INSA Toulouse, STPI, IMACS 2^e année. **Mardi 23 Novembre 2010, 14h**

Examen d'Analyse I - Durée: 2h (2h40 pour les tiers-temps).

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits.
(Barême donné à titre indicatif.)

Exercice 1 (4 points, Suites de fonctions)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = nx^n(1-x)^\alpha.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ et trouver sa limite.

   *C*orrection... Pour tout $x \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} nx^n = 0$ et $(1-x)^\alpha \in [0,1]$, car $\alpha > 0$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers 0 sur $[0,1[$. De plus, $f_n(1) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers 0 sur $[0,1]$.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$ seulement si $\alpha > 1$.

   *C*orrection... En effectuant un tableau de variations de la fonction f_n sur $[0,1]$, on voit que f_n atteint son maximum en $x = \frac{n}{n+\alpha}$, d'où $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)$. Il faut ensuite trouver un équivalent de cette quantité. [1]. On trouve :

   $$\|f_n\|_\infty \underset{+\infty}{\sim} n\exp(-\alpha)\frac{\alpha^\alpha}{n^\alpha}.$$

   Donc $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3. On suppose que $\alpha \in]0,1]$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle de type $[0,a]$, avec $a \in [0,1[$.

   *C*orrection... En regardant le tableau de variation de f_n, on voit qu'elle est croissante sur $[0, \frac{n}{n+\alpha}]$. Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+\alpha} = 1$, donc pour tout $a \in [0,1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $\|f_n\|_\infty = f_n(a) = na^n(1-a)^\alpha$.

   Or $\lim_{n\to+\infty} na^n(1-a)^\alpha = 0$, $\forall \alpha > 0$, $\forall a \in [0,1[$. On peut donc conclure que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur $[0,a]$.

---

[1]Attention : beaucoup d'étudiants ont fait l'erreur de dire que $\left(\frac{n}{n+\alpha}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} 1$, ce qui est impardonnable étant donné qu'on a fait ce genre de raisonnements au moins 5 fois en TD/cours.

Exercice 2 (2 points, Séries entières.)

1. Calculez le rayon de convergence de et le domaine de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{ln(n)}{n^2} x^n$$

Correction... En utilisant le théorème de d'Alembert, on trouve pour rayon $R = 1$. Il faut ensuite étudier la nature de la série en $x = 1$ et en $x = -1$:

- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{ln(n)}{n^2}$ est convergente. Pour le montrer, on peut utiliser par exemple le fait que $\ln(n) \leq \sqrt{n}$ à partir d'un certain rang. Donc :

$$\frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}},$$

ce qui permet de conclure que la série converge par le théorème de comparaison avec les séries de Riemann.

- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{ln(n)}{n^2}(-1)^n$ converge absolument d'après le raisonnement précédent, donc elle converge. Un autre raisonnement possible consiste à utiliser les théorèmes de séries alternées.

Pour conclure, le domaine de convergence simple de la série entière est $D = [-1, 1]$.

2. Calculez le rayon de convergence, le domaine de convergence simple et la somme de la série entière :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$$

Correction... En appliquant le critère de d'Alembert, on trouve $R = +\infty$. Donc le domaine de convergence simple de la série est $D = \mathbb{R}$.

Pour calculer la somme, on utilise le fait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. D'où :

$$\begin{align} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \tag{1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \tag{2} \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3} \\ &= x \exp(x). \tag{4} \end{align}$$

Donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n = (x-1)\exp(x)$.

Exercice 3 (4 points, Séries entières.)

Soient a, b, c trois réels non nuls. On considère la série entière de terme général :

$$u_n(x) = (an(n-1) + bn + c)x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence.

   Correction... En appliquant la règle de d'Alembert, on trouve aisément que le rayon de convergence $R = 1$.

2. Déterminer son domaine de convergence.

   Correction... On étudie la nature de la série en $x = 1$ et $x = -1$. Les séries numériques $\sum_{n \geq 0} an(n-1) + bn + c$ et $\sum_{n \geq 0} (an(n-1) + bn + c)(-1)^n$ divergent (car le terme général ne tend pas vers 0). Donc le domaine de convergence simple est $D =]-1, 1[$.

