente la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Le minimum existe-t'il ? Est-il unique ? Pouvez-vous le déterminer ?
2. Déterminer les valeurs propres de $I - Q$ en fonction des valeurs propres de Q (I est la matrice identité).
3. Calculez $\nabla f(x^k)$.
4. *) On note $q = max(|1 - \tau m|, |1 - \tau M|)$. Montrez que :
$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\tau\delta}{1-q} + q^k\|x^0 - x^*\|.$$
5. *) *En utilisant un graphique*, déterminez comment choisir τ pour assurer le meilleur taux de convergence.

Exercice 4 (2pts. Forte convexité et dualité.)

On considère la fonction

$$f(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle - \psi(y). \tag{1}$$

1. Montrez que f est convexe.
2. On suppose que ψ est μ-fortement convexe. On note $y(x)$ un minimiseur de (1).
   (a) Justifiez que ce minimiseur est unique.
   (b) Ecrivez les conditions d'optimalité satisfaites par $y(x)$.
3. **Hors Barême** **) On admet que f est différentiable et que $\nabla f(x) = \{y(x)\}$. Montrez que ∇f est $\frac{1}{\mu}$-Lipschitz.