INSA Toulouse, STPI, IMACS 2^e année. **Mardi 23 Novembre 2010, 14h**

Examen d'Analyse I - Durée: 2h (2h40 pour les tiers-temps).

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits.
(Barême donné à titre indicatif.)

Exercice 1 (4 points, Suites de fonctions)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = nx^n(1-x)^\alpha.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ et trouver sa limite.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$ seulement si $\alpha > 1$.
3. On suppose que $\alpha \in]0,1]$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle de type $[0,a]$, avec $a \in [0,1[$.

Exercice 2 (4 points, Séries entières.)

Soient a, b, c trois réels non nuls. On considère la série entière de terme général :

$$u_n(x) = (an^2 + bn + c)x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Déterminer son domaine de convergence.
3. Déterminer sa somme.

Exercice 3 (3 points, Norme.)

Montrez que l'application $N : P \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)|$ définit une norme sur l'espace des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 (? points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On se propose d'étudier la série de fonctions $S(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k \cos(kx)$

1. On suppose que $\alpha > 1$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|a_k| \leq \frac{1}{k^\alpha}$.
   (a) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer (on justifiera les calculs)
   $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos(kx)\,dx.$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > n$. Montrer que $S \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R})$.
2. Soit $\alpha > 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \frac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Montrer que pour tout $[a, b] \subset]0, 2\pi[$, la fonction S est bien définie et continue sur $[a, b]$. (On pourra utiliser le lemme d'Abel).
   (b) S est-elle définie en 0?

Exercice 5 (Hors barême – Série entière et équa. diff.)

Développez en série entière $f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Note : il faudra commencer par trouver une équation différentielle satisfaite par f.

Indications supplémentaires.

On rappelle quelques résultats ci-dessous.

[Série produit] Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$, $n \in \mathbb{N}$ deux séries. La série produit est $\sum c_n$, $n \in \mathbb{N}$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

[Règle d'Abel]. Soit $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$ une série de fonctions telle que $u_n(x) = a_n b_n(x)$. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0 et si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sur l'intervalle δ alors $\sum a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur δ.

[Espace complet] On appelle espace complet ou espace de Banach, un espace vectoriel normé dans lequel toutes les suites de Cauchy convergent.

[Exemple] $(C_{[a,b]}, ||\cdot||_\infty)$ est un Banach.

[Dérivée d'une série entière] On appelle dérivée de la série entière $\sum a_n z^n,\ n \in \mathbb{N}$ la série $\sum n a_n z^n,\ n \in \mathbb{N}$.

[Développements en série usuels]

1. $\forall x \in \mathbb{C}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
6. $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
7. $\forall x \in]-1,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.
8. $\forall x \in [-1,1]$, $Arctan\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, et en particulier, $\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
9. $\forall x \in]-1,1[$, $\forall \alpha \notin \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.
11. $\forall x \in]-1,1[$, $Argth\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
12. $\forall x \in]-1,1[$, $Arcsin\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est nul} \\ \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k}\right), & \text{sinon} \end{cases}$
13. $\forall x \in]-1,1[$, $Argsh\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec $a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est nul} \\ \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k}\right), & \text{sinon} \end{cases}$

    Remarque : on peut aussi écrire $a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{(n!\,2^n)^2} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}$
14. $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (n+1) z^n$