3. Déterminer sa somme.

   Correction... On a :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

   En dérivant la série, on obtient :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

   En la redérivant on obtient :

   $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

   Or :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}.$$

   Et :

   $$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

   D'où finalement :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} (an(n-1) + bn + c)x^n = \frac{2ax^2}{(1-x)^3} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-x}.$$

Exercice 4 (3 points, Norme.)

Montrez que l'application $N : P \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)|$ définit une norme sur l'espace des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.

Correction... L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates. Montrons la séparabilité. Soit P un polynôme tel que :

$$N(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)| = 0$$

On a donc $P(t) - P'(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$. On souhaite montrer que cette condition implique $P = 0$, on peut raisonner par l'absurde. On suppose que le polynôme P est non nul de degré $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$. Le polynôme $P(t) - P'(t)$ est aussi un polynôme de degré n (car P' est de degré $n-1$). $P - P'$ s'annule donc au maximum n fois sur $[0,1]$ comme il est de degré n et non nul. Ceci rentre en contradiction avec l'hypothèse de départ $P(t) - P'(t) = 0, \forall t \in [0,1]$.

Exercice 5 (7 points, Séries trigonométriques)

Dans cet exercice, on se propose de montrer des résultats sur les séries trigonométriques. Celles-ci sont fondamentales en traitement du signal.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On se propose d'étudier la série de fonctions $S(x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k \cos(kx)$

1. On suppose que $\alpha > 1$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|a_k| \leq \dfrac{1}{k^\alpha}$.
   (a) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$.
   Correction... On pose $u_k : x \mapsto a_k \cos(kx)$. La série de fonctions $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge normalement et donc elle converge uniformément. En effet, $\|u_k\|_\infty = |a_k|$ puisque $|\cos(kx)| \leq 1$. Or $\sum_{k\geq 1} |a_k|$ converge d'après le critère de Riemann car $|a_k| \leq \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$.
   De plus les fonctions u_k sont continues. Donc d'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions, S est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer (on justifiera les calculs)
   $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos(kx)\,dx.$$
   sous la forme d'une série entière.
   Correction... La série de fonction $\sum_{k\geq 1} u_k$ CVU sur $\mathbb{R}$, de plus l'intervalle $[0,2\pi]$ est borné et les fonctions u_k sont continues, donc intégrables sur $[0,2\pi]$. Par conséquent, on peut intervertir intégrales et sommes :
   $$\begin{aligned}
   \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos(kx)dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx))\cos(kx)dx && (5)\\
   &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} a_n \cos(nx)\cos(kx)dx && (6)\\
   &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{2}\int_0^{2\pi} \cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)dx && (7)\\
   &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\int_0^{2\pi} \cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)dx && (8)
   \end{aligned}$$

Or :
$$\int_0^{2\pi} \cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)dx = \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi & \text{si } \; k=n \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$
D'où :
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos(kx)dx = a_k.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > n$. Montrer que $S \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$.

*C*orrection... On va procéder par récurrence en montrant que les séries des dérivées d'ordre k, $\sum_{n\geq 1} u_n^{(k)}$ convergent uniformément jusqu'à l'ordre $k = n-1$. On a déjà montré le résultat pour $n = 1$ dans la question 1.a.

Supposons que $S^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$ sur $\mathbb{R}$ et que S est $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \leq n-2$. Montrons que cette propriété est vraie au rang $k+1$. On a $u_n'(x) = na_n \sin(nx)$, $u_n''(x) = -n^2 a_n \cos(nx)$, ... Ainsi, de façon générale, on a $u_n^{(k)}(x) = n^k a_n f_n(nx)$ avec f_n qui est une des 4 fonctions trigonométriques cos, sin, $-$sin ou $-$cos. On remarque ensuite que la série $\sum_{n\geq 1} u_n^{(k+1)} = \sum_{n\geq 1} n^{k+1} a_n f_n(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\|u_n^{(k+1)}\|_\infty = n^{k+1}a_n \leq \frac{1}{n^{\alpha-k-1}}$ et la série $\sum_{n\geq 1} \|u_n^{(k)}\|_\infty$ CV d'après le critère de Riemann. Comme les fonctions $u_n^{(k+1)}$ sont continues, on conclut que la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a d'après le théorème d'interversion de la somme et de la dérivée :

$$\begin{aligned}
S^{(k+1)}(x) &= (S^{(k)})'(x) &(9)\\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^k a_n f_n(nx)\right)' &(10)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^k a_n f_n(nx)\right)' &(11)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} a_n f_{n+1}(nx). &(12)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k+1)}(x). &(13)
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la récurrence.

2. Soit $\alpha > 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{1}{k^\alpha}$.

(a) S est-elle définie en 0 ? S est-elle définie en π ?

*C*orrection... La série diverge en 0 d'après le critère de Riemann. Elle converge en -1 d'après le théorème des séries alternées.

(b) Montrer que pour tout $[a,b] \subset]0, 2\pi[$, la fonction S est bien définie et continue sur $[a,b]$. (On pourra utiliser le lemme d'Abel).

*C*orrection... On va montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}$ CVU sur $[a,b]$. On pose $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $b_n(x) = \cos(nx)$, ainsi $u_n = a_n b_n$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle. Pour appliquer le théorème d'Abel, il faut vérifier que $B_n(x) =$

$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ est bornée. Le raisonnement est le suivant :

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} Re(\exp(ikx)) && (14)\\
&= Re\left(\sum_{k=0}^{n}\exp(ikx)\right) && (15)\\
&= Re\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) && (16)\\
&= Re\left(\frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}}\frac{e^{-i(n+1)x/2}-e^{i(n+1)x/2}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}\right) && (17)\\
&= Re\left(e^{ixn/2}\frac{-2i\sin((n+1)x/2)}{-2i\sin(x/2)}\right) && (18)\\
&= \cos(nx/2)\frac{sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}. && (19)
\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[a,b]\subset]0,2\pi[$, on a $\sin(x/2)\geq m=\min(\sin(a/2),\sin(b/2))$. D'où :

$$|B_n(x)|\leq\left|\cos(nx/2)\frac{sin((n+1)x/2)}{m}\right|\leq\frac{1}{m},\ \forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N}.$$

La suite des sommes partielles $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien bornée, donc on peut appliquer le théorème d'Abel qui assure que $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
On remarque ensuite que les fonctions u_n sont continues, ce qui assure que S est elle aussi continue.

Exercice 6 (Hors barême – Série entière et équa. diff.)

Développez en série entière $f(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Note : il faudra commencer par trouver une équation différentielle satisfaite par f.

*C*orrection... f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f(0)=0$. De plus :

$$f'(x)=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}e^{-x^2}=2xf(x)+1.$$

Si sur un intervalle $]-R,R[$, cette équation différentielle admet une solution développable en série entière $\phi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, elle satisfait :

$$\begin{aligned}
\phi'(x)-2x\phi(x) &= \sum_{m=1}^{\infty}ma_mx^{m-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} && (20)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} && (21)\\
&= a_1+\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-2a_{n-1})x^n=1. && (22)
\end{aligned}$$

Comme $\phi(0)=0$, on a $a_0=0$ et $a_1=1$ puis :

$$\forall n\geq 1,\ (n+1)a_{n+1}-2a_{n-1}=0.$$

Cette relation de récurrence permet de définir tous les termes de la série. En la développant, on obtient $a_{2k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Et pour $k \geq 1$, $a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1} a_{2k-1}$ soit :

$$a_{2k+1} = \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}.$$

On peut ensuite calculer le rayon de convergence en utilisant - par exemple - la règle de d'Alembert après avoir fait le changement de variable $X = x^2$. On trouve $R = +\infty$.

On peut finir en appliquant le théorème de Cauchy sur les équations différentielles linéaires qui assure l'unicité de la solution. Celle-ci s'écrit donc :

$$f(x) = \phi(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} x^{2k+1}.$